ДЕЛОНЕ

КУРС ТЕОРИТИЧ. МЕХАНИКИ

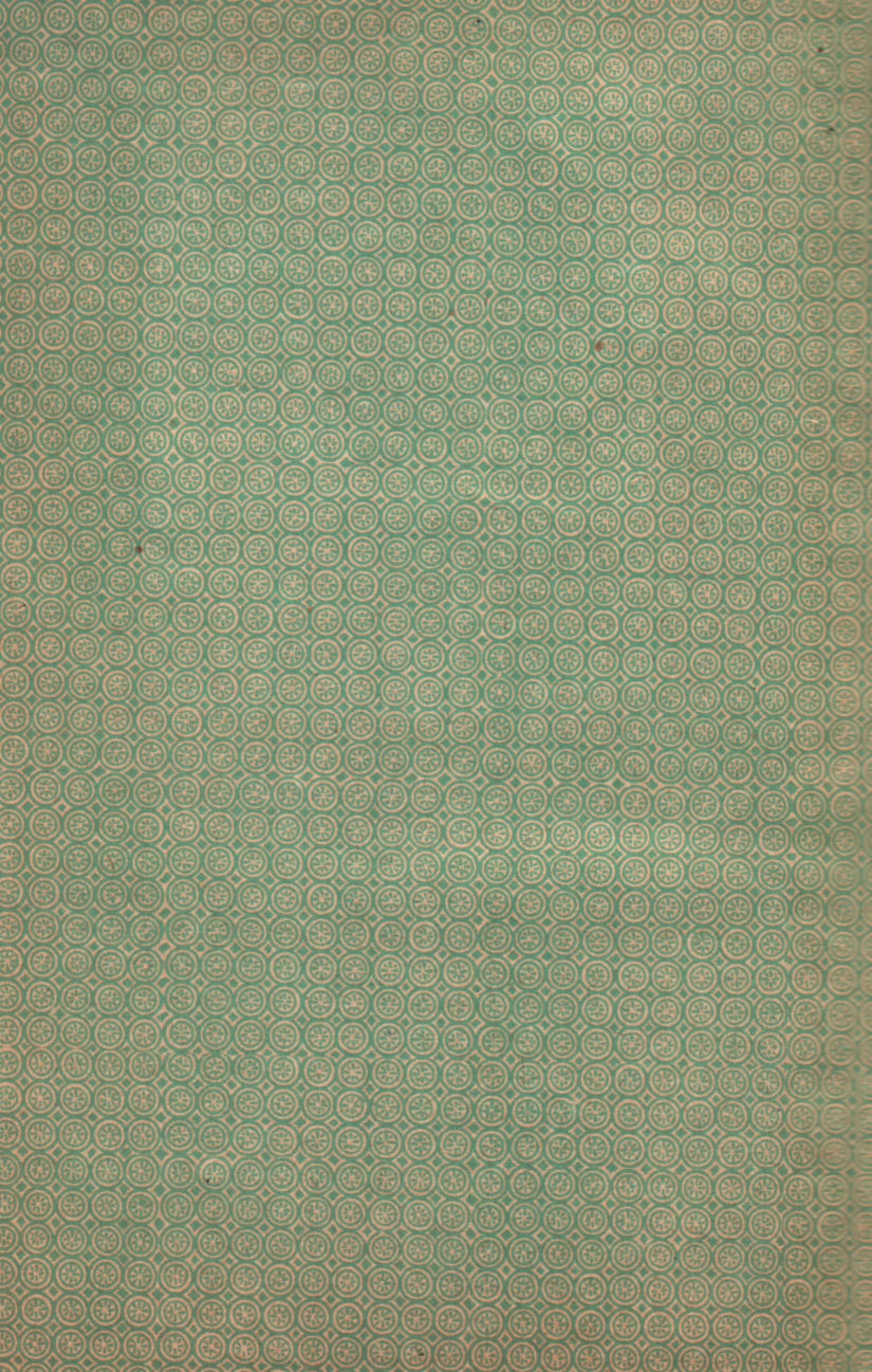
КУРСЪ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ДЛЯ
ТЕХНИКОВЪ и ИНЖЕНЕРОВЪ.

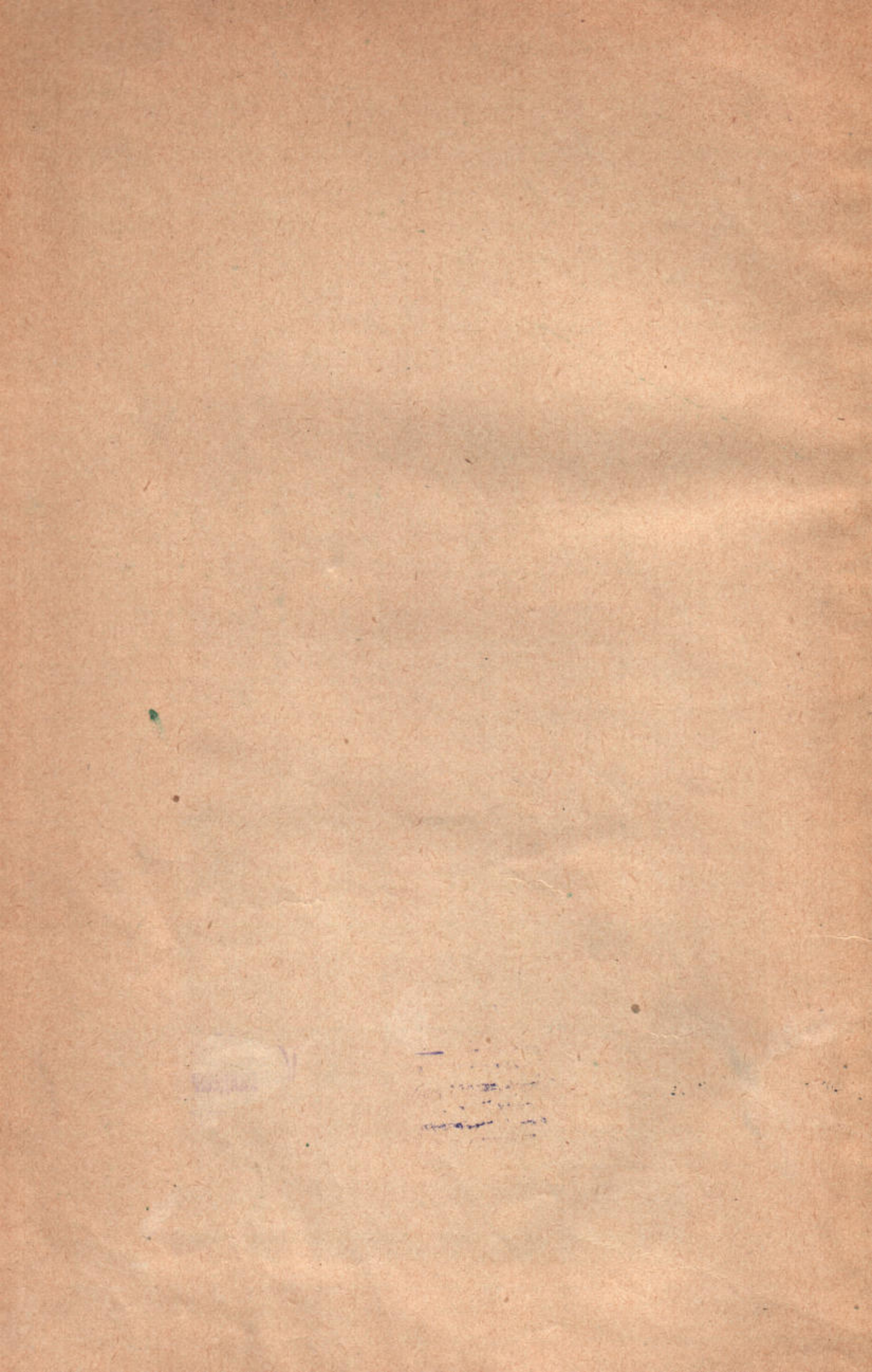
СОСТАВИЛЪ
проф. Н. Б. Делоне.

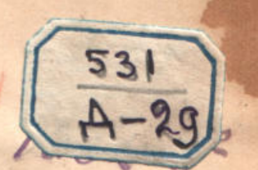
2-ое исправленное изданіе.

Съ 163 фигурами въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе К. Л. Риккера.
Невскій пр., № 14.
1913.







КУРСЪ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ДЛЯ
ТЕХНИКОВЪ и ИНЖЕНЕРОВЪ.



СОСТАВИЛЪ
проф. Н. Б. Делоне.

2-ое исправленное изданіе.

Съ 163 фигурами въ текстѣ.





С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе К. Л. Риккера.
Невскій пр., № 14.
1913.

Типографія Ю. Н. Эрлихъ (влад. А. Э. Коллинсъ) Мал. Дворянская, 19

КУРСЪ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
для
ТЕХНИКОВЪ И ИНЖЕНЕРОВЪ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ I.

Механика точки.

ГЛАВА I.

Прямолинейное движеніе точки.

ГЛАВА II.

Криволинейное движеніе точки.

ГЛАВА III.

Движеніе несвободной точки.

ОТДѢЛЪ II.

Равновѣсіе неизмѣняемой системы.

ГЛАВА I.

Сложеніе силъ и паръ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему.

ГЛАВА II.

Приведеніе силъ, дѣйствующихъ на абсолютно твердое тѣло, къ простѣйшимъ системамъ силъ.

ГЛАВА III.

Условія равновѣсія неизмѣняемой системы.

ГЛАВА IV.

О центрѣ тяжести.

ОТДѢЛЪ III.

Движеніе какой бы то ни было системы точекъ.

ГЛАВА I.

Общія уравненія механики.

ГЛАВА II.

Начало сохраненія движенія центра инерціи.

ГЛАВА III.

Начало сохраненія живой силы.

ГЛАВА IV.

Начало сохраненія площадей.

ГЛАВА V.

Движеніе системы подъ дѣйствіемъ мгновенныхъ силъ.

ОТДѢЛЪ IV.

Механика неизмѣняемой системы.

ГЛАВА I.

Моменты инерціи неизмѣняемой системы.

ГЛАВА II.

Моменты инерціи площадей.

ГЛАВА III.

Общія свойства моментовъ инерціи и нахожденіе ихъ облегченными способами.

ГЛАВА IV.

Вращеніе твердаго тѣла около оси.

ГЛАВА V.

Равновѣсіе абсолютно твердыхъ тѣлъ, между которыми существуетъ треніе.

ГЛАВА VI.

Начало возможныхъ перемѣщеній.

ГЛАВА VII.

Общій случай движенія неизмѣняемой системы.

ОТДѢЛЪ V.

Относительное движеніе.

ГЛАВА I.

Относительное движеніе точки.

ГЛАВА II.

Относительное движеніе и относительное равновѣсіе.

ОТДѢЛЪ VI.

Теорія притяженія.

ГЛАВА I.

Общія формулы притяжанія и притяженіе шаромъ.

ГЛАВА II.

Теорія потенціала.

ОТДѢЛЪ VII.

Равновѣсіе гибкой нити.

ГЛАВА I.

Равновѣсіе свободной нити.

ГЛАВА II.

Равновѣсіе нитей, принужденныхъ находиться на данныхъ кривыхъ.

ГЛАВА III.

Равновѣсіе гибкой нити на поверхности.

ГЛАВА IV.

Равновѣсіе растяжимой гибкой нити.

ОТДѢЛЪ VIII.

Равновѣсіе упругихъ стержней.

ГЛАВА I.

Растяженіе стержней.

ГЛАВА II.

Сгибаніе стержней.

ГЛАВА III.

Крученіе.

ОТДѢЛЪ IX.

Основанія графической статистики.

ОТДѢЛЪ X.

Теорія удара и другихъ мгновенныхъ силъ.

ГЛАВА I.

Ударъ въ плоскомъ движеніи.

ГЛАВА II.

Общія теоремы о мгновенныхъ силахъ.

ОТДѢЛЪ XI.

Общая теорія уравненій механики.

ГЛАВА I.

Уравненія Лагранжа во 2-ой формѣ.

ГЛАВА II.

Каноническія уравненія механики.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

При составленіи настоящаго курса я имѣлъ въ виду двѣ цѣли: 1) дать студентамъ химическаго отдѣленія Варшавскаго Политехническаго Института, слушающимъ мои лекціи, печатный курсъ наиболѣе близкій къ тому, что я имъ читаю и 2) предоставить возможность болѣе широкой публикѣ пользоваться этимъ курсомъ, въ которомъ я обращаю особое вниманіе на равновѣсіе и движеніе твердаго тѣла.

По моему мнѣнію наилучшимъ руководствомъ для техника, изучающаго теоретическую механику, слѣдуетъ признать прекрасные трактаты Раута (Routh): статика твердаго тѣла, въ двухъ томахъ (A treatise on analytical statics, 1896), и динамика твердаго тѣла, тоже въ двухъ томахъ (A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. 1892, или нѣмецкій переводъ подъ заглавіемъ: Die Dynamik der Systeme starrer Körper). Эти книги Раута поражаютъ обиліемъ именно наиболѣе приложимаго къ техникѣ матеріала и выборомъ наиболѣе конкретныхъ задачъ, рѣшаемыхъ до конца съ приниманіемъ во вниманіе тренія, сопротивленія среды, упругости и другихъ усложняющихъ задачу явленій.

Но дѣлать обязательнымъ для своихъ слушателей чтеніе Раута, даже если бы и существовалъ русскій переводъ его трактатовъ, я бы не рѣшился во первыхъ потому, что оба сочиненія Раута представляютъ собою четыре тома большого формата и чтеніе такихъ многотомныхъ трактатовъ несовмѣстимо съ обремененностью студентовъ нашихъ высшихъ техническихъ учебныхъ заведеній учебными занятіями, во-вторыхъ Раутъ предполагаетъ уже знакомство читателя съ механикою точки и въ третьихъ видъ, въ который Раутъ облекаетъ свои формулы, значительно отличается отъ вида классическихъ формулъ общепринятыхъ на континентѣ.

Поэтому въ настоящемъ курсѣ, пользуясь трактатами Раута, я имѣлъ въ виду читателя совершенно еще не знакомаго съ механикою, стараясь познакомить его съ классическими формулами и составить одно-томный учебникъ.

Кромѣ упомянутыхъ книгъ Раута я пользовался, при составленіи этого курса, еще слѣдующими сочиненіями:

Хвольсонъ. Курсъ физики, т. I, Спб. 1897.

Appell. Traité de mécanique rationnelle. Paris. 1896.

Laurent. Traité de mécanique rationnelle. Paris. 1889.

Föppl. Vorlesungen über technische Machanik. Leipzig. 1899.

Boltzmann. Vorlesungen über die Principe der Mechanik. Leipzig. 1897.

Слудскій. Курсъ теоретической механики (Учен. Запис. Имп. Москов. Унив. 1881).

Бобылевъ. Руководство къ курсу введенія въ теоретическую механику. Спб. 1890.

Жуковскій. Элементарная теорія гироскоповъ (Вѣстн. Опыт. физ. и элемент. матем. Кіевъ. 1888).

Thomson und Tait. Handbuch der Theoretischen Physik (deutsche Uebersetz. v. Helmholtz und Wertheim. 1871).

Приношу мою искреннюю благодарность издательской фирмѣ К. Л. Риккера за свойственное ей вполнѣ добросовѣстное отношеніе къ дѣлу предпринятаго ею изданія этой книги.

Н. Делоне.

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. Опредѣленіе Теоретической Механики. Теоретическая механика есть наука о движеніи.

Причины, производящія движеніе или измѣняющія его, называются *силами.* Если силы дѣйствуютъ на тѣло наперекоръ другъ другу такъ, что ихъ дѣйствія взаимно уничтожаются, то тѣло находится *въ равновѣсіи.* Поэтому и равновѣсіе составляетъ предметъ, изучаемый въ теоретической механикѣ, какъ частный случай движенія.

Та часть теоретической механики, которая изучаетъ движеніе, не входя въ разсмотрѣніе производящихъ его силъ, называется *Кинематикою.*

Та часть теоретической механики, которая изучаетъ движеніе въ зависимости отъ производящихъ его силъ, называется *Кинетикою.*

Кинетика подраздѣляется въ свою очередь на *Статику,* изучающую только равновѣсіе и *Динамику,* изучающую движеніе.

Въ настоящемъ курсѣ мы не будемъ, однако, придерживаться этого подраздѣленія, преслѣдуя возможную сжатость изложенія.

Наука о движеніи можетъ быть основана на весьма небольшомъ количествѣ законовъ, выводимыхъ изъ опыта (три закона Ньютона см. § 3). И можетъ быть развита изъ этихъ законовъ строго математическимъ путемъ. Въ такомъ случаѣ, при неотступнымъ проведеніи такого строгаго метода, наука о движеніи называется *Аналитическою* или *Раціональною механикою.*

Въ настоящемъ курсѣ излагается *Теоретическая механика,* допускающая въ нѣкоторыхъ случаяхъ (напримѣръ въ изученіи тренія) обоснованіе своихъ выводовъ изъ опытовъ, не вошедшихъ въ основные закооы Раціональной механики.

§ 2. Значеніе теоретической механики въ изученіи природы. Съ развитіемъ естественныхъ наукъ все болѣе и болѣе крѣпнетъ убѣжденіе въ томъ, что всѣ явленія неорганическаго міра и значительная часть явленій органической природы представляютъ собою результатъ движенія матеріи: звукъ, теплота, свѣтъ, электричество, магнетизмъ суть проявленія различнаго рода молекулярныхъ движеній или вѣсомой матеріи или эфира. Химическія взаимодѣйствія тоже подчинены чисто механическимъ за-

конамъ. Въ органической природѣ весьма многое сводится къ физикѣ и химіи, хотя основной законъ развитія организмовъ—законъ наслѣдственности— еще не приведенъ въ соотвѣтствіе съ какимъ либо движеніемъ.

Отсюда вытекаетъ чрезвычайно важное значеніе теоретической механики въ ряду всего строя человѣческихъ знаній.

При изученіи природы человѣчество пользовалось до сихъ поръ методами, покоящимися на одной изъ трехъ основъ: 1) наблюденіе, 2) опытъ и 3) математика.

Наблюденіемъ совершающагося въ природѣ человѣкъ всегда занимался, но въ качествѣ основы научнаго метода наблюденіе было выставлено Аристотелемъ.

Въ *опытѣ* создается особая искусственная обстановка для выдѣленія фактовъ и процессовъ, подлежащихъ изученію. Отцомъ опытнаго (экспериментальнаго) метода признаютъ Бэкона Верулэмскаго (1560—1616 г.).

Математика прилагается къ изученію природы болѣе всего чрезъ геометрію и особенно чрезъ механику.

Изучая движеніе, механика не можетъ обойтись безъ опыта, но, не довѣряя ему, она стремится быть основанной на наименьшемъ числѣ положеній, данныхъ опытомъ. Поэтому, и по своему методу, механика занимаетъ какъ разъ переходное положеніе отъ чистой математики къ физикѣ, астрономіи и другимъ наукамъ болѣе экспериментальнаго и наблюдательнаго характера.

Раціональная механика довольствуется только самымъ необходимымъ числомъ положеній выводимыхъ изъ опыта, называемыхъ *основными законами механики.* Они могутъ быть сгруппированы различнымъ образомъ *), но наиболѣе удачная ихъ группировка была дана Ньютономъ.

§ 3. Основные законы Ньютона. Въ своихъ Philosophiae Naturalis Principia mathematica 1687 г. (Математическія основанія философіи природы) Ньютонъ высказалъ основные законы механики въ слѣдующей формѣ.

Законъ I. Каждое тѣло пребываетъ въ своемъ состояніи покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія, если дѣйствующія на него силы не принуждаютъ его ~~его~~ измѣнить такое состояніе.

Законъ II. Измѣненіе движеніи пропорціонально приложенной дѣйствующей силѣ и происходитъ по той прямой линіи, по которой дѣйствуетъ сила.

Законъ III. Всякому дѣйствію соотвѣтствуетъ противодѣйствіе равное и противоположное, то есть дѣйствія двухъ тѣлъ, одно на другое, всегда равны и направлены противоположно.

Ко второму закону Ньютонъ добавляетъ, въ видѣ слѣдствія, правило параллелограмма, согласно которому: дѣйствіе двухъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ и составляющихъ нѣкоторый уголъ, равносильно дѣйствію равно-

---

*) См. *Hertz*, Die Prinzipien der Mechanik, 1894. *Boltzmann.* Vorlesungen über die Principe der Mechanik, 1897.

дѣйствующей равной, по величинѣ и по направленію, діагонали параллелограмма, построеннаго на данныхъ составляющихъ силахъ.

Эти законы представляютъ собою выводъ изъ всѣхъ извѣстныхъ опытовъ и наблюденій.

§ 4. Однородность формулъ. Въ механикѣ приходится имѣть дѣло съ единицами разныхъ измѣреній: длины, времени, массы, *площади*, *объема*, вѣса, и т. д. Необходимо обезпечить себя отъ возможности ошибокъ, которыя могутъ произойти отъ неправильнаго пониманія формулъ.

Прежде всего нужно помнить, что *всякое уравненіе должно быть однородно* въ томъ смыслѣ, что обѣ его части должны быть выражаемы въ одинаковыхъ единицахъ.

Напримѣръ такое уравненіе

$$p = ab + c + 3 + abc$$

въ которомъ p объемъ, a, b, c длины, 3 отвлеченное число,—не имѣетъ никакого смысла. Такое же уравненіе

$$p = s \, . \, a + abc$$

вполнѣ возможно, если p объемъ, a, b, c длины, s площадь, потому что въ немъ, по отношенію къ длинѣ, лѣвая часть 3-го измѣренія, sa тоже 3-го измѣренія, abc тоже 3-го измѣренія.

Возьмемъ еще примѣръ изъ геометріи. Извѣстно, что площадь P прямоугольника измѣряется произведеніемъ его основанія a на высоту b. Обыкновенно это выражается такъ:

$$P = ab \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Результатъ однако будетъ невѣренъ, если при основаніи равномъ 5 метрамъ и высотѣ равной 24 сантиметрамъ, мы, для опредѣленія площади, помножимъ 5 на 25. Онъ будетъ даже нелѣпъ, оставляя полное недоумѣніе относительно того, въ какихъ мѣрахъ выражена площадь.

Формулу (1) надо понимать такъ: площадь прямоугольника содержитъ такое число единицъ площади, которое равно произведенію числа единицъ длины, содержащихся въ основаніи, на число *тѣхъ же* единицъ длины содержащихся въ высотѣ.

Для избѣжанія ошибокъ, особенно въ числовыхъ задачахъ, удобно иногда пользоваться болѣе полнымъ обозначеніемъ, въ которомъ единицы разныхъ измѣреній вводятся явно. Въ этомъ обозначеніи, напримѣръ, длина 5 метровъ выражается произведеніемъ

5 . [метръ]

отвлеченнаго числа 5 на единицу длины «метръ».

При такомъ «полномъ» обозначеніи формула (1) можетъ быть выражена такъ: между числомъ p единицъ площади, заключающихся въ прямоугольникѣ P числомъ a единицъ длины, заключающихся въ его осно-

ванiи a и числомъ β единицъ длины, заключающихся въ его высотѣ b, должно быть соотношенiе.

$$p \,.\, [\text{единица площади}] = \alpha \,.\, [\text{единица длины}] \,.\, \beta \,.\, [\text{единица длины}]$$
$$= \alpha\beta\, [\text{единица длины}]^2$$
$$= \alpha\beta\, [\text{единица площади}]$$

иии

$$p = \alpha\beta$$

гдѣ

$$P = p\ [\text{единица площади}]$$
$$a = \alpha\ [\text{единица длины}]$$
$$b = \beta\ [\text{единица длины}]$$

Въ приложенiи къ численному примѣру прямоугольника, имѣющаго основанiе 5 метровъ и высоту 24 сантиметра это можетъ быть выражено такъ:

$$P = p\ [\text{квадр. метръ}]$$
$$a = 5\ [\text{метръ}]$$
$$b = 0{,}24\ [\text{метръ}]$$

$$P = p\ [\text{квадр. метръ}] = 5 \,.\, 0{,}24\ [\text{метръ}]^2 = 1{,}2\ [\text{квадр. метръ}]$$
$$p = 1.2$$
$$P = 1{,}2 \text{ квадратныхъ метровъ.}$$

Можно опредѣлить площадь P иначе, напримѣръ въ квадратныхъ сантиметрахъ такъ:

$$P = p'\ [\text{квадр. сантиментръ}]$$
$$a = 500\ [\text{сантиметръ}]$$
$$b = 24\ [\text{сантиметръ}]$$

$$P = p'\ [\text{квадр. сант.}] = 500 \,.\, 24 \,.\, [\text{сантим.}]^2 = 12000 \text{ квадр. сантим.}$$
$$p' = 12000$$
$$P = 12000 \text{ квадр. сантим.}$$

Это обозначенiе въ особенности понадобится намъ при опредѣденiи размѣровъ различныхъ единицъ по отношенiю къ основнымъ единицамъ. Пока мы знаемъ изъ геометрiи, что

$$\text{размѣръ 1 площади} = [\text{единица длины}]^2$$
$$\text{размѣръ 1 объема} = [\text{единица длины}]^3.$$

Единицы площади и объема по отношенiю къ *основной* единицѣ длины называются *сложными* единицами. Въ механикѣ гораздо больше сложныхъ единицъ, чѣмъ въ геометрiи, и полное обозначенiе иногда облегчаетъ дѣло, хотя большую часть формулъ мы будемъ представлять въ обыкновенномъ обозначенiи.

ОТДѢЛЪ I.

Механика точки.

Движеніе тѣла вполнѣ опредѣлено, если извѣстно движеніе каждой его точки. Поэтому мы разсмотримъ прежде всего движеніе точки и начнемъ съ прямолинейнаго движенія точки.

ГЛАВА I.

Прямолинейное движеніе точки.

§ 5. Равномѣрно-прямолинейное движеніе точки. По первому закону Ньютона безконечно малая частица матеріи, которую мы будемъ называть *матеріальною точкою*, при отсутствіи какихъ бы то ни было силъ, которыя на нее бы дѣйствовали, движется равномѣрно прямолинейно. Разсмотримъ такое движеніе.

Равномѣрно-прямолинейнымъ движеніемъ называется такое движеніе, въ которомъ матеріальная точка въ равные промежутки времени проходитъ равные прямолинейные пути.

Отсюда выводимъ слѣдующее: если примемъ прямую, по которой движется (которую описываетъ) точка, за ось иксовъ, изберемъ на этой прямой какое-нибудь начало o, условимся опредѣлять положеніе движущейся точки на этой прямой разстояніемъ ея x отъ начала o и условимся относительно того, въ какую сторону отъ o считать эти разстоянія положительными и въ какую—отрицательными, то путь $x—x_0$, проходимый точкою въ теченіи промежутка времени $t—t_0$, пропорціоналенъ въ равномѣрно-прямолинейномъ движеніи этому промежутку, такъ что

$$x - x_0 = v\,(t - t_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ v нѣкоторая постоянная величина.

Отсюда

$$v = \frac{x—x_0}{t—t_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

есть отношеніе пройденнаго пути $x—x_0$ ко времени $t—t_0$, въ теченіи кото-

раго онъ пройденъ, называется *скоростью* равномѣрно-прямолинейнаго движенія. Изъ самой формулы (2) видно, что размѣръ единицы скорости таковъ

$$\frac{[\text{единица длины}]}{[\text{единица времени}]}$$

Напримѣръ, если точка проходитъ равномѣрно въ 3 часа 90 верстъ, то скорость ея равна

$$v = \frac{90 \,.\, [\text{верста}]}{3 : [\text{часъ}]} = 30 \left[\frac{\text{верста}}{\text{часъ}}\right] = 30 \text{ верстъ въ часъ.}$$

Итакъ: 1) *Скорость равномѣрнаго прямолинейнаго движенія есть величина постоянная для даннаго движенія.* 2) *Скорость равномѣрно-прямолинейнаго движенія выражается отношеніемъ пройденнаго пути ко времени, въ теченіи котораго этотъ путь пройденъ.*

§ 6. Общее уравненіе равномѣрно-прямолинейнаго движенія точки. Всякое уравненіе вида

$$x = at + b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

гдѣ x пройденный прямолинейный путь, t время, a и b постоянныя, выражаетъ собою равномѣрно-прямолинейное движеніе точки. Дѣйствительно изъ (3) слѣдуетъ:

$$\Delta x = a \,.\, \Delta t \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

то есть: пройденный прямолинейный путь пропорціоналенъ времени, въ теченіи котораго онъ пройденъ—основное свойство равномѣрно-прямолинейнаго движенія.

Полагая въ (3)

$$t = o$$

получимъ

$$x = b$$

Слѣдовательно b есть то разстояніе, на которомъ находится точка отъ начала координатъ при $t = o$, то есть въ *началѣ времени.* Это разстояніе называется *начальнымъ. Началомъ времени* называется моментъ, отъ котораго отсчитываемъ время. Положеніе, занимаемое движущеюся точкою въ началѣ времени, называется *начальнымъ положеніемъ* точки.

Изъ (4) слѣдуетъ

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Слѣдовательно a выражается отношеніемъ пройденнаго пути ко времени, въ теченіи котораго этотъ путь пройденъ. Согласно сказанному въ предыдущемъ параграфѣ a есть, слѣдовательно, скорость.

Итакъ: *уравненіе*

$$x = at + b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

выражаетъ собою равномѣрно-прямолинейное движеніе точки, въ которомъ a есть скорость, b начальное разстояніе.

Уравненія, связывающія [подобно уравненію (3)] координаты точки со временемъ, называются уравненіями движенія.

Всѣ обстоятельства движенія и положенія точки въ каждый данный моментъ вполнѣ опредѣляются уравненіями движенія.

Примѣръ. Опредѣлить скорость, начальное положеніе точки и положеніе ея въ концѣ 10-й секунды, послѣ прохожденія чрезъ начальное положеніе, въ движеніи, уравненіе котораго таково:

$$x = 3\,\frac{[\text{метръ}]}{[\text{секунда}]}\,.\,t + 5\ [\text{метръ}]$$

отвѣтъ:

$$\text{скорость } v = 3\,\frac{[\text{метръ}]}{[\text{секунда}]} = 3 \text{ метра въ секунду.}$$

Начальное положеніе находится на разстояніи 5 метровъ, въ положительную сторону, отъ начала координатъ.

Точка движется въ сторону возрастающихъ положительныхъ иксовъ. Въ концѣ 10-й секунды она находится на разстояніи отъ начала координатъ равномъ:

$$x = 3\,\frac{[\text{метръ}]}{[\text{секунда}]}\,.\,10\,[\text{секунда}] + 5\,[\text{метръ}] = (3\,.\,10 + 5)\text{ метръ} = 35 \text{ метр.}$$

§ 7. Прямолинейное движеніе съ перемѣнною скоростью. Подъ дѣйствіемъ силы, матеріальная точка можетъ двигаться неравномѣрно, то есть съ измѣняющеюся скоростью По 2-му закону Ньютона направленіе измѣненія движенія совпадаетъ съ направленіемъ силы. Если сила направлена въ теченіи всего движенія по данной прямой, то и измѣненіе движенія будетъ направлено въ каждый данный моментъ по этой прямой (которую мы примемъ за ось иксовъ). Точка поэтому не сойдетъ съ этой прямой, и измѣненіе движенія будетъ состоять только въ измѣненіи быстроты его. Такимъ образомъ получается *прямолинейное движеніе съ перемѣнною скоростью.* Спрашивается, что слѣдуетъ называть скоростью такого движенія?

Отвѣтъ на это даютъ общіе принципы дифференціальнаго исчисленія. Движеніе есть явленіе подчиненное законамъ непрерывности. Мы разсматриваемъ только такія движенія, въ которыхъ скорость не мѣняется внезапно, а лишь постепенно. Поэтому прямолинейное движеніе *съ перемѣнною скоростью* можетъ быть разсматриваемо состоящимъ изъ ряда послѣдовательныхъ безконечно малыхъ *равномѣрно-прямолинейныхъ* движеній. Въ теченіи весьма малаго времени Δt всякое движеніе *почти* равномѣрно, вслѣдствіе чего отношеніе $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, называемое *среднею скоростью*, довольно точно измѣряетъ быстроту движенія въ теченіи времени Δt. Средняя скорость зависитъ однако не только отъ t, но и отъ Δt. Но предѣлъ $\frac{dx}{dt}$, къ которому стремится отношеніе $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при уменьшеніи промежутка Δt, зависитъ только отъ t. Этотъ предѣлъ и называютъ скоростью точки въ

тотъ моментъ, до котораго протекло время t отъ начала времени. Итакъ: *скорость какого бы то ни было прямолинейнаго движенія выражается производною*

$$\frac{dx}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

отъ пути по времени.

Поэтому, если движеніе дано уравненіемъ

$$x = f\ (t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

то скорость v будетъ выражаться формулою

$$v = \frac{dx}{dt} = f'\ (t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

§ 8. Ускореніе въ прямолинейномъ движеніи. Положимъ, что въ теченіи безконечно малаго промежутка времени dt скорость увеличилась на dv, такъ что изъ v обратилась въ $v + dv$. Тогда, на основаніи формулы (6), имѣемъ:

$$dv = d\left(\frac{dx}{dt}\right) = f''\ (t)\ .\ dt \ldots\ldots\ldots (7)$$

Такое приращеніе получаетъ скорость v въ теченіи промежутка dt. Если бы точка двигалась затѣмъ съ тѣмъ же приращеніемъ dv скорости въ каждое послѣдующее dt, то въ единицу времени скорость получила бы приращеніе

$$\frac{dv}{at} = f''\ (t) = \frac{d^2x}{dt^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Эта величина, равная приращенію скорости, отнесенному къ единицѣ времени, называется ускореніемъ. Мы будемъ обозначать ускореніе буквою j.

Итакъ:

$$j = \frac{dv}{dt} = f''\ (t) = \frac{d^2x}{dt^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

ускореніе измѣряется первою производною отъ скорости по времени или второю производною отъ пути по времени.

Ускореніе и есть то самое, что Ньютонъ назвалъ измѣненіемъ движенія.

§ 9. Размѣръ ускоренія. Мы знаемъ изъ § 6-го, что размѣръ единицы скорости таковъ:

$$\frac{[\text{единица длины}]}{[\text{единица времени}]}$$

Изъ (9) видно, что ускореніе измѣряется отношеніемъ $\frac{dv}{dt}$. Слѣдовательно размѣръ единицы ускоренія таковъ

$$\frac{[\text{единица длины}]}{[\text{единица времени}]}$$

§ 10. Сила. По второму основному закону Ньютона (§ 3) измѣненіе движенія, то есть ускореніе j, пропорціонально силѣ дѣйствующей на матеріальную точку.

Слѣдовательно и наоборотъ: сила P, дѣйствующая по направленію движенія, пропорціональна ускоренію j, то есть:

$$P = mj \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

гдѣ m нѣкоторое постоянное, называемое массою. Итакъ: сила *выражается произведеніемъ массы на ускореніе*.

Силы, дѣйствующія по направленію осей координатъ, мы будемъ обозначать большими буквами, соотвѣтствующими названіямъ осей. Тогда, согласно (9) и (10), имѣемъ:

$$X = mj \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10a)$$

$$X = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

или

$$X = m\,\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Уравненія (11) и (12) называются дифференціальными уравненіями прямолинейнаго движенія.

§ 11. Масса. Наблюденіе и опытъ (напримѣръ опыты на Атвудовой машинѣ), показываютъ, что *для возбужденія того же ускоренія требуется тѣмъ большая сила, чѣмъ больше матеріи заключается въ тѣлѣ*. Но уравненіе (9) показываетъ, что для возбужденія того же ускоренія j нужна тѣмъ большая сила P, чѣмъ больше масса m. Слѣдовательно масса представляетъ собою величину измѣряющую количество матеріи. Изъ первыхъ двухъ законовъ Ньютона видно, что матерія обладаетъ способностью сопротивляться измѣненію движенія. Эта способность называется *инерціею*. Масса выражаетъ инерцію матеріи. Инерція—это основное свойство матеріи.

Во избѣжаніе недоразумѣній замѣтимъ тутъ же слѣдующее. Всякія тѣла большія и малыя, тяжелыя и легкія падаютъ въ данной мѣстности земной поверхности, въ пустотѣ, съ одинаковымъ ускореніемъ именно потому, что чѣмъ тяжелѣе тѣло, тѣмъ больше его масса m, но зато во столько же разъ и вѣсъ его, то есть дѣйствующая на него сила, больше, а если мы въ формулѣ (9) увеличимъ въ одинаковое число n разъ силу P и массу m, то получимъ:

$$Pn = mnj,$$

откуда j опредѣлится тою же величиною

$$j = \frac{P}{m}$$

какъ и изъ (9).

§ 12. Абсолютныя единицы. За основныя единицы принимаются: единица длины, единица времени и единица массы. Изъ этихъ единицъ составляются сложныя единицы, подобно тому какъ мы уже составляли единицы скорости и ускоренія изъ единицъ длины и времени. Такая система единицъ называется *абсолютною*.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы примемъ слѣдующія обозначенія

$$[L] = [\text{единица длины}]$$
$$[T] = [\text{единица времени}]$$
$$[M] = [\text{единица массы}].$$

Тогда, согласно сказанному въ §§ 5 и 9, получимъ:

$$[\text{единица скорости}] = \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}]$$

$$[\text{единица ускоренія}] = \frac{[L]}{[T]^2} = [LT^{-2}]$$

§ 13. Размѣръ единицы силы. Согласно такому обозначенію и формулѣ (9) заключаемъ, что размѣръ единицы силы таковъ:

$$[\text{единица силы}] = [MLT^{-2}].$$

Если за основныя единицы приняты $[L]$, $[T]$ и $[M]$, то за единицу силы мы *должны* уже принять такую силу, которая, дѣйствуя на единицу массы, производитъ единицу ускоренія.

§ 14. Сантиметръ—граммъ—секундная система единицъ. Въ современной физикѣ получила широкое распространеніе такая абсолютная система единицъ, въ которой

$[L] = [\text{сантиметръ}]$
$[T] = [\text{секунда}]$
$[M] = [\text{грамм}] =$ масса содержащихся въ 1 граммѣ вещества.

Эта система называется $C.g.s$ система абсолютныхъ единицъ. Изъ основныхъ единицъ образуются сложныя

[единица скорости] $= [LT^{-1}] =$ скорость точки, проходящей равномѣрно 1 сантиметръ въ 1 секунду.

[единица ускоренія] $= [LT^{-2}] =$ ускореніе такого движенія, при которомъ въ 1 секунду скорость увеличивается на единицу скорости.

[единица силы] $= [MLT^{-2}] =$ сила, подъ вліяніемъ которой масса граммъ пріобрѣтаетъ ускореніе, равное единицѣ.

Эта единица силы называется *динъ*. Вѣсъ одного грамма равенъ 981 дину.

§ 15. Ускореніе земного тяготѣнія. Вѣсъ. Ускореніе, производимое силою тяжести на земной поверхности въ различныхъ мѣстностяхъ раз-

лично, но ускореніе въ одной мѣстности мало отличается отъ ускоренія въ другой. Въ среднемъ оно равно 981 единицъ ускоренія *) и обозначается чрезъ g. Слѣдовательно *вѣсъ* p тѣла, то есть именно сила возбуждающая ускореніе g, связана съ массою тѣла, согласно (9), такою формулою:

$$p = mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

гдѣ

$$g = 981 \frac{[\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]^2} = 9{,}81 \frac{[\text{метръ}]}{[\text{секунда}]^2}.$$

§ 16. Системы единицъ отличныя отъ абсолютной. Иногда, напримѣръ въ практической механикѣ, принимаютъ за основныя единицы: единицу длины 1 метръ, единицу времени 1 секунду, единицу силы вѣсъ 1-го килограмма. Тогда уже масса тѣла опредѣляется изъ (13) такъ

$$m = \frac{p}{9{,}81} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

гдѣ p число килограммовъ, единица массы $= \dfrac{\text{масса содержащаяся въ килогр.}}{9{,}81}$

Изъ этого примѣра видно, что выборъ единицъ есть дѣло условное, но необходимо ихъ выбирать такъ, чтобы уравненія, связывающія различныя величины, удовлетворялись. Такъ: въ примѣрѣ настоящаго параграфа можно было произвольно выбрать двѣ единицы (длины и силы), но тогда третья единица (массы) должна быть выбрана уже такъ, чтобы уравненіе (14) удовлетворялось.

§ 17. Различные типы задачъ на прямолинейное движеніе точки. При изслѣдованіи прямолинейнаго движенія точки встрѣчаются задачи главнѣйшимъ образомъ двухъ типовъ: 1) По данному уравненію движенія опредѣлить скорость, ускореніе и силу, производящую это движеніе. 2) По данной силѣ найти ускореніе, скорость и уравненіе движенія.

Задачи 1-го типа рѣшаются весьма просто дифференцированіемъ. Рѣшеніе это можетъ быть представлено въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ.

Дано уравненіе прямолинейнаго движенія по оси иксовъ

$$x = f(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Отсюда по (6) получаемъ дифференцированіемъ скорость

$$v = f'(t). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Дифференцируя еще разъ, получимъ по (8) ускореніе

$$j = f''(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Помножая на массу, получимъ по (11) силу

$$X = mf''(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

*) Сила тяжести увеличиваетъ скорость падающаго тѣла въ каждую секунду на величину, равную «981 сантиметръ въ секунду».

Примѣръ I. Опредѣлить скорость, ускореніе и силу въ прямолинейномъ движеніи, выраженномъ уравненіемъ

$$x = at^3 + bt^2 + ct + h$$

Находимъ:

$$v = \frac{dx}{dt} = 3at^2 + 2bt + c$$

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} = 6at + 2b$$

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = m(6at + 2b).$$

Оказывается, что въ этомъ движеніи сила X съ теченіемъ времени измѣняется.

Примѣръ II. Опредѣлить скорость, ускореніе и силу въ прямолинейномъ движеніи

$$x = at^2 + bt + c.$$

Находимъ:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2at + b$$

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} = 2a$$

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = 2am.$$

Здѣсь сила, дѣйствующая на точку, оказывается величиною постоянною.

Перейдемъ къ задачамъ 2-го типа, рѣшающимся интегрированіемъ и разсмотримъ прежде всего такія задачи, которыя сами по себѣ имѣютъ большое значеніе. На этихъ задачахъ мы познакомимся еще съ нѣкоторыми основными понятіями механики.

§ 18. Общій способъ рѣшенія задачъ 2-го типа. Задачи 2-го типа, то есть такія, въ которыхъ *по данной силѣ* X ищется ускореніе, скорость и уравненіе движенія, рѣшаются *интегрированіемъ* дифференціальнаго уравненія движенія:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

а именно: ускореніе находится, согласно (10а), по формулѣ:

$$j = \frac{X}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Затѣмъ по формулѣ (9) и (20) имѣемъ:

$$\frac{X}{m} = \frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Интегрируя это уравненіе, получаемъ скорость v.

Далѣе по (6):

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Интегрируя его находимъ x какъ функцію времени, то есть искомое уравненіе движенія:

$$x = f(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

§ 19. Движеніе тяжелой точки, падающей въ пустотѣ. Представимъ себѣ, что въ началѣ координатъ 0 расположенномъ на небольшой (не болѣе километровъ 10) высотѣ отъ земной поверхности находится тяжелая точка массы m. Въ нѣкоторый моментъ, отъ котораго будемъ считать время, предоставляемъ точкѣ свободу падать подъ вліяніемъ своего вѣса (то есть подъ вліяніемъ земного притяженія). Опредѣлить движеніе точки m.

Здѣсь дана дѣйствующая сила = вѣсу падающей точки. Эта сила постоянная *). Вѣсъ точки массы m по (13) равенъ mg. Слѣдовательно, избравъ ось иксовъ по вертикали внизъ отъ начала 0, имѣемъ:

$$X = mg = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

или, согласно (21):

$$\frac{X}{m} = g = \frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

или

$$\int g dt = \int dv.$$

Интеграція введетъ произвольное постоянное c, такъ что по интегрированіи получимъ:

$$gt + c = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Это произвольное постоянное опредѣляется *изъ начальныхъ данныхъ*, а именно, согласно условіямъ задачи, при $t = 0$ скорость v равняется нулю. Слѣдовательно (26) для начала движенія имѣетъ видъ:

$$g \cdot 0 + c = 0,$$

откуда:

$$c = 0.$$

Но v постоянное. Слѣдовательно, если оно равно 0 при началѣ движенія, то и въ теченіи всего движенія оно равно нулю.

Поэтому (26) принимаетъ видъ:

$$v = tg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Скорость паденія точки пропорціональна времени.

Затѣмъ (22) даетъ:

$$v = gt = \frac{dx}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

или

$$\int gt\, dt = \int dx.$$

---

*) Еслибы точка падала съ высоты много большей 10 километровъ, то пришлось бы имѣть дѣло съ перемѣнной силой, потому что притяженіе землею ослабѣваетъ по мѣрѣ удаленія отъ нея точки. До высоты 10 километровъ (высоты самыхъ высокихъ горъ) можно пренебречь измѣненіемъ вѣса, зависящимъ отъ разстоянія точки отъ земли.

Интеграція введетъ произвольное постоянное c_1. По интегрированіи получимъ:

$$\frac{gt^2}{2} + c_1 = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Опредѣлимъ c_1 изъ *начальныхъ данныхъ*. При $t=0$ точка находится въ началѣ 0, слѣдовательно $x = 0$ при $t = 0$. Вставляя въ (29), получимъ:

$$\frac{g \cdot 0}{2} + c_1 = 0,$$

откуда:

$$c_1 = 0.$$

Слѣдовательно (29) имѣемъ видъ:

$$x = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Это и есть искомое уравненіе движенія.

Задача, какъ и всякая задача этого типа, потребовала двухъ интегрированій. Каждое интегрированіе ввело произвольныя постоянныя, которыя опредѣлены были изъ начальныхъ данныхъ. Ускореніе въ этомъ движеніи есть величина постоянная $g = 981 \frac{[\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]^2}$. Скорость, какъ это видно изъ (28), пропорціональна времени. Такое движеніе называется *равномѣрно-ускореннымъ*.

§ 20. Изслѣдованіе движенія тяжелой точки, падающей въ пустотѣ.

Изъ уравненія (30) находимъ, что пути, проходимые точкою отъ начала координатъ, будутъ *)

въ концѣ 1-ой секунды $x_1 = \frac{981 \cdot 1}{2} = 490{,}5$ сантиметровъ $= \frac{g}{2}$

» 2-ой » $x_2 = \frac{981 \cdot 2^2}{2} = 1962$ » » $\frac{g \cdot 4}{2}$

» 3-ей » $x_3 = \frac{981 \cdot 3^2}{2} = 4414{,}5$ » » $\frac{g \cdot 9}{2}$

» 4-ой » $x_4 = \frac{981 \cdot 4^2}{2} = 7848$ » » $\frac{g \cdot 16}{2}$

. . . .

Слѣдовательно:

въ теченіи 1-ой секунды точка проходитъ $x_1 = 490{,}5$ сантиметр. $= \frac{g}{2}$

» 2-ой » » » $x_2 = 1471{,}5$ » $= \frac{g \cdot 3}{2}$

---

*) Уравн. (30) въ полномъ видѣ таково:

$$x = \frac{981 \frac{[\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]^2}}{2}\, t^2\, [\text{секунда}]^2 = \frac{981 \cdot t^2}{2}\ [\text{сантиметръ}].$$

въ теченіе 3-ей секунды точка проходитъ $x_3 - x_2 = 2452{,}5$ сант. $= \frac{g.5}{2}$

» 4-ой » » » $x_4 - x_3 = 3433{,}5$ » $= \frac{g.7}{2}$

. . . .

Изъ (30) и изъ 1-ой таблицы настоящаго параграфа видно: 1) пути, проходимые падающею точкою отъ начала, при ея равномѣрно-ускоренномъ движеніи, пропорціональны квадрату времени протекшему отъ начала движенія. Изъ таблицы 2-й настоящаго параграфа видно: 2) пути, проходимые точкою въ теченіи ряда послѣдовательныхъ секундъ, пропорціональны послѣдовательнымъ нечетнымъ числамъ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13....

Изъ (28) находимъ скорости, которыми падающая точка обладаетъ въ различные моменты:

въ началѣ движенія $v_0 = 0$

въ концѣ 1-ой секунды $v_1 = 981$ сантиметръ въ секунду

» » 2-ой » $v_2 = 981 \,.\, 2 = 1962$ сантим. въ секунду

» » 3-ей » $v_3 = 918 \,.\, 3 = 2754$ » » »

» » 4 ей » $v_4 = 981 \,.\, 4 = 3924$ » » »

. . . .

§ 21. Работа. *Работою T*, которую производитъ сила, дѣйствующая на свободную точку, называется произведеніе:

$$P \,.\, h \,.= T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

силы P на путь, пройденный точкою въ разсматриваемое время.

Если точка не свободна, а принуждена двигаться по опредѣленному пути (напримѣръ, если она заключена въ прямолинейной трубкѣ) и если сила направлена по пути, проходимому точкою, то работа тоже выражается произведеніемъ Ph.

Если же направленіе пути составляетъ съ направленіемъ силы уголъ φ, то разсуждаемъ такъ: разлагаемъ силу P на силу p, направленную по пути, и на силу q, перпендикулярную къ пути. Сила q только прижимаетъ точку къ тому, что препятствуетъ ей сойти съ пути; двигаетъ же точку только сила p равная проложенію $P \cos\varphi$ силы P на направленіи пути. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ:

$$T = p \,.\, s,$$

гдѣ s путь пройденный точкою въ разсматриваемое время или

$$T = P \,.\, \cos\varphi \,.\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

При $\varphi = 0$ получимъ формулу (31).

Итакъ общее опредѣленіе работы таково: *работою называется произведеніе пути s на проложеніе $P \cos\varphi$ дѣйствующей силы P.*

Примѣръ 1. Работа силы тяжести mg при прохожденіи падающею точкою пути $(x - x_0)$ равна:

$$mg\,(x - x_0).$$

Примѣръ 2. Работа силы тяжести mg при прохожденіи падающею точкою разстоянія x равна:

$$mg\,.\,x.$$

§ 22. Единицы работы. За единицу работы обыкновенно принимаютъ *килограмметръ. Киллограмметромъ называется работа силы равной вѣсу одного килограмма на пути равномъ метру, проходимомъ точкою по направленію этой силы подъ исключительнымъ ея вліяніемъ.*

Въ абсолютной *C. G. S* системѣ единицъ за единицу работы принимается эргъ.

Эргомъ называется работа силы равной одному дину на пути равномъ сантиметру, проходимомъ точкою въ направленіи этой силы.

Мы видѣли въ § 13-омъ, что размѣръ единицы силы таковъ (MLT^{-2}). Слѣдовательно изъ (31) заключаемъ, что размѣръ единицы работы таковъ

$$[ML^2T^{-2}]$$

1000000 эрговъ называется *«мегаэргъ»*, такъ что:

мегаэргъ $= 10^6$ эргамъ

10 мегаэрговъ называется *«джауль»*, такъ что:

джауль $= 10^7$ эргамъ.

§ 23. Живая сила. Произведеніе $\frac{mv^2}{2}$ массы на половину квадрата скорости называется живою силою.

$$\text{Живая сила} = \frac{mv^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

§ 24. Уравненіе живой силы. Во многихъ случаяхъ (въ какихъ именно—будетъ указано впослѣдствіи) оказывается вѣрнымъ уравненіе, называемое *уравненіемъ живой силы* и заключающееся въ томъ, что *работа равна приращенію живой силы*

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

гдѣ v и v_0 скорости въ какіе либо два момента.

§ 25. Уравненіе живой силы въ движеніи точки, падающей въ пустотѣ. Пусть v_1 и v_0 суть скорости въ моменты t_1 и t_0 (то есть въ моменты, до которыхъ протекло время t_1 и t_0 отъ начала времени). Приращеніе живой силы за разсматриваемый промежутокъ времени $t_1 - t_0$ будетъ:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Работа, совершенная силою тяжести за это время будетъ:

$$T = mg\,(x_1 - x_0).$$

Для сравненія этихъ величинъ выразимъ и ту и другую чрезъ t. На основаніи (28) имѣемъ:

$$v_1 = gt_1$$
$$v_0 = gt_0$$

Слѣдовательно:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mg^2}{2}(t_1^2 - t_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

На основаніи (30) имѣемъ:

$$x_1 = \frac{gt_1^2}{2},$$

$$x_0 = \frac{gt_0^2}{2}.$$

Слѣдовательно: $$T = mg(x_1 - x_0) = \frac{mg^2}{2}(t_1^2 - t_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Сравнивая (37) съ (36) видимъ, что:

$$T = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Уравненіе живой силы оправдывается въ движеніи падающей точки.

§ 26. Нѣкоторыя поясненія понятія «работа». Впослѣдствіи (§ 139) мы увидимъ, что уравненіе живыхъ силъ оправдывается для всѣхъ силъ природы. Во многихъ случаяхъ недоразумѣнія, возникающія по поводу понятія «работа», устраняются, если припомнимъ, что работа равна приращенію живою силы.

Такъ напримѣръ опредѣленіе килограмметра, какъ работы производимой при поднятіи одного килограмма на одинъ метръ, встрѣчающееся во многихъ руководствахъ, не совсѣмъ точно. Дѣйствительно, работа силы, поднимающей одинъ килограммъ на высоту одного метра зависитъ еще отъ того, съ какимъ ускореніемъ она его поднимаетъ. При такомъ поднятіи, на массу *килограммъ* дѣйствуютъ двѣ силы: поднимающая P и сила тяжести mg. Если эти силы равны, то поднимаемая масса будетъ (согласно 1-му закону Ньютона) двигаться равномѣрно подъ вліяніемъ сообщенной начальной скорости, такъ какъ равныя и противоположныя силы P и mg взаимно уничтожаются. Въ этомъ случаѣ работа поднимающей силы въ точности равна *отрицательной* работѣ силы тяжести и равна, слѣдовательно, той положительной работѣ тяжести (вѣса 1 килограмма), которую тяжесть производитъ при паденіи массы одного килограмма, происходящемъ на протяженіи 1-го метра высоты, и потому въ точности равна килограмметру. Но если сила P больше тяжести одного килограмма, то поднимаемая масса будетъ подниматься съ ускореніемъ и работа при поднятіи одного килограмма на 1 метръ равная $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ будетъ зависѣть отъ того, до какой скорости v_1 доведено будетъ поднимаемое тѣло по проходѣ одного метра.

Въ случаѣ равномѣрнаго движенія поднятія $v_1 = v_0$, и работа совокупности двухъ равныхъ и противоположныхъ силъ P и mg равна нулю, ибо

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = 0.$$

Въ случаѣ неравномѣрнаго поднятія $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ не равна нулю: работа силы P не равна работѣ силы mg и слѣдовательно не равна килограмметру.

Иногда силу mg разсматриваютъ какъ сопротивленіе, *побѣждаемое* силою P. Но всякое сопротивленіе есть тоже сила и несравненно удобнѣе вводить всѣ сопротивленія какъ силы,—тогда будемъ всегда приводить движеніе къ движенію свободной точки и не будемъ вводить никакихъ выраженій, страдающихъ неопредѣленностью. Тогда: работа совокупности всѣхъ дѣйствующихъ на точку силъ (въ томъ числѣ и сопротивленій) *при равномѣрно-прямолинейномъ движеніи точки* всегда равна нулю по 1-му закону Ньютона.

§ 27. Мощность. Не надо смѣшивать съ понятіемъ «работа» понятіе «мощность». Слабый двигатель можетъ произвести въ теченіи большого времени такую же большую работу, какъ и сильный двигатель въ теченіи малаго времени. Величина, опредѣляющая способность двигателя производить данную работу *въ теченіи даннаго времени*, называется мощностью. *Мощность* равна *работѣ производимой двигателемъ въ единицу времени.*

Въ практической механикѣ за единицу мощности принимается *лошадиная сила* или *паровая лошадь* обозначаемая такъ HP, отъ англійскаго слова Horse Power = лошадиная сила.

$$HP = 75 \text{ килограмметровъ въ секунду} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Обыкновенная крестьянская лошадь, при 8 часовой работѣ въ сутки, даетъ нѣсколько меньше, именно около 60 килограмметровъ въ секунду. Средней силы человѣкъ, при работѣ по 8 часовъ въ сутки, можетъ дать около $\frac{1}{7}$ HP.

«Паровая машина въ 5 паровыхъ лошадей» (или въ 5 лошадиныхъ силъ) значитъ: паровая машина, способная производить работу по 5 . 75, то есть по 375 килограмметровъ въ секунду, то есть можетъ поднять равномѣрнымъ движеніемъ *въ теченіе одной секунды* или 375 килограммъ на высоту 1 метра, или 25 килограммъ на высоту 15 метровъ, и такъ далѣе, — вообще можетъ *въ теченіи секунды* произвести работу равную поднятію такого вѣса p на такую высоту h, что

$$p \, . \, h = 375 \text{ килограмметровъ}.$$

Такая машина можетъ *въ теченіи n секундъ* произвести n . 375 килограмметровъ работы.

Въ $C.G.S$ системѣ единицъ за единицу мощности принимается мощность машины, способной произвести одинъ *эргъ* работы въ секунду.

Въ физикѣ, особенно въ электротехникѣ, весьма распространена особая единица мощности *уаттъ* (или ватгъ). *Уаттъ это мощность, дающая 1 джауль въ секунду.*

Уаттъ = джауль въ секунду = 10^7 эрговъ въ секунду = 0,102 килограмметра въ секунду.

Слѣдовательно: уаттъ $= \frac{1}{736}$ паровой лошади . . . . (39)

§ 28. Движеніе точки брошенной вверхъ въ пустотѣ. Приложимъ сказанное въ предыдущихъ параграфахъ къ весьма интересному примѣру: изслѣдуемъ движеніе точки брошенной вертикально вверхъ съ данною скоростью v_0 и находящейся подъ дѣйствіемъ земного тяготѣнія. Задача эта выражается болѣе точно въ слѣдующихъ словахъ: по данному ускоренію g земного тяготѣнія и по данной скорости v_0, направленной вертикально вверхъ, найти движеніе точки, полагая что m есть масса точки и что точка брошена въ моментъ $t = 0$, отъ котораго считаемъ время.

Примемъ за начало координатъ ту точку пространства, изъ которой выбрасывается точка m. Возьмемъ ось z по вертикали вверхъ. Сила тяжести въ настоящемъ случаѣ, на основаніи (10), равна

$$Z = -mg \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

Она дѣйствуетъ по вертикали, но въ сторону отрицательныхъ z. Никакія другія силы на точку m не дѣйствуютъ.

Поэтому точка m не сойдетъ съ оси z. На основаніи (12) имѣемъ

$$Z = -mg = m\frac{dv}{dt}$$

или

$$-g = \frac{dv}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41)$$

или

$$dv = -g\,dt.$$

Откуда

$$\int dv = -g\int dt$$

или

$$v = -gt + c_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

гдѣ c_1 постоянное интеграціи. Опредѣляемъ его изъ начальныхъ данныхъ: при $t = 0$ скорость $v = v_0$; слѣдовательно въ начальный моментъ (42) имѣетъ видъ:

$$v_0 = 0 + c_1.$$

Откуда

$$c_1 = v_0.$$

Поэтому въ теченіи движенія (42) имѣетъ видъ:

$$v = -gt + v_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

Но по (6) скорость равна производной отъ пути по времени. Слѣдовательно:

$$v = -gt + v_0 = \frac{dz}{dt}$$

или

$$dz = -gt\,dt + v_0\,dt$$

Интегрируя находимъ

$$\int dz = -g \int t\,dt + v_0 \int dt$$

то есть:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + c_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

гдѣ c_2 постоянная интеграціи. Опредѣляемъ ее по начальнымъ даннымъ: при $t = 0$ по условію $z = 0$. Слѣдовательно при $t = 0$ уравненіе (44) даетъ:

$$c_2 = 0.$$

Поэтому, въ теченіи движенія, (44) имѣетъ видъ:

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Вотъ какой видъ имѣетъ уравненіе изслѣдуемаго движенія.

Опредѣлимъ наибольшую высоту, до которой поднимается точка. Иначе говоря, найдемъ максимумъ для z. Для этого приравняемъ нулю производную по t отъ правой части уравненія (45). Получимъ:

$$v_0 - gt = 0,$$

откуда: $t = \frac{v_0}{g}$ = времени поднятія до наибольшей высоты.

Вставимъ эту величину $\frac{v_0}{g}$ вмѣсто t въ (45), получимъ:

$$z \text{ maxim.} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{{v_0}^2}{2g}.$$

Назовемъ наибольшую высоту поднятія буквою h. Тогда:

$$z \text{ maxim.} = h = \frac{{v_0}^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Формула (46) опредѣляетъ высоту наибольшаго поднятія брошенной точки по данной начальной скорости v_0.

Формула (47) опредѣляетъ ту начальную скорость, съ которою надо бросить вертикально вверхъ точку въ безвоздушномъ пространствѣ, чтобы она поднялась на высоту h.

Обѣ эти формулы имѣютъ весьма важное значеніе въ механикѣ. Уравненіе (47), въ примѣненіи его къ движенію жидкости, называется формулою Торичелли.

При большихъ начальныхъ скоростяхъ величины, вычисляемыя по формуламъ (46) и (47), значительно разнятся отъ тѣхъ, какія получаются для движенія точки въ воздухѣ, который оказываетъ сопротивленіе движенію; но при небольшихъ начальныхъ скоростяхъ эти величины мало отличаются отъ получаемыхъ для движенія въ воздухѣ.

§ 29. Потенціальная функція. Для всѣхъ силъ природы существуютъ такія функціи U (координатъ движущейся точки), производныя которыхъ по этимъ координатамъ равны проложеніямъ силы на оси координатъ, такъ что:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Такая функцію U называется *потенціальною* или *силовою*. Напримѣръ, въ движеніи точки брошенной вверхъ (§ 28), потенціальная функція равна

$$-mgz = U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

и проложенія силы тяготѣнія на оси равны:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -mg \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

§ 30. Законъ сохраненія живой силы. Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда точка свободна (когда ея движеніе ничѣмъ не стѣснено) или когда она принуждена двигаться по поверхности или линіи не измѣняющимъ своей формы,—существуетъ законъ: *живая сила равна суммѣ потенціальной функціи и постояннаго количества*:

$$\frac{mv^2}{2} = U + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

Законъ этотъ провѣряется на всѣхъ существующихъ наблюденіяхъ.

Такъ какъ U есть функція только координатъ x, y, z точки, то (51) показываетъ, что при возвращеніи въ прежнее положеніе живая сила пріобрѣтаетъ величину, которую имѣла при предыдущемъ прохожденіи черезъ это положеніе. Поэтому законъ, выражаемый формулою (51), называется закономъ сохраненія живой силы.

Впослѣдствіи мы подробнѣе остановимся на этомъ законѣ, а пока про-

вѣримъ его существованіе на разобранномъ въ § 28 движеніи точки брошенной вверхъ.

Въ этомъ движеніи какъ мы указали при формулѣ (49):

$$U = -mgz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Выразимъ U чрезъ время, подставляя въ (52) вмѣсто z его выраженіе чрезъ t, данное формулою (45). Получимъ:

$$U = -mg\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right) = -mg\, v_0 t + \frac{mg^2 t^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Выразимъ теперь живую силу $\frac{mv^2}{2}$ чрезъ t пользуясь формулою (43). Получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_0 - gt)^2 = \frac{mv_0^2}{2} - mv_0 gt + \frac{mg^2 t^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Сравнивая (54) съ (53) получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = U + \frac{mv_0^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Но при данной начальной скорости v_0 послѣдній членъ уравненія (55) постояненъ: слѣдовательно (55) имѣетъ видъ (51). Законъ сохраненія живой силы оправдывается въ разсматриваемомъ движеніи.

Вставляя въ (55) вмѣсто U его величину $-mgz$, получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Эта формула (56) ясно показываетъ, что всякій разъ какъ координата z пріобрѣтаетъ ту же величину, какую имѣла прежде, такъ и живая сила $\frac{mv^2}{2}$ пріобрѣтаетъ прежнюю величину. Когда, напримѣръ, при восходящемъ движеніи брошенная точка была на высотѣ $Z = H$, то по (56) живая сила была

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgH.$$

Когда, опускаясь внизъ, точка придетъ опять на высоту H, то живая сила, согласна (56), опять сдѣлается равною $\frac{mv_0^2}{2} - mgH$.

§ 31. Законъ сохраненія энергіи. Живую силу $\frac{mv^2}{2}$ называютъ также *кинетическою энергіею* движущейся точки.

Величина же

$$C_1 - U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

гдѣ C_1 есть нѣкоторое постоянное, называется *потенціальною энергіею* движущейся точки.

Сумма энергіи потенціальной и кинетической называется *полною энергіею* движущейся точки.

Опредѣлимъ такое постоянное C_2, чтобы

$$C_2 - C_1 = C$$

Тогда изъ (51) получимъ

$$\frac{mv^2}{2} = U + C_2 - C_1$$

или

$$\frac{mv^2}{2} + (C_1 - U) = C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Это уравненіе согласно съ опредѣленіемъ величины (57) показываетъ, что *сумма кинетической и потенціальной энергіи движущейся точки есть величина постоянная.* Другими словами: *полная энергіи движущейся точки есть величина постоянная.*

Въ этомъ состоитъ самое простое выраженіе знаменитаго закона сохраненія энергіи, о которомъ подробнѣе будетъ сказано впослѣдствіи.

По тому—какъ мы его вывели—видно, что законъ сохраненія энергіи тождественъ съ закономъ сохраненія живой силы.

Уравненіе (58) показываетъ, что съ увеличеніемъ кинетической энергіи потенціальная уменьшается (и обратно), но измѣненіе обѣихъ энергій происходитъ такъ, что сумма ихъ остается постоянною.

Въ движеніи точки брошенной вверхъ, напримѣръ, съ поднятіемъ точки уменьшается v, слѣдовательно уменьшается кинетическая энергія $\frac{mv^2}{2}$, но зато потенціальная энергія $(C_1 - U)$, равная $(C_1 + mgz)$, увеличивается. Въ нисходящемъ движеніи дѣло происходитъ обратно. Но въ каждый моментъ полная энергія, равная суммѣ энергій кинетической и потенціальной, имѣетъ одну и ту же величину.

Впослѣдствіи мы увидимъ, что и уравненіе живыхъ силъ представляетъ собою тотъ же законъ сохраненія энергіи, выраженный только въ другой формѣ.

§ 32. Гармоническое прямолинейное движеніе. Чрезвычайно важное значеніе имѣетъ прямолинейное движеніе, производимое точкою подъ дѣйствіемъ притяженія къ неподвижной точкѣ пропорціональнаго разстоянію движущейся точки отъ неподвижной притягивающей точки (центра притяженія). Это движеніе называется *прямолинейнымъ гармоническимъ.* Достаточно сказать, что въ такомъ движеніи находится частица свѣтоваго эфира, конецъ камертона, точка колеблющейся струны, чтобы дать понять какое важное значеніе имѣетъ это движеніе въ физикѣ. Изслѣдуемъ это движеніе.

Пусть h есть притяженіе оказываемое центромъ притяженія на разстояніи равномъ единицѣ. На разстояніи x притяженіе будетъ hx. Примемъ центръ притяженія за начало координатъ; возьмемъ ось x по прямой, соединяющей въ какой-либо моментъ центръ притяженія съ двигающеюся точкою. Когда x положительно, то притяженіе направлено противо-

положно направленію возрастанія иксовъ. Слѣдовательно проложенія дѣйсвующей силы на оси будутъ:

$$X = - hx$$
$$Y = 0$$
$$Z = 0.$$

Если точка не получаетъ никакой начальной скорости, а прямо изъ состоянія покоя подвергается притяженію къ началу координатъ, то движеніе ея будетъ прямолинейнымъ и можно ограничиться разсмотрѣніемъ только 1-го изъ только-что написанныхъ уравненій. Согласно (11) дифференціальное уравненіе движенія будетъ таково:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = - hx = X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Положимъ, для краткости: $\frac{h}{m} = n^2$ . . . . (60)

Тогда (59) приметъ видъ: $\frac{d^2x}{dt^2} = - n^2x$ . . . . (61)

Общій интегралъ этого уравненія будетъ:

$$x = A\cos(nt) + B\sin(nt) \quad \ldots\ldots\ldots (62)$$

Интегрированіе производится по теоріи линейныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами *). Но, и не будучи знакомымъ съ этою теоріею, можно убѣдиться въ справедливости формулы (62) дифференцируя ее два раза и приходя такимъ образомъ обратно къ (61).

Изъ (62), согласно съ (6), имѣемъ:

$$v = \frac{dx}{dt} = - nA\sin(nt) + nB\cos(nt) \quad \ldots\ldots (63)$$

Положимъ, что въ началѣ движенія, при $t = 0$, притягиваемая точка находилась на разстояніи x_0 отъ начала координатъ и скорость ея была равна нулю. Слѣдовательно:

$$x_0 = A\cos(0) + B\sin(0) = A$$
$$B = 0 \text{ согласно сь (63)}$$

и уравненія (62) и (63) имѣютъ видъ:

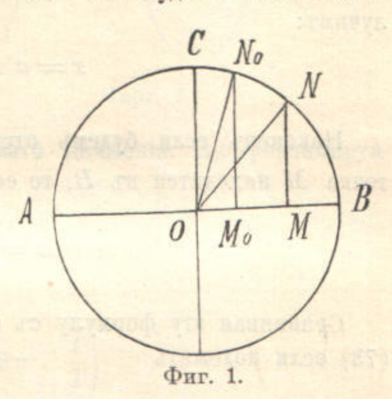
$$x = x_0\cos(nt) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$
$$v = - nx_0\sin(nt) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

Формула (65) можетъ быть получена также изъ (64) простымъ дифференцированіемъ. Уравненіе движенія выражается формулою (64).

Разсмотримъ, для уясненія гармоническаго движенія, довольно простую задачу, приводящую къ тому же движенію.

*) Штурмъ. Анализъ, § 584.

§ 33. Геометрическое представленіе прямолинейнаго гармоническаго движенія. Представимъ себѣ (фиг. 1), что нѣкоторая точка N движется по данной окружности, описанной радіусомъ a изъ центра O, равномѣрно, т. е. такъ, что въ равныя времена проходитъ равныя дуги по направленію движенія стрѣлки часовъ. Изслѣдуемъ движеніе точки M, служащей основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ N на нѣкоторый діаметръ данной окружности. Не трудно видѣть, что, при равномѣрномъ движеніи точки N по окружности, точка M будетъ двигаться взадъ и впередъ по діаметру. Изучимъ подробнѣе это движеніе точки M. Будемъ отсчитывать время отъ того момента, когда точка M проходитъ чрезъ O, двигаясь въ направленіи OB. Обозначимъ чрезъ β тотъ уголъ, который составляется радіусомъ ON съ перпендикуляромъ OC возставленнымъ изъ O къ діаметру AB.



Фиг. 1.

Время T, въ теченіи котораго точка N описываетъ одинъ разъ полную окружность, называется *періодомъ* Слѣдовательно въ теченіи одного періода точка N проходитъ путь $2\pi a$ равный длинѣ данной окружности.

Обозначая чрезъ x разстояніе OM точки M отъ центра, имѣемъ изъ треугольника OMN:

$$x = a \,.\, sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Въ теченіи времени t точка N проходитъ дугу $a\beta$; въ теченіи времени T она проходитъ окружность $2\pi a$. Слѣдовательно, при равномѣрномъ движеніи точки N по окружности

$$\frac{t}{T} = \frac{a\beta}{2\pi a} = \frac{\beta}{2\pi} \quad \ldots\ldots\ldots (67)$$

откуда:

$$\beta = 2\pi \,.\, \frac{t}{T} \quad \ldots\ldots\ldots (68)$$

Вставляя эту величину β въ (66), получимъ:

$$x = a \,.\, sin\left(2\pi \,.\, \frac{t}{T}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (69)$$

Вотъ каково уравненіе движенія точки M. Въ немъ два перемѣнныхъ x и t, періодъ же T есть величина постоянная для даннаго движенія.

Если будемъ отсчитывать время отъ того момента, когда точка M находится въ какомъ-нибудь положеніи M_0 (фиг. 1), то получимъ слѣдующее. Обозначимъ уголъ CON_0 чрезъ β_0, уголъ CON чрезъ β, уголъ [illegible] чрезъ β', полагая, что въ теченіи времени t точка N проходитъ

дугу N_0N. Тогда вмѣсто (67) будемъ имѣть:

$$\frac{\beta_1}{2\pi} = \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Изъ чертежа видно, что $\beta = \beta_1 + \beta_0$.

Вставляя эту величину въ (66) получимъ:

$$x = a\, sin\,(\beta_1 + \beta_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Вставляя сюда, вмѣсто β', его величину опредѣленную изъ (70), получимъ:

$$x = a\,.\,sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_0\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Наконецъ если будемъ отсчитывать время отъ того момента, когда точка M находится въ B, то есть, когда $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, то изъ (72) получимъ:

$$x = a\,.\,cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Сравнивая эту формулу съ (64), видимъ, что (64) принимаетъ видъ (73) если положить

$$x_0 = a$$

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Слѣдовательно точка, совершающая гармоническое движеніе подъ дѣйствіемъ притяженія къ притягивающему центру, пропорціональнаго разстоянію отъ этого центра, движется такъ, какъ точка M — проекція на діаметръ точки N равномѣрно движущейся по окружности.

Обыкновенно время отсчитываютъ въ гармоническомъ движеніи отъ прохожденія точки чрезъ притягивающій центръ и потому движеніе выражаютъ уравненіемъ (69).

Крайнее разстояніе a, на которое удаляется точка M отъ центра, называется *амплитудою* гармоническаго движенія.

Время T полнаго колебанія называется (какъ мы уже сказали) *періодомъ*.

Уголъ β называется *фазою*.

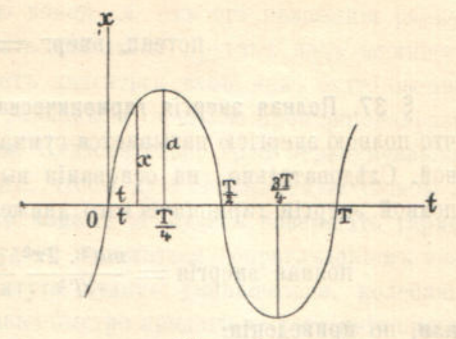
Уголъ β_0 называется *начальною фазою*.

§ 34. Графическое изображеніе прямолинейно-гармоническаго движенія. Пользуясь уравненіемъ (69).

$$x = a\,.\,sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

гармоническаго движенія возьмемъ систему прямоугольныхъ координатъ и примемъ время t за абсциссы, а разстоянія x за ординаты кривой,

выражаемой уравненіемъ (69). Получимъ синусоиду (фиг. 2), которая наглядно изображаетъ законы гармоническаго движенія. Необходимо при этомъ имѣть въ виду, что эта синусоида не представляетъ собою траекторіи гармоническаго движенія, которая прямолинейна. Синусоида эта показываетъ только, какъ, съ теченіемъ времени измѣняется разстояніе точки, отъ притягивающаго центра.



Черт. 2.

35. Кинетическая энергія гармоническаго движенія. Дифференцируя уравненіе (69) получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a \cdot 2\pi}{T} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

Слѣдовательно [см. (6)] скорость будетъ:

$$v = \frac{a \cdot 2\pi}{T} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (75)$$

Кинетическая энергія или живая сила будетъ:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot a^2 \cdot 2\pi^2}{T^2} \cdot \cos^2\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) = \frac{ma^2 2\pi^2}{T^2} - \frac{ma^2 2\pi^2}{T^2} \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right) =$$

$$= \frac{ma^2 2\pi^2}{T^2} - \frac{m \cdot 2\pi^2}{T^2} x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (76)$$

§ 36. Потенціальная энергія гармоническаго движенія. Согласно (59)

$$X = -hx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (77)$$

Потенціальная функція будетъ (согласно § 29) такова, что производная ея по x равна X. Согласно (77) производная потенціальной функціи по x должна быть равна $-hx$. Слѣдовательно потенціальная функція будетъ такова:

$$U = -\int hx\,dx = -\frac{hx^2}{2} + C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (78)$$

гдѣ C постоянное интеграціи. Но при $x = o$, согласно съ (77) проложеніе $X = o$. Слѣдовательно, при $x = o$ потенціальная функція $U = o$. Слѣдовательно на основаніи (78), постоянное $C = o$.

Изъ (60) имѣемъ: $h = mn^2$. Вставляя сюда вмѣсто h его величину изъ (73), получимъ $h = \frac{m4\pi^2}{T^2}$. Вставляя эту величину въ (78), въ которомъ $C = o$, получимъ:

$$U = -\frac{m \cdot 4\pi^2}{2T^2} x^2.$$

Слѣдовательно потенціальная энергія, на основаніи (57), будетъ:

$$\text{потенц. энерг.} = C_1 + \frac{2m\pi^2 x^2}{T^2}.$$

§ 37. **Полная энергія гармоническаго движенія.** Въ § 31-мъ мы видѣли, что полною энергіею называется сумма энергій кинетической и потенціальной. Слѣдовательно, на основаніи выводовъ §§ 35 и 36, получимъ для полной энергіи гармоническаго движенія величину:

$$\text{полная энергія} = \frac{ma^2 \cdot 2\pi^2}{T^2} - \frac{2m\pi^2}{T^2}x^2 + \frac{2m\pi^2}{T^2}x^2 + C_1$$

или, по приведеніи:

$$\text{полная энергія} = \frac{ma^2 \cdot 2\pi^2}{T^2} + C_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Впослѣдствіи мы увидимъ, что полною энергіею измѣряется способность данныхъ силъ въ данной системѣ производить работу: чѣмъ большая работа можетъ быть произведена силами дѣйствующими въ данной системѣ точекъ, тѣмъ больше полная энергія системы.

Изслѣдуя полную энергію гармоническаго движенія, происходящаго въ системѣ состоящей изъ движущейся точки и изъ центра притяженія, замѣтимъ, что при амплитудѣ равной нулю, то есть при $a = o$ никакой работы не можетъ быть произведено силами системы, потому что въ этомъ случаѣ движущаяся точка находится въ центрѣ притяженія и уже никуда не притягивается; предполагается также, что она не подвержена никакимъ внѣшнимъ вліяніямъ, то есть на нее не дѣйствуютъ никакія силы кромѣ притяженія къ центру и она не получаетъ никакихъ начальныхъ скоростей. Поэтому, при $a = o$, полная энергія $= o$. Слѣдовательно $C_1 = o$, и окончательно получается для полной энергіи гармоническаго движенія такое выраженіе:

$$\text{полная энергія} = \frac{2ma^2\pi^2}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

—величина, какъ и слѣдовало ожидать, постоянная для даннаго движенія, то есть при данномъ a. Это надо понимать такъ: если мы отведемъ точку отъ центра притяженія на разстояніе a и затѣмъ предоставимъ ей двигаться подъ вліяніемъ притяженія этого центра, то полная энергія ея будетъ величина постоянная: въ каждый моментъ она будетъ имѣть одну и ту же величину. Чѣмъ дальше точка находится въ такомъ движеніи отъ центра (чѣмъ больше абсолютная величина x) тѣмъ больше ея потенціальная энергія $\frac{2m\pi^2x^2}{T^2}$ и тѣмъ меньше ея кинетическая энергія $\frac{2m\pi^2a^2}{T^2} - \frac{2m\pi^2x^2}{T^2}$. Но сумма этихъ энергій постоянно равна $\frac{2m\pi^2a^2}{T^2}$.

§ 38. **Движеніе конца гибкаго прутика.** Если зажать конецъ тонкаго и гибкаго (напримѣръ стального) прутика въ тискахъ, а затѣмъ отклонить свободный конецъ A прутика отъ положенія равновѣсія, то извѣстно, что упру-

гія силы прутика, стремящіяся привести его опять въ положеніе равновѣсія, пропорціональны разстоянію конца A отъ его положенія равновѣсія. Поэтому если затѣмъ оставить двигаться прутикъ подъ вліяніемъ силъ упругости, то конецъ A будетъ двигаться такъ, какъ будто бы онъ притягивался къ своему положенію равновѣсія съ силою пропорціональною его разстоянію отъ этого положенія. Слѣдовательно если первоначальное отклоненіе достаточно мало для того, чтобы дугу описываемую точкою A можно было принять за прямую, то конецъ A будетъ совершать гармоническое движеніе. Явленіе это будетъ искажаться сопротивленіемъ воздуха въ томъ смыслѣ, что амплитута будетъ уменьшаться, колебанія будутъ «затухать» и прутикъ довольно быстро придетъ въ состояніе покоя. Но всетаки его движеніе въ теченіи одного полнаго колебанія можно разсматривать какъ гармоническое.

ГЛАВА II.

Криволинейное движеніе точки.

§ 39. Уравненіе движенія точки. Траекторія. Если даны уравненія:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = F(t) \\ z = \varphi(t) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

въ которыхъ x, y, z суть координаты движущейся точки, а стоящія въ правыхъ частяхъ функціи даны явно, то движеніе точки вполнѣ опредѣлено этими уравненіями, потому что по нимъ мы знаемъ, гдѣ въ какое время находится точка, такъ какъ они даютъ ея координаты для каждаго задаваемаго значенія t.

Если мы исключимъ время t изъ этихъ уравненій, то получимъ два уравненія, въ которыхъ перемѣнными останутся только координаты x, y, z. Эти два уравненія представятъ собою кривую, служащую геометрическимъ мѣстомъ всѣхъ тѣхъ точекъ пространства, чрезъ которыя проходитъ движущаяся точка. Такая кривая (такой путь), проходимая точкою въ ея движеніи, называется *траекторіею* движущейся точки.

Примѣръ. Опредѣлить траекторію точки по уравненіямъ движенія:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos(\omega\,.\,t) \\ y = R\sin(\omega t) \\ z = o \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Возводя въ квадратъ и складывая первыя два изъ этихъ уравненій и принимая во вниманіе 3-е уравненіе получимъ такія уравненія траекторіи:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = o \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

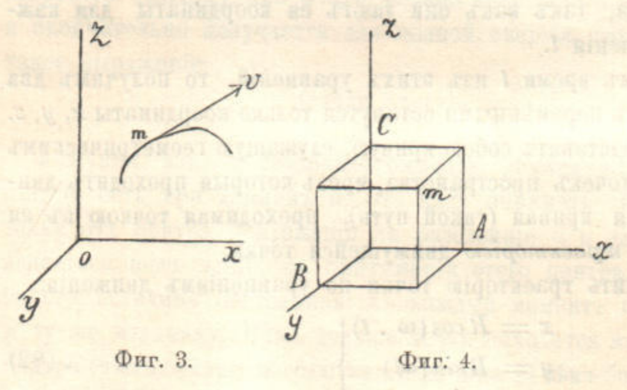
Изъ нихъ мы видимъ, что траекторія представляетъ собою окружность описанную радіусомъ R около начала координатъ въ плоскости (x, y). Данныя уравненія движенія (82) показываютъ, что, при $t = o$, должно быть $x = R$; $y = o$; $z = o$. Значитъ время считается отъ момента прохожденія точки чрезъ пересѣченіе круговой траекторіи съ положительною осью иксовъ. Изъ уравненій (82) видно еще, что уголъ, составляемый съ осью иксовъ радіусомъ, проведеннымъ въ движущуюся точку въ концѣ времени t, равенъ ωt. Слѣдовательно дуга, проходимая точкою въ теченіи времени t, равна $R\omega t$ — она пропорціональна времени; слѣдовательно въ равные промежутки времени точка проходитъ равныя дуги. Такое движеніе называется *равномѣрнымъ движеніемъ по окружности.*

§ 40. Скорость въ криволинейномъ движеніи точки. Пользуясь анализомъ безконечно малыхъ, мы принимаемъ безконечно малый элементъ ds траекторіи за прямолинейный и движеніе по этому элемену за равномѣрное. Прилагая къ такому движенію формулу (6), получимъ для скорости криволинейнаго движенія формулу:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (84)$$

Итакъ: *во всякомъ движеніи точки скорость равна первой производной отъ пути по времени.*

§ 41. Изображеніе скорости векторомъ. Скорость, которою обладаетъ движущаяся точка въ концѣ времени t изображаютъ, проводя касательную къ траекторіи въ той ея точкѣ, гдѣ въ этотъ моментъ находится движущаяся точка, и откладывая на этой касательной въ сторону движенія векторъ, длина котораго содержитъ столько единицъ длины, сколько скорость точки, соотвѣтствующая этому моменту, содержитъ единицъ скорости (фигура 3).



Фиг. 3. Фиг. 4.

§ 42. Проложенія скорости на оси координатъ. Уравненія движенія (81) можно разсматривать какъ три отдѣльныя уравненія движенія проложеній A, B и C движущейся точки на оси координатъ (фиг. 4). Именно: $x = f(t)$ уравненіе движеніе точки A; $y = F(t)$ уравненіе движенія точки B; $z = \varphi(t)$ уравненіе движенія точки C. Каждая изъ точекъ A, B, C совершаетъ прямолинейное движеніе по той оси координатъ, на которой она

находится. Примемъ такія обозначенія:

$$v_x = \text{скорость точки } A$$

$$v_y = \text{скорость точки } B$$

$$v_z = \text{скорость точки } C$$

(здѣсь v_x, напримѣръ, есть буква v со значкомъ x, а не произведеніе). Для прямолинейныхъ движеній эти скорости, по формулѣ (6) суть:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (85)$$

Эти уравненія выражаютъ, что при всякомъ движеніи точки скорости ея проложеній A, B, C равны первымъ производнымъ отъ соотвѣтственныхъ координатъ движущейся точки по времени.

§ 43. Теорема о скоростяхъ проложеній. Скорость v самой движущейся точки направлена по элементу ds траекторіи. Слѣдовательно проложенія этой скорости на оси координатъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} v \,.\, \cos(v,x) &= v \,.\, \cos(ds,x) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} = v_x \\ v \,.\, \cos(v,y) &= v \,.\, \cos(ds,y) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} = v_y \\ v \,.\, \cos(v,z) &= v \,.\, \cos(ds,z) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} = v_z \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (86)$$

Итакъ:

$$\left.\begin{aligned} v \,.\, \cos(v,x) &= v_x = \frac{dx}{dt} \\ v \,.\, \cos(v,y) &= v_y = \frac{dy}{dt} \\ v \,.\, \cos(v,z) &= v_z = \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (87)$$

Эти уравненія (87) выражаютъ слѣдующее: *Теорема: проложенія скорости движущейся точки равны скоростямъ проложеній этой точки,* то есть: проложенія скорости v точки m (фиг. 4) равны скоростямъ точекъ A, B, C.

И тѣ и другія равны первымъ производнымъ отъ соотвѣтственныхъ координатъ по времени, какъ это видно изъ (86).

§ 44. Опредѣленіе скорости движущейся точки по даннымъ уравненіямъ движенія. Возводя, почленно, уравненія (87) въ квадратъ и складывая,

получимъ:

$$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; (88)$$

Отсюда:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (89$$

Радикалъ этотъ всегда берется со знакомъ $+$. О направленіи же скорости скажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

Формула (89) даетъ возможность по даннымъ уравненіямъ движенія найти скорость v движущейся точки, потому что, дифференцируя уравненія по t найдемъ производныя $\frac{dx}{dt}$; $\frac{dy}{dt}$; $\frac{dz}{dt}$; вставляя же ихъ въ (89), найдемъ v.

Пояснимъ это на томъ же равномѣрномъ движеніи по окружности, которое намъ служило примѣромъ въ § 39.

Примѣръ. Найти скорость по уравненіямъ движенія (82)?

Дифференцируя эти уравненія по t, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -R \,.\, \omega \,.\, \sin(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} &= +R \,.\, \omega \,.\, \cos(\omega t) \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (90)$$

Вставляя въ (89) получимъ:

$$v = \sqrt{R^2\omega^2\,[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]} = R\omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; (91)$$

§ 44. Направленіе скорости въ криволинейномъ движеніи точки. Изъ (87) и (89) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(v, x) &= \frac{\frac{dx}{dt}}{v} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ \cos(v, y) &= \frac{\frac{dy}{dt}}{v} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ \cos(v, z) &= \frac{\frac{dz}{dt}}{v} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^9 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; . \; (92)$$

Эти формулы опредѣляютъ косинусы угловъ наклоненія скорости къ осямъ координатъ, которыми опредѣляется направленіе скорости.

Пояснимъ приложеніе этихъ формулъ на томъ же примѣрѣ равномѣрнаго движенія точки по окружности.

Примѣръ. Опредѣлить направленіе скорости по уравненіямъ движенія (82)?

Дифференцируя уравненія (82) по t получимъ выраженія (90); вставляя ихъ въ (92), получимъ:

$$cos\,(v, x) = \frac{-R\omega\,.\,sin\,(\omega t)}{R\omega} = -sin\,(\omega t)$$

$$cos\,(v, y) = \frac{+R\omega\,.\,cos\,(\omega t)}{R\omega} = +cos\,(\omega t)$$

$$cos\,(v, z) = 0$$

или

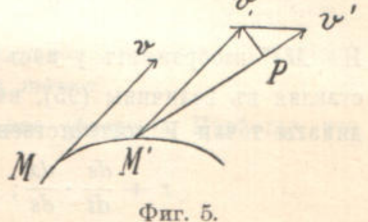
$$\left.\begin{aligned} cos\,(v, x) &= -sin\,(\omega t) \\ sin\,(v, x) &= cos\,(\omega t) \\ cos\,(v, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (93)$$

Припоминая, что

$$cos\,(90^\circ + \varphi) = -sin\,\varphi$$
$$sin\,(90^\circ + \varphi) = +cos\,\varphi$$

видимъ, что уравненіями (93) показывается перпендикулярность скорости v къ радіусу. Это впрочемъ ясно и само по себѣ, потому что скорость въ этомъ движеніи направлена по касательной къ окружности, а касательная къ окружности перпендикулярна къ радіусу.

§ 45. Ускореніе въ криволинейномъ движеніи точки. Положимъ, что кривая MM' (фиг. 5) представляетъ собою траекторію точки M; MV скорость въ концѣ времени t; $M'V'$ скорость въ концѣ времени $t + \Delta t$, когда точка приходитъ въ M'.



Фиг. 5.

Проведемъ $M'V_1$ равную и параллельную вектору MV. Соединимъ V_1 съ V'.

Векторъ V_1V' называется *полнымъ геометрическимъ приращеніемъ скорости.*

Отложимъ на $M'V'$ отъ точки M' длину $M'P$ равную скорости MV. Векторъ PV' называется *приращеніемъ скорости по величинѣ.* Векторъ V_1P называется *приращеніемъ скорости по направленію.* Чѣмъ менѣе Δt, тѣмъ болѣе уголъ V_1PV' стремится приблизиться къ прямому. Изъ прямоугольнаго треугольника V_1PV' имѣемъ:

$$V_1V' = \sqrt{(PV')^2 + (V_1P)^2}$$

то есть: *полное* геометрическое приращеніе скорости равно *геометриче-*

ской суммѣ приращенія скорости по *величинѣ* и приращенія скорости по *направленію.*

Предѣлъ

$$\lim_{\Delta t=0}\left(\frac{V_1V'}{\Delta t}\right)$$

отношенія полнаго геометрическаго приращенія скорости къ Δt называется *ускореніемъ* въ криволинейномъ движеніи. Итакъ:

$$\text{ускореніе} = \lim_{\Delta t=0}\left(\frac{V_1V'}{\Delta t}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (94)$$

Это есть то самое, что Ньютонъ во второмъ основномъ законѣ механики называетъ измѣненіемъ движенія.

По мѣрѣ приближенія Δt къ нулю (если разсматриваемъ все меньшій и меньшій путь MM') разсматриваемъ точку M' все ближе и ближе къ точкѣ M. Вмѣстѣ съ этимъ полное геометрическое приращеніе V_1V' скорости стремится къ опредѣленному направленію, которое и принимается за *направленіе ускоренія.* Ускореніе изображается векторомъ, выходящимъ изъ точки M, имѣющимъ сказанное предѣльное направленіе и длину равную

$$\lim_{\Delta t=0}\left(\frac{V_1V'}{\Delta t}\right).$$

§ 46. Теорема о проложеніяхъ ускоренія. Обозначимъ чрезъ x, y, z координаты движущейся точки M. Припоминая, что скорость MV направлена по элементу ds траекторіи и что косинусы угловъ, составляемыхъ элементомъ кривой съ осями координатъ, соотвѣтственно равны:

$$\frac{dx}{ds};\ \frac{dy}{ds};\ \frac{dz}{ds}$$

заключаемъ, что координаты конца V скорости будутъ:

$$x + MV\cdot\frac{dx}{ds};\ y + MV\cdot\frac{dy}{ds};\ z + MV\cdot\frac{dz}{ds} \ . \ . \ . \ . \ (95)$$

Но MV изображаетъ у насъ скорость, которая по (84) равна $\frac{ds}{dt}$. Подставляя въ величины (95), вмѣсто MV, эту скорость, найдемъ, что координаты точки V соотвѣтственно равны:

$$x + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{ds};\ \ y + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{ds};\ \ z + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dz}{ds}$$

или

$$x + \frac{dx}{dt};\ \ y + \frac{dy}{dt};\ \ z + \frac{dz}{dt} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (96)$$

Координаты точки V_1, вслѣдствіе равности и параллельности векторовъ MV и $M'V_1$, будутъ равны координатамъ точки V, приращеннымъ на dx, dy, dz, то есть будутъ равны:

$$x + \frac{dx}{dt} + dx;\ \ y + \frac{dy}{dt} + dy;\ \ z + \frac{dz}{dt} \ . \ . \ . \ . \ . \ (97)$$

Координаты точки V' равны координатамъ точки V, приращеннымъ на дифференціалы этихъ координатъ, потому что V' есть та самая точка, въ которую приходитъ V, когда t обращается въ $t + dt$. Итакъ, координаты точки V' суть:

$$\left.\begin{aligned} & x + \frac{dx}{dt} + dx + d\,\frac{dx}{dt} \\ & y + \frac{dy}{dt} + dy + d\,\frac{dy}{dt} \\ & z + \frac{dz}{dt} + dz + d\,\frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (98)$$

Но проложенія вектора V_1V' на оси координатъ должны быть равны разностямъ соотвѣтственныхъ координатъ его концовъ. Мы получимъ эти проложенія, вычитая (97) изъ (98). Слѣдовательно проложенія вектора V_1V' на оси координатъ будутъ:

$$d\,\frac{dx}{dt};\quad d\,\frac{dy}{dt};\quad d\,\frac{dz}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,dt;\quad \frac{d^2y}{dt^2}\,dt;\quad \frac{d^2z}{dt^2}\,dt \quad \dots\dots\dots (99)$$

Таковы проложенія полнаго геометрическаго приращенія скорости на оси координатъ. Дѣля ихъ на dt, получимъ согласно опредѣленію (94) проложенія ускоренія на оси координатъ. Итакъ, проложенія ускоренія на оси координатъ соотвѣтственно равны:

$$\frac{d^2x}{dt^2};\ \frac{d^2y}{dt^2};\ \frac{d^2z}{dt^2} \dots\dots\dots (100)$$

Но эти величины представляютъ собою, на основаніи (9), ускоренія проложеній A, B, C (фиг. 4) движущейся точки на оси координатъ. Такимъ образомъ мы получили слѣдующее: *Теорема: проложенія ускореній равны ускореніямъ проложеній движущейся точки.*

§ 47. Центростремительное и тангенціальное ускоренія. Извѣстно, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\,\dfrac{e}{dt}}{dt}.$$

Помножая и дѣля на ds стоящую подъ знакомъ d часть числителя дроби, стоящей въ правой части этого равенства и самую дробь, получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt}\right)}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

Это можно, обозначая скорость чрезъ v, написать еще слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\left(\left(\frac{dx}{ds}\right) . v\right)}{ds} . v.$$

Производя въ дѣйствительности указанное здѣсь дифференцированіе произведенія $\frac{dx}{ds} . v$ по s, получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{ds} . \frac{dv}{ds} . v + \frac{d^2x}{ds^2} . v^2$$

или, переставляя множители и измѣняя видъ одного изъ нихъ помноженіемъ и дѣленіемъ на dt и замѣною v чрезъ $\frac{ds}{dt}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{ds} . \frac{dv}{dt} . \frac{dt}{ds} . \frac{ds}{dt} + \frac{d^2x}{ds^2} . v^2$$

или

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{dx}{ds} . \frac{dv}{dt} + \frac{d^2x}{ds^2} . v^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (101)$$

Припомнимъ, что косинусы угловъ α, β, γ составляемыхъ элементомъ ds съ осями координатъ выражаются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (102)$$

и что косинусы λ, μ, ν угловъ, составляемыхъ радіусомъ кривизны ρ съ осями координатъ выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \rho . \frac{d^2x}{ds^2} \\ \cos\mu &= \rho . \frac{d^2y}{ds^2} \\ \cos\nu &= \rho . \frac{d^2z}{ds^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (103)$$

Вставимъ въ (101) вмѣсто $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ величины опредѣляемыя изъ (102) и (103),

получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} . \cos\alpha + v^2 . \frac{\cos\lambda}{\rho}.$$

Подобныя же формулы можно получить для $\frac{d^2y}{dt^2}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$. Сопоставляя эти формулы вмѣстѣ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} . \cos\alpha + v^2 . \frac{\cos\lambda}{\rho} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} . \cos\beta + v^2 . \frac{\cos\mu}{\rho} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} . \cos\gamma + v^2 . \frac{\cos\nu}{\rho} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (104)$$

Эти формулы показываютъ, что полное ускореніе есть геометрическая сумма двухъ векторовъ $\frac{dv}{dt}$ направленнаго по касательной и $\frac{v^2}{\rho}$ направленнаго по нормали. Эти векторы носятъ такія названія:

$$\frac{dv}{dt} = \textit{тангенціальное уравненіе} \quad \ldots\ldots\ldots (105)$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \textit{нормальное}\ \text{или}\ \textit{центростремительное ускореніе} \quad \ldots (106)$$

Называя буквою j полное ускореніе и припоминая, что, какъ мы это сейчасъ видѣли, оно представляетъ собою геометрическую сумму ускореній тангенціальнаго и нормальнаго, выраженныхъ формулали (105) и (106) заключаемъ, что:

$$j = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (107)$$

§ 48. Опредѣленіе ускоренія по даннымъ уравненіямъ движенія. По даннымъ уравненіямъ движенія:

$$\left.\begin{aligned} x &= f\,(t) \\ y &= F(t) \\ z &= \varphi\,(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (81)$$

легко опредѣлить двукратнымъ дифференцированіемъ вторыя производныя отъ координатъ по времени:

$$\frac{d^2x}{dt^2};\ \frac{d^2y}{dt^2};\ \frac{d^2z}{dt^2},$$

которыя суть ускоренія проложеній на оси координатъ движущейся точки. Но эти же вторыя производныя, на основаніи теоремы § 46-го суть проложенія ускоренія j движущейся точки на оси координатъ, такъ что:

$$\left.\begin{aligned} j\,.\cos(j,\ x) &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ j\ \cos(j,\ y) &= \frac{d^2y}{dt^2} \\ j\,.\cos(j,\ z) &= \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (108)$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$j = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots (109)$$

Опредѣливъ изъ уравненій движенія вторыя производныя отъ координатъ по времени и вставивъ ихъ въ (109),—получимъ величину ускоренія.

§ 49. Направленіе ускоренія. Изъ (108) слѣдуетъ:

$$
\left.
\begin{aligned}
cos\,(j, x) &= \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \\
os\,(j, y) &= \frac{\frac{d^2y}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \\
sos\,(j, z) &= \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}
\end{aligned}
\right\} \ldots \quad (110)
$$

Этими формулами и опредѣляются косинусы угловъ наклоненія ускоренія къ осямъ координатъ.

§ 50. Ускореніе и его направленіе въ равномѣрномъ движеніи точки по окружности. Мы уже неоднократно разсматривали это движеніе въ качествѣ примѣра. Посмотримъ, каково ускореніе въ этомъ движеніи и какъ оно направлено. Первыя производныя отъ координатъ по времени нами уже выведены въ § 43 подъ нумеромъ (90); дифференцируя ихъ еще разъ, получимъ:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -R\omega^2 \,.\, cos\,(\omega t) \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -R\omega^2 \,.\, sin\,(\omega t) \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= 0.
\end{aligned}
\right\} \ldots\ldots \quad (111)
$$

Вставляя въ (109) получимъ:

$$j = \sqrt{R^2\omega^4\,[cos^2\,(\omega t) + sin^2\,(\omega t)]} = R\omega^2.$$

Итакъ ускореніе въ равномѣрномъ движеніи точки по окружности опредѣляется формулою:

$$t = R\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (112)$$

Оно не измѣняетъ величины скорости, но измѣняетъ ея направленіе— загибаетъ въ окружность траекторію, которая безъ этого ускоренія была бы, по первому основному закону Ньютона, прямолинейна. Уже самое это обстоятельство указываетъ на то, что ускореніе это направлено не по касательной къ окружности. Посмотримъ, какъ же оно направлено. Встав-

ляя найденныя вторыя производныя изъ (111) въ (110), получимъ:

$$\cos(j, x) = \frac{-R\omega^2 \cdot \cos(\omega t)}{R\omega^2} = -\cos(\omega t)$$

$$\cos(j, y) = \frac{-R\omega^2 \cdot \sin(\omega t)}{R\omega^2} = -\sin(\omega t)$$

$$\cos(j, z) = 0$$

или

$$\left.\begin{array}{l} \cos(j, x) = -\cos(\omega t) \\ \sin(j, x) = -\sin(\omega t) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (113)$$

Въ параграфѣ 39 мы видѣли, что (ωt) есть уголъ составляемый съ осью иксовъ радіусомъ, направленнымъ изъ центра окружности въ движущуюся точку.

Изъ тригонометріи же извѣстно, что

$$\cos(180^\circ + \varphi) = -\cos\varphi; \ \sin(180^\circ + \varphi) = -\sin\varphi.$$

Слѣдовательно формулы (113) показываютъ, что въ равномѣрномъ движеніи точки по окружности ускореніе направлено къ центру.

Можно опредѣлить величину и направленіе ускоренія въ разсматриваемомъ движеніи иначе, именно по формуламъ (105), (106) и (107). Сдѣлаемъ это.

По (91) скорость въ этомъ движеніи равна $R\omega$. Слѣдовательно

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt}.$$

Но и R и ω постоянны; слѣдовательно:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (114)$$

Итакъ, въ равномѣрномъ движеніи по окружности тангенціальное ускореніе равно нулю: скорость не измѣняется по величинѣ, отчего и движеніе это называется равномѣрнымъ.

Для опредѣленія, даваемаго формулою (106) нормальнаго ускоренія, замѣтимъ, что радіусъ кривизны окружности равенъ ея радіусу R. Замѣняя въ (106) ρ чрезъ R, величину же v чрезъ ωR (по формулѣ 91), находимъ, что нормальное ускореніе въ равномѣрномъ движеніи по окружности равно $\frac{\omega^2 R^2}{R}$ или:

$$R\omega^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (115)$$

Зная что $\frac{dv}{dt} = 0$; $\frac{v^2}{\rho} = R\omega^2$ въ разсматриваемомъ движеніи, получимъ по формулѣ (107) $j = R\omega^2$ совершенно согласно съ (112).

§ 51. Сила и ея проложенія на оси координатъ. Зная массу точки m и ускореніе j опредѣляемъ, на основаніи 2-го основного закона Ньютона,

силу P, подъ дѣйствіемъ которой точка движется, по формулѣ

$$P = mj \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (116)$$

Мы видѣли, что проложенія ускоренія на оси координатъ равны $\frac{dx^2}{dt^2}$; $\frac{dy^2}{dt^2}$; $\frac{d^2z}{dt^2}$ (формулы 100). Слѣдовательно, проложенія X, Y, Z силы P на оси координатъ опредѣляются по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2} \\ Z &= m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (117)$$

Можно сказать, что (117) представляютъ собою самыя важныя формулы механики. Онѣ позволяютъ по данной силѣ опредѣлять движеніе двукратнымъ интегрированіемъ, подобно тому какъ мы это дѣлали въ прямолинейномъ движеніи. Но формулы (117) годятся и въ томъ случаѣ, когда траекторія оказывается криволинейною. Эти уравненія (117) называются дифференціальными уравненіями движенія свободной точки.

§ 52. Движеніе точки брошенной въ пустотѣ наклонно къ горизонту. Покажемъ, какъ устанавливаются въ опредѣленной задачѣ дифференціальныя уравненія движенія данныя *въ общемъ видѣ* въ (117) и какъ двойнымъ интегрированіемъ получаются конечныя уравненія движенія, на примѣрѣ движенія точки брошенной подъ угломъ къ горизонту и движущейся затѣмъ подъ вліяніемъ силы земнаго тяготѣнія. Мы не будемъ входить въ разсмотрѣніе вліянія, оказываемаго сопротивленіемъ воздуха, и потому будемъ изслѣдовать движеніе точки въ пустотѣ. Движеніе точки въ воздухѣ мало будетъ отличаться отъ разсматриваемаго, если начальная скорость не велика.

Примемъ начальное положеніе тяжелой точки m за начало координатъ. Плоскость (x, z) изберемъ такъ, чтобы она проходила чрезъ направленіе начальной скорости и чтобы горизонтальная ось иксовъ составляла съ начальной скоростью острый или прямой (но не тупой) уголъ. Ось z возьмемъ по вертикали вверхъ. На точку, получившую начальную скорость v_0 направленную подъ угломъ φ къ оси иксовъ, дѣйствуетъ только постоянная сила $-mg$ тяжести, которую мы беремъ со знакомъ $(-)$, потому что, при нашемъ выборѣ осей координатъ, сила тяжести направлена въ сторону отрицательныхъ z. Это число $-mg$ и будетъ представлять собою проложеніе дѣйствующей силы на ось z; проложенія же ея на оси иксовъ и игрековъ равны нулю, такъ какъ сила тяжести составляетъ съ этими осями прямые углы. Слѣдовательно въ разсматриваемомъ движеніи дифференціальныя уравненія (117) примутъ видъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \; m\frac{d^2y}{dt^2} = 0; \; m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \; . \; . \; . \quad (118)$$

Интегрируя ихъ, получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = c_1; \ \frac{dy}{dt} = c_2; \ \frac{dz}{dt} = -gt + c_3 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (119)$$

Постоянныя интеграціи c_1, c_2, c_3 опредѣлимъ по начальнымъ даннымъ. Именно: въ началѣ движенія проложенія начальной скорости v_0 были:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos\varphi; \ \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0; \ \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = v_0 \, . \, \sin\varphi \ . \ . \ . \ (120)$$

Изъ сопоставленія этихъ уравненій съ (119) при $t = 0$ видимъ, что

$$c_1 = v_0 \cos\varphi; \ c_2 = 0; \ c_3 = v_0 \sin\varphi.$$

Подставляя эти значенія постоянныхъ въ (120), получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\varphi; \ \frac{dy}{dt} = 0; \ \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\varphi - gt \quad . \ . \ . \ (121)$$

Интегрируя эти уравненія, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= t \, . \, v_0 \cos\varphi + c_4 \\ y &= c_5 \\ z &= t \, . \, v_0 \, . \, \sin\varphi - \frac{gt^2}{2} + c_6 \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (122)$$

Опредѣлимъ постоянныя интеграціи c_4, c_5, c_6 изъ начальныхъ данныхъ. При $t = 0$ мы имѣли:

$$x = 0; \ y = 0; \ z = 0.$$

Слѣдовательно, на основаніи (122):

$$c_4 = 0; \ c_5 = 0; \ c_6 = 0.$$

Поэтому (122) обращаются въ

$$\left.\begin{aligned} x &= t \, . \, v_0 \, . \, \cos\varphi \\ y &= 0 \\ z &= t \, . \, v_0 \, . \, \sin\varphi - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (123)$$

Вотъ каковы конечныя уравненія разсматриваемаго движенія. Второе изъ нихъ показываетъ, что траекторія лежитъ въ плоскости (x, z). Для опредѣленія траекторіи исключимъ t изъ остальныхъ двухъ, получимъ:

$$z = x \, . \, tg\,\varphi - \frac{gx^2}{2\, v_0^2 \cos^2\varphi} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (124)$$

Опредѣлимъ координаты x, z точки высочайшаго поднятія. Для этого приравняемъ (какъ это дѣлается при опредѣленіи максимумовъ) произ-

водную отъ правой части (124) нулю. Получимъ:

$$tg\,\varphi - \frac{gx}{v_0^2 \, . \, cos^2 \varphi} = 0.$$

Отсюда соотвѣтствующій наибольшей величинѣ зеда иксъ будетъ:

$$\overline{x} = \frac{v_0^2 \, . \, sin\,\varphi \, . \, cos\,\varphi}{g}.$$

Вставляя эту величину, вмѣсто x, въ (124), получимъ:

$$\overline{z} = \frac{v_0^2 \, . \, sin\,\varphi}{2g}.$$

Перенессмъ начало координатъ въ точку $(\overline{x}, \overline{z})$ высочайшаго подъема. Старыя координаты выразятся чрезъ новыя (x', z') такъ:

$$x = x' + \overline{x} = x' + \frac{v_0^2 \, . \, sin\,\varphi \, . \, cos\,\varphi}{g}$$

$$z = z' + \overline{z} = z' + \frac{v_0^2}{2g} \, . \, sin^2 \varphi.$$

Вставляя въ (124), получимъ:

$$z' = - \frac{g}{2v_0^2 \, . \, cos^2 \varphi} \cdot x'^2.$$

Отсюда:

$$x'^2 = - \frac{2v_0^2 \, cos^2 \varphi}{g} \, . \, z' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (125)$$

Полагая $\frac{2v_0^2 \, . \, cos^2 \varphi}{g} = 2p$ въ (125), получимъ:

$$x'^2 = -2pz' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (126)$$

Итакъ, траекторія, представляемая уравненіемъ (126), есть парабола съ вершиною въ точкѣ $\overline{x}$ наивысшаго поднятія и съ осью направленною вертикально внизъ (фиг. 6).

Фиг. 6.

Опредѣлимъ *дальность полета* OA, то есть разстояніе отъ первоначальнаго положенія точки до пересѣченія параболы съ осью иксовъ. Полагая въ (124) $z=0$, получимъ для икса два значенія: нуль, соотвѣтствующій начальному положенію движущейся точки и

$$\frac{2v_0^2}{g} \, sin\,\varphi \, . \, cos\,\varphi = OA$$

или

$$OA = \frac{v_0^2}{g} \, sin\,(2\varphi).$$

Такъ какъ $\frac{v_0^2}{g}$, при данной начальной скорости v_0, есть величина постоянная, величина же $sin\,(2\varphi)$ принимаетъ наибольшее значеніе при

$\varphi = 45^\circ$, то слѣдовательно, при движеніи точки въ пустотѣ, наибольшая дальность полета получается при наклоненіи начальной скорости къ горизонту въ 45°.

Центральныя движенія.

§ 53. Общія свойства центральныхъ движеній. Изслѣдуемъ движеніе свободной точки, притягиваемой или отталкиваемой неподвижною точкою, называемою центромъ притяженія или отталкиванія. Такія движенія называются центральными. Если точка не имѣла начальной скорости, то она направится къ центру притяженія; но если она имѣла начальную скорость, направленную не по прямой соединяющей ее съ центромъ, то дѣло будетъ происходить иначе и траекторія можетъ быть криволинейною. Къ разряду центральныхъ движеній относится и движеніе планетъ и кометъ около солнца, служащаго центромъ притяженія, потому что разстоянія между планетами и солнцемъ столь велики сравнительно съ діаметрами этихъ тѣлъ, что и солнца и планеты могутъ быть разсматриваемы какъ матерьяльныя точки.

Положимъ, что точка m притягивается неподвижнымъ центромъ, находящимся въ началѣ координатъ. Въ случаѣ притяженія на точку m дѣйствуетъ сила P, направленная къ началу координатъ O. Въ случаѣ отталкиванія на точку m дѣйствуетъ сила направленная по продолженію радіуса-вектора Om. Если будемъ разсматривать и притяженія и отталкиванія, то направленіе силы P будетъ опредѣляться уравненіями:

$$\cos(P, x) = \pm \frac{x}{r};\ \cos(P, y) = \pm \frac{y}{r};\ \cos(P, z) = \pm \frac{z}{r}, \quad (127)$$

гдѣ чрезъ r обозначенъ радіусъ-векторъ Om. Здѣсь знаки $(-)$ соотвѣтствуютъ притяженію, знаки $(+)$ отталкиванію. Если же будемъ считать самую силу P отрицательною въ случаѣ притяженія и положительною въ случаѣ отталкиванія, то въ (127) можно удержать только знакъ $(+)$. Дифференціальныя уравненія движенія получимъ, на основаніи (117), въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} X &= P \cdot \cos(P, x) = P \cdot \frac{x}{r} = m\frac{d^2x}{dt^2} \\ Y &= P \cdot \cos(P, y) = P \cdot \frac{y}{r} = m\frac{d^2y}{dt^2} \\ Z &= P \cdot \cos(P, z) = P \cdot \frac{z}{r} = m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (128)$$

Отсюда имѣемъ:

$$\frac{P}{rm} = \frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{z}\frac{d^2z}{dt^2}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - y \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ y \cdot \frac{d^2z}{dt^2} - z \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ z \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - x \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (129)$$

Интегрируя эти уравненія, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt} = c_1 \\ y \cdot \frac{dz}{dt} - z \cdot \frac{dy}{dt} = c_2 \\ z \cdot \frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{dz}{dt} = c_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (130)$$

Умноживъ 1-ое изъ этихъ уравненій (130) на z, второе на x, третье на y, сложивъ и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$c_1 z + c_2 x + c_3 y = 0 \; \ldots \ldots \ldots (131)$$

Это есть уравненіе плоскости, проходящей чрезъ начало координатъ. Итакъ, траекторія точки m лежитъ въ плоскости (131), проходящей чрезъ центръ притяженія.

§ 54. Законъ площадей. Мы взяли направленіе осей координатъ совершенно произвольно. Примемъ плоскость (131) траекторіи за плоскость (x, y). Тогда будетъ:

$$z = 0; \quad \frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Вмѣсто системы уравненій (130) получимъ одно уравненіе:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_1 \; \ldots \ldots \ldots (132)$$

Принимая ось иксовъ за полярную ось, начало O за полюсъ полярныхъ координатъ (r, φ), имѣемъ:

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} \; \ldots \ldots \ldots (133)$$

Дифференцируя это уравненіе, получимъ:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \; \ldots \ldots \ldots (134)$$

Но $\cos\varphi = \frac{x}{r}$. Слѣдовательно (134) приметъ видъ:

$$\frac{r^2\,d\varphi}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

или

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\varphi \; \ldots \ldots \ldots (135)$$

Дифференціалъ сектора равенъ площади безконечно-малаго сектора OMM' (фиг. 7) и отличается на безконечно-малую величину 2-го порядка отъ площади кругового сектора OMB, который, въ свою очередь, можетъ быть принятъ за треугольникъ съ основаніемъ $r\,d\varphi$ и высотою r. Поэтому площадь сектора OMM' равна $\frac{r}{2} \cdot r d\varphi$ или $\frac{r^2\,d\varphi}{2}$. Сравнивая съ (135) видимъ, что

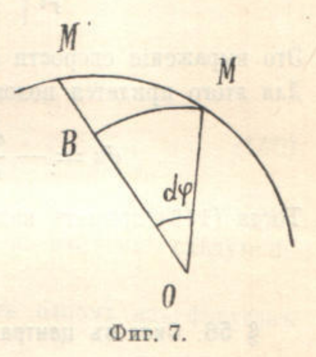
$$\frac{x\,dx - y\,dx}{2} = \frac{r^2\,d\varphi}{2} = \text{дифференціалъ сектора.} \quad . \; . \; . \; (136)$$

Поэтому (132) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{r^2\,d\varphi}{dt} = c_1$$

или

$$r^2\,d\varphi = c_1\,dt \; . \; . \; . \; . \; . \; (137)$$



Фиг. 7.

Эта формула такимъ образомъ показываетъ, что во всякомъ центральномъ движеніи площади секторовъ описываемыя радіусомъ векторомъ пропорціональны времени. Въ этомъ состоитъ *законъ площадей: въ центральномъ движеніи радіусъ-векторъ описываетъ въ равныя времена равныя площади.*

§ 55. Скорость въ центральномъ движеніи. На основаніи (88) имѣемъ:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (138)$$

Формулы преобразованія декартовыхъ координатъ въ полярныя таковы:

$$x = r \,.\, \cos\varphi$$
$$y = r \,.\, \sin\varphi.$$

Изъ нихъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\,r \,.\, \sin\varphi \,.\, d\varphi + \cos\varphi \,.\, dr \\ dy &= r \,.\, \cos\varphi \,.\, d\varphi + \sin\varphi \,.\, dr \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (139)$$

Возводя эти уравненія почленно въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = r^2\,(d\varphi)^2 + (dr)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (140)$$

Вставляя въ (138), получимъ:

$$v^2 = \frac{r^2 \,.\, (d\varphi)^2 + (dr)^2}{dt^2} = r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \; (141)$$

Но

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Поэтому:

$$v^2 = r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right] \; . \; . \; (142)$$

По закону площадей $r^2\,d\varphi = c\,dt$. Слѣдовательно!

$$dt = \frac{r^2\,d\varphi}{c}.$$

Вставляя эту величину, вмѣсто dt, въ (142), получимъ:

$$v^2 = \left(\frac{c\,d\varphi}{r^2\,d\varphi}\right)^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]$$

или

$$v^2 = \frac{c^2}{r^4}\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right] = c^2\left[\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right] \ldots \ldots (143)$$

Это выраженіе скорости упростится, если введемъ перемѣнное $u = \frac{1}{r}$
Для этого придется положить:

$$du = -\frac{dr}{r^2};\ \frac{1}{r^2} = u^2;\ \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2.$$

Тогда (143) приметъ видъ:

$$v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right] \ldots \ldots \ldots (144)$$

§ 56. Сила въ центральномъ движеніи. На основаніи (128) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P}{m}\cdot\frac{x}{r} &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{P}{m}\cdot\frac{y}{r} &= \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \ldots (145)$$

Помноживъ первое изъ этихъ уравненій на dx, второе на dy и сложивъ, получимъ:

$$\frac{P}{m}\cdot\frac{(x\,dx + y\,dy)}{r} = dx\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + dy\cdot\frac{d^2y}{dt^2} \ldots \ldots (146)$$

Извѣстно, что выраженіе $x\,dx + y\,dy$ получается при дифференцированіи уравненія $x^2 + y^2 = r^2$. Именно: дифференцируя его, получимъ:

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr \ldots \ldots \ldots (147)$$

Вставляя въ (146), получимъ:

$$\frac{P}{m}\cdot\frac{r\,dr}{r} = dx\,\frac{d^2x}{dt^2} + dy\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

или

$$dx\,\frac{d^2x}{dt^2} + dy\,\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{P}{m}\cdot\frac{du}{u^2} \ldots \ldots \ldots (148)$$

Но лѣвая часть этого уравненія (148) можетъ быть получена дифференцированіемъ величины:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right],$$

которая равна $\frac{1}{2}(v^2)$. Слѣдовательно изъ (148) получается:

$$\frac{1}{2}\,d\,(v^2) = -\frac{P}{m}\cdot\frac{du}{u^2}$$

или

$$\frac{P}{m} = -\frac{u^2}{2}\cdot\frac{d\,(v^2)}{du} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (149)$$

Дифференцируя же по u уравненіе (144), получимъ:

$$\frac{d\,(v^2)}{du} = 2c^2\left(u + \frac{du}{d\varphi}\,\frac{d^2u}{d\varphi^2}\,\frac{d\varphi}{du}\right)$$

или

$$\frac{d\,(v^2)}{du} = 2c^2\left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right].$$

Вставляя въ (149), получимъ:

$$\frac{P}{m} = -c^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (150)$$

§ 57. Кеплеровы законы. Кеплеръ, изъ своихъ собственныхъ наблюденій и изъ наблюденій своихъ предшественниковъ замѣтилъ слѣдующіе законы въ движеніи планетъ:

1) Каждая планета движется по эллипсу, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится солнце.

2) Площади, описываемыя радіусами-векторами, проведенными отъ солнца къ планетамъ, возрастаютъ пропорціонально времени.

3) Квадраты временъ обращенія планетъ относятся между собою какъ кубы большихъ осей ихъ траекторій (орбитъ).

Покажемъ, какъ изъ этихъ кеплеровыхъ законовъ, выражающихъ просто результаты наблюдаемыхъ фактовъ, вывести тотъ великій открытый Ньютономъ законъ, по которому оказывается, что всѣ тѣла взаимно притягиваются съ силою пропорціональною массамъ и обратно пропорціональною квадратамъ разстояній.

§ 58. Законъ площадей характеризуетъ центральное движеніе. Во-первыхъ покажемъ, что существованіе 2-го кеплерова закона (то есть закона площадей) доказываетъ, что движеніе планеты происходитъ подъ дѣйствіемъ притяженія къ центру. (Теорема обратная къ высказанной въ § 54-омъ).

Если движеніе точки подчиняется закону площадей, то, согласно сказанному въ § 53:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= c_1 \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= c_2 \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= c_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (151)$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (152)$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z}.$$

Называя величину этихъ отношеній k, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= kx \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= ky \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= kz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (153)$$

Возводя эти равенства почленно въ квадратъ, складывая и припомнивъ, что $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, получимъ:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 = k^2r^2 \quad \ldots\ldots (154)$$

Изъ (153) и (154) слѣдуетъ:

$$k^2 = \frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}{x^2} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}{y^2} = \frac{\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}{z^2} = \frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}{r^2} \quad . (155)$$

Но сила равна произведенію массы на ускореніе; поэтому и на основаніи (109) имѣемъ:

$$P = m\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots (156)$$

Но на основаніи (117)

$$\left.\begin{aligned} P\,.\cos(P, x) &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ P\,.\cos(P, y) &= m\frac{d^2y}{dt^2} \\ P\,.\cos(P, z) &= m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (157)$$

Изъ (155), (156) и (157) слѣдуетъ:

$$\cos(P, x) = \pm \frac{x}{r};$$

$$\cos(P, y) = \pm \frac{y}{r};$$

$$\cos(P, z) = \pm \frac{z}{r}.$$

Эти послѣднія три уравненія показываютъ, что сила направлена по радіусу-вектору, исходящему изъ начала координатъ, то есть что движеніе происходитъ подъ вліяніемъ центральной силы.

§ 59. Выводъ закона ньютоніанскаго притяженія изъ законовъ Кеплера. Итакъ, первая часть великаго открытія Ньютона доказана: планеты движутся подъ дѣйствіемъ центральной силы. Остается доказать вторую часть: какъ дѣйствуетъ эта сила? Согласно первому кеплерову закону планета движется по эллипсу, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится солнце.

Уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ таково:

$$r = \frac{p}{1 + e \,.\, \cos\varphi} \,. \,. \quad . \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,(158)$$

Дѣлая здѣсь подстановку $\frac{1}{r} = u$, получимъ:

$$u = \frac{1}{p}\,(1 + e \,.\, \cos\varphi) \;. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,(159)$$

Дифференцируя, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} &= -\frac{e}{p} \,.\, \sin\varphi \\ \frac{d^2u}{d\varphi^2} &= -\frac{e}{p} \,.\, \cos\varphi \end{aligned}\right\} \;. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,(160)$$

Вставляя опредѣляемыя по (159) и (160) величины u и $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ въ (150), получимъ:

$$\frac{P}{m} = -\frac{c^2\,(1 + e \,.\, \cos\varphi)^2}{p^2}\left[\frac{1}{p}\,(1 + e\cos\varphi) - \frac{e}{p} \,.\, \cos\varphi\right]$$

или на основаніи (158)

$$\frac{P}{m} = -\frac{c^2\,(1 + e \,.\, \cos\varphi)^2}{p^2} \,.\, \frac{1}{p} = -\frac{c^2}{p} \,.\, \frac{1}{r^2}.$$

Итакъ:

$$P = -\frac{mc^2}{p \,.\, r^2} \;. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,(161)$$

сила оказывается притягивающею и обратно-пропорціональною квадрату разстоянія.

Великое открытіе Ньютона подготовлено было цѣлымъ рядомъ изслѣдованій. Древніе астрономы подготовили своими наблюденіями богатый ма-

теріалъ для изслѣдованія, но для объясненія движенія планетъ придумали кристальныя сферы и, предполагая, что планеты обращаются около земли, считали ихъ истинное движеніе весьма сложнымъ. Коперникъ (1473—1543) доказалъ, что земля и планеты движутся около солнца. Галилей (1564—1642) изслѣдовалъ движеніе падающихъ тѣлъ. Кеплеръ (1571—1630) высказалъ свои законы и наконецъ Ньютонъ (1642 — 1727) сдѣлалъ свое великое открытіе, окончательно разбившее кристальныя сферы древнихъ, показавшее, что закономѣрность и устойчивость солнечной системы объясняется тѣмъ же тяготѣніемъ, которое служитъ причиною паденія тѣлъ и открывшее широкіе горизонты въ дѣлѣ изученія природы. Ньютонъ же (одновременно съ Лейбницемъ) изобрѣлъ дифференціальное исчисленіе и всю механику подчинилъ своимъ основнымъ тремъ законамъ.

Задача. *Опредѣлить движеніе точки, притягиваемой матеріальнымъ центромъ пропорціонально разстояніямъ.*

Не трудно видѣть, что движеніе будетъ происходить въ нѣкоторой плоскости. Примемъ ее за плоскость (x, y). Уравненія движенія будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y.$$

гдѣ μ^2 — коэффиціентъ пропорціональности. Для интегрированія этихъ уравненій положимъ:

$$\frac{dx}{dt} = x'.$$

Тогда 1-ое изъ дифференціальныхъ уравненій задачи дастъ:

$$\frac{x'\,dx'}{dx} = -\mu^2 x.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$x'^2 = c^2 - \mu^2 x^2.$$

Отсюда:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{c^2 - \mu^2 x^2}$$

или

$$\pm\, dt = \frac{dx}{\sqrt{c^2 - \mu^2 x^2}}.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\pm\,\mu\,(t - \tau) = arc\,cos\left(\frac{\mu x}{c}\right)$$

или

$$x = \frac{c}{\mu}\,cos\,[\mu\,(t - \tau)] = A\,cos\,(\mu t) + B\,sin\,(\mu t)$$

Подобное же уравненіе получимъ для y. Итакъ, уравненія движенія

въ конечномъ видѣ будутъ:

$$x = A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)$$
$$y = A'\cos(\mu t) + B'\sin(\mu t)$$

Для нахожденія траекторіи надо исключить изъ этихъ уравненій t. Для этого опредѣляемъ сначала изъ нихъ:

$$\sin(\mu t) = \frac{A'x - Ay}{A'B - AB'};$$

$$\cos(\mu t) = \frac{By - B'x}{A'B - AB'}.$$

Возводя эти уравненія, почленно, въ квадратъ и сложивъ, получимъ:

$$(A'x - Ay)^2 + (By - B'x)^2 = (A'B - AB')^2$$

или

$$(A'^2 + B_1{}^2)x^2 + (A^2 + B^2)y^2 - 2(AA' + BB')xy = (A'B' - AB')^2$$

Это уравненіе траекторіи представляетъ собою эллипсъ, центръ котораго находится въ началѣ координатъ, то есть въ центрѣ притяженія.

Изъ уравненій движенія въ конечномъ видѣ замѣчаемъ, что точка возвращается на свое мѣсто въ теченіи времени $t = \frac{2\pi}{\mu}$. Итакъ, время T полнаго обращенія точки опредѣляется изъ формулы:

$$T = \frac{2\pi}{\mu}.$$

Интересно, каково уравненіе живой силы въ этомъ движеніи. Для нахожденія его помножимъ 1-ое изъ дифференціальныхъ уравненій задачи на dx, второе на dy и сложимъ. Получимъ:

$$dx\,\frac{d^2x}{dt^2} + dy\,\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2(x\,dx + y\,dy)$$

или:

$$\frac{d(v^2)}{2} = -\mu^2(dx + y\,dy).$$

Таково уравненіе живой силы.

Уравненіе площадей, какъ и во всякомъ центральномъ движеніи, будетъ:

$$r^2\,d\varphi = c\,dt.$$

ГЛАВА III.

Движеніе несвободной точки.

§ 60. Несвободная точка. Если точка принуждена двигаться по какой-нибудь поверхности или по какой-нибудь линіи, то она называется *несво-*

бодною. Напримѣръ: точка, соединенная съ другою неподвижною точкою помощью нерастяжимаго и несгибаемаго стержня, имѣющаго массу весьма малую сравнительно съ массою разсматриваемой точки, принуждена двигаться по *поверхности* шара описанной около неподвижной точки радіусомъ равнымъ длинѣ стержня; точка, соединенная такими стержнями съ двумя неподвижными точками A и B, принуждена двигаться по сферѣ описанной около A и по сферѣ описанной около B, то есть по *линіи* пересѣченія этихъ сферъ.

§ 61. Движеніе точки по поверхности. Изслѣдуемъ сначала движеніе точки по поверхности, опредѣляемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (162)$$

Если точка, принужденная находиться на этой поверхности, подвержена дѣйствію силы P, то, разлагая силу P на двѣ силы, изъ которыхъ одна направлена по нормали, а другая — по касательной, замѣтимъ, что слагающая T, направленная по касательной, не будетъ давить на поверхность, но будетъ двигать точку m по поверхности. Напротивъ того нормальная слагающая N нисколько не будетъ двигать точку, но будетъ обусловливать давленіе точки на поверхнсть. Поэтому, при вычисленіи давленія точки на поверхность, мы должны брать въ разсчетъ только нормальное давленіе N.

Обращая же вниманіе на это давленіе можно свести изученіе движенія *несвободной* точки къ изслѣдованію движенія такой *свободной* точки, которая находится подъ дѣйствіемъ не только заданныхъ силъ, но еще и давленія, которое производится на точку поверхностью и которое является противодѣйствіемъ давленію, производимому точкою на поверхность.

Обозначая чрезъ ($-N$) давленіе, производимое точкою на поверхность и слѣдовательно чрезъ N сопротивленіе поверхности, мы можемъ разсматривать точку какъ свободную, находящуюся подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ и сопротивленія N, которое остается пока неопредѣленнымъ. Поэтому, на основаніи (117) получаются слѣдующія дифференціальныя уравненія движенія.

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N \cdot \cos(N, x) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N \cdot \cos(N, y) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N \cdot \cos(N, z) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (163)$$

Заключающіеся въ этихъ уравненіяхъ косинусы угловъ наклоненія нормали къ осямъ координатъ опредѣляются извѣстными формулами диффе-

ренціальнаго исчисленія по (162) такъ:

$$\left.\begin{aligned}\cos(N,x)&=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}\\ \cos(N,y)&=\frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}\\ \cos(N,z)&=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(164)$$

Что же касается N, то эта величина подлежитъ исключенію. Исключивъ N изъ трехъ уравненій (163), получимъ два уравненія; присоединивъ къ нимъ еще уравненіе (162) поверхности, получимъ всего три уравненія, которыхъ вполнѣ достаточно для выраженія координатъ x, y, z чрезъ время t.

Примѣръ. Опредѣлить движеніе тяжелой точки, движущейся по поверхности вертикальнаго цилиндра $x^2+y^2=R^2$ подъ вліяніемъ силы тяжести и начальной скорости v_0, сообщенной въ горизонтальномъ направленіи, предполагая, что точка не можетъ сойти съ поверхности цилиндра. Ось z беремъ по вертикали внизъ. Здѣсь уравненіе (162) имѣетъ видъ:

$$f(x, y, z)=x^2+y^2-R^2=0 \quad\ldots\ldots(165)$$

Вычисляемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x;\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=2y;\ \ \frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad\ldots\ldots(166)$$

Здѣсь дѣйствующая сила есть тяжесть mg; ускореніе, производимое ею, направлено по оси z и равно g. Слѣдовательно:

$$X=0;\ \ Y=0;\ \ Z=mg.$$

Поэтому уравненія (163) принимаютъ видъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{Nx}{R} \quad\ldots\ldots(167)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{Ny}{R} \quad\ldots\ldots(168)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=mg. \quad\ldots\ldots(169)$$

Исключая N изъ (167) и (168), получимъ:

$$y \frac{dx^2}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Интегралъ этого уравненія таковъ:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (170)$$

Въ началѣ движенія:

$$y = 0; \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = v_0; \quad x = R.$$

Вставляя въ (170), получимъ:

$$C = - Rv_0.$$

Слѣдовательно (170) приметъ видъ:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = - Rv_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (171)$$

Дифференцируя (165), получимъ:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (172)$$

Исключая $\frac{dy}{dt}$ изъ (171) и (172), находимъ:

$$y \frac{dx}{dt} + \frac{x^2}{y} \cdot \frac{dx}{dt} = - Rv_0.$$

или

$$(x^2 + y^2) \frac{dx}{dt} = - Rv_0 y$$

или

$$R^2 \frac{dx}{dt} = - Rv_0 \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Отсюда:

$$\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = - v_0 dt.$$

Интегрируя, получимъ:

$$x = R \cdot cos \left(\frac{v_0 t}{R}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (173)$$

$$y = R \cdot sin \left(\frac{v_0 t}{R}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (174)$$

Интегрируя (169) и принимая $m = 1$, найдемъ:

$$\frac{dz}{dt} = gt + c_1$$

При $t = 0$ имѣемъ $\frac{dz}{dt} = 0$.

Слѣдовательно:

$$\frac{dz}{dt} = gt.$$

Интегрируя еще разъ, находимъ:

$$z = \frac{gt^2}{2} + c_2.$$

При $t = 0$ имѣемъ $z = 0$.

Слѣдовательно:

$$z = \frac{gt^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (175)$$

Уравненія (173), (174), (175) суть искомыя уравненія движенія въ конечномъ видѣ. Изъ нихъ мы видимъ, что точка движется по вьющейся линіи.

§ **62 Движеніе точки по линіи.** Если точка принуждена двигаться по линіи, то есть по пересѣченію поверхностей:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (176)$$

то, обозначая чрезъ N' и N'' сопротивленія, оказываемыя этими поверхностями, получимъ, подобно тому какъ получили (163), такія уравненія

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N' \cdot \cos(N', x) + N'' \cdot \cos(N', x) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N' \cdot \cos(N', y) + N'' \cdot \cos(N'', y) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N' \cdot \cos(N', z) + N'' \cdot \cos(N'', z) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (177)$$

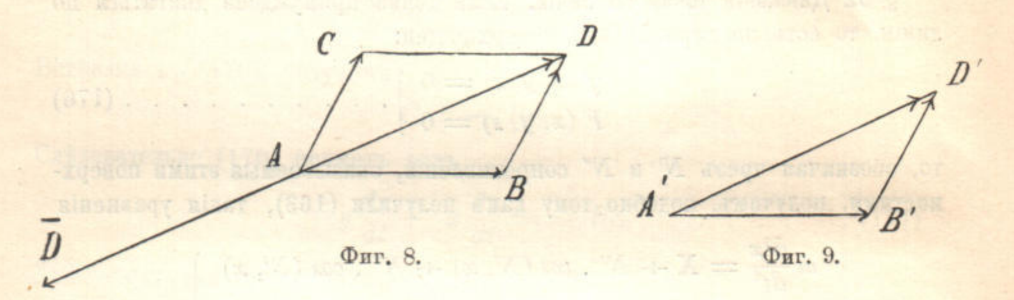
По исключеніи N' и N'' изъ (177), получимъ одно уравненіе. Прибавляя къ нему два уравненія (176), получимъ три уравненія, достаточныя для выраженія (x, y, z) чрезъ t.

§ **63. Равновѣсіе какъ частный случай движенія.** Можетъ случиться такъ, что нѣсколько силъ, дѣйствующихъ на точку, взаимно уничтожаются и точка находится въ равновѣсіи. Эго равновѣсіе будетъ *статическимъ*, если точка не имѣетъ начальной скорости; тогда она останется въ покоѣ. Равновѣсіе будетъ *динамическое*, если точка имѣетъ начальную скорость; тогда она будетъ двигаться такъ, какъ будто никакія силы на нее не дѣйствуютъ, если въ теченіи движенія силы продолжаютъ уничтожаться.

§ **64. Равновѣсіе свободной точки.** Свободная точка, слѣдовательно, будетъ въ равновѣсіи, если равнодѣйствующая всѣхъ силъ равна нулю. Это условіе соблюдается, если каждая сумма проложеній всѣхъ силъ на каждую изъ осей координатъ равна нулю. Поэтому уравненія равновѣсія свободной точки таковы:

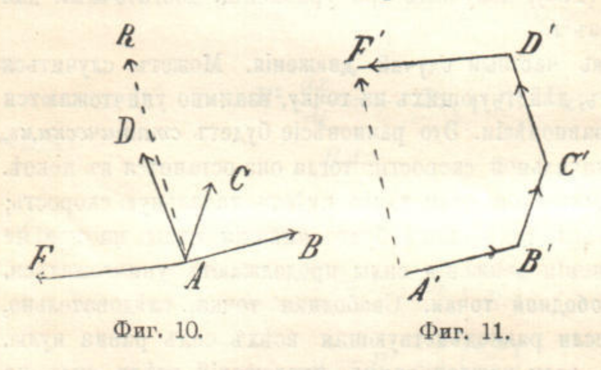
$$\left.\begin{aligned} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (178)$$

§ 65. Многоугольникъ силъ. На основанiи слѣдствiя, выведеннаго Ньютономъ изъ его II-го закона (§ 3), равнодѣйствующая двухъ силъ AB и AC (фиг. 8) равна дiагонали AD параллелограмма, построеннаго на этихъ силахъ. Слѣдовательно точка A находится въ равновѣсiи подъ дѣйствiемъ силъ AB, AC и $A\overline{D}$, изъ коихъ $A\overline{D}$ равна и противоположна равнодѣйствующей AD силъ AB и AC. Изберемъ какую-нибудь точку A (фиг. 9) и проведемъ $A'B'$ равную и параллельную AB, $B'D'$ равную и параллельную AC. Соединивъ A' съ D', замкнемъ треугольникъ $A'B'D$,



Фиг. 8. Фиг. 9.

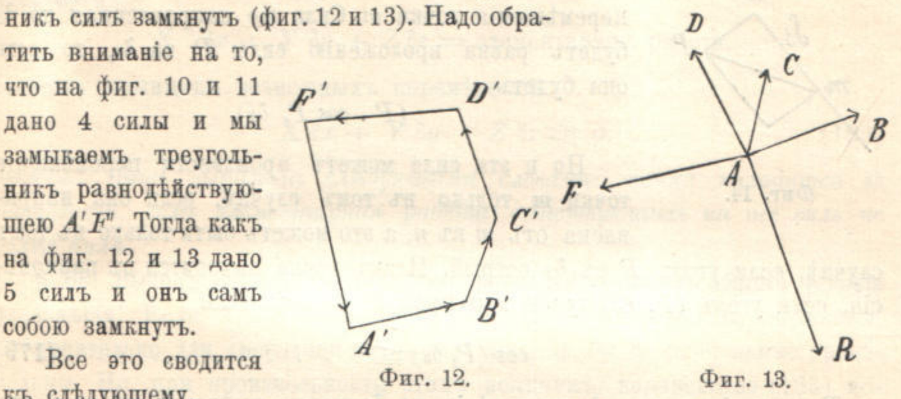
называемый *треугольникомъ силъ*. Очевидно $A'D' = AD$. Изъ сравненiя фигуръ видимъ: 1) замыкающая сторона $A'D'$ треугольника силъ, считаемая (при непрерывномъ обходѣ треугольника по его периметру) въ противоположную сторону, представляетъ, по величинѣ и направленiю, равнодѣйствующую силъ изображенныхъ остальными сторонами треугольника; 2) точка находится въ равновѣсiи подъ дѣйствiемъ трехъ силъ, представляемыхъ въ *треугольникѣ силъ*, по величинѣ и по направленiю его сторонами $A'B'$, $B'D'$, $D'A'$, считаемыми въ одномъ направленiи; 3) точка находится въ равновѣсiи подъ дѣйствiемъ трехъ силъ тогда, и только тогда, когда треугольникъ силъ замыкается (когда его можно построить) (фиг. 9).



Фиг. 10. Фиг. 11.

Если на точку дѣйствуетъ много силъ (фиг. 10), то можно было бы найти ихъ равнодѣйствующую послѣдовательнымъ построенiемъ параллелограммовъ, но получился бы сложный чертежъ. Проще можно поступить такъ (фиг. 11). Даны силы AB, AC, AD, AF. Избираемъ произвольную точку A' и откладываемъ отъ нея послѣдовательно прямыя равныя и параллельныя даннымъ силамъ, такъ чтобы каждая послѣдующая прямая шла отъ конца предъидущей. Получимъ *многоугольникъ силъ* $A'B'C'D'F'$.

Если представимъ себѣ діагонали проведенныя къ его вершинамъ изъ A', то получимъ рядъ *треугольниковъ силъ.* Изъ указаннаго свойства треугольника силъ слѣдуетъ. 1) Замыкающая сторона $A'F'$ многоугольника, считаемая, при обходѣ периметра, въ направленіи противоположномъ остальнымъ сторонамъ, представляетъ, по величинѣ и по направленію, равнодѣйствующую AR силъ, представляемыхъ остальными сторонами. 2) Точка находится въ равновѣсіи, если многоугольникъ силъ замкнутъ (фиг. 12 и 13). Надо обратить вниманіе на то, что на фиг. 10 и 11 дано 4 силы и мы замыкаемъ треугольникъ равнодѣйствующею $A'F'$. Тогда какъ на фиг. 12 и 13 дано 5 силъ и онъ самъ собою замкнутъ.



Фиг. 12. Фиг. 13.

Все это сводится къ слѣдующему.

Правило I. Любая сторона многоугольника силъ изображаетъ собою, по величинѣ и направленію, равнодѣйствующую остальныхъ силъ, если считается въ сторону имъ противоположную при обходѣ периметра.

Правило II. Точка находится въ равновѣсіи, если многоугольникъ силъ оказывается замкнутымъ.

Замѣтимъ, что стороны многоугольника силъ могутъ лежать и въ разныхъ плоскостяхъ, такъ что эти правила остаются справедливыми и для силъ не лежащихъ въ одной плоскости.

§ 66. Равновѣсіе несвободной точки. Равновѣсіе несвободной точки какъ частный случай движенія такой точки, опредѣляется такими уравненіями, которыя получаются изъ (163) или изъ (177), полагая въ нихъ вторыя производныя отъ координатъ по времени равными нулю.

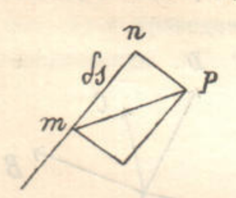
§ 67. Общее условіе равновѣсія, выводимое изъ начала возможныхъ перемѣщеній. Равновѣсіе несвободной точки можно изслѣдовать, какъ это показалъ Лагранжъ, другимъ путемъ, дающимъ болѣе широкій и необыкновенно плодотворный взглядъ на дѣло.

Лагранжъ основалъ всю статику (ученіе о равновѣсіи) на *принципѣ возможныхъ перемѣщеній*, который состоитъ въ томъ, что *для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы элементарная работа была бы не болѣе нуля.*

Для приложенія этого принципа достаточно разсматривать безконечно малыя перемѣщенія, которыя, благодаря ихъ малости, всегда могутъ быть приняты за прямолинейныя.

Положимъ, что прямая mn (фиг. 14) представляетъ направленіе ка-

кого-нибудь изъ возможныхъ перемѣщеній точки m; такъ что m можетъ перемѣщаться по ней только въ направленіи mn, но не въ обратномъ направленіи. Положимъ, что mP представляетъ собою равнодѣйствующую P всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m. Разлагаемъ силу P на двѣ силы, изъ коихъ одна была бы перпендикулярна къ возможному перемѣщенію δs по mn, другая же была бы направлена по δs.



Фиг. 14.

Первая изъ этихъ силъ не произведетъ никакого перемѣщенія точки m. Сила же направленная по δs будетъ равна проложенію силы P на δs, то есть она будетъ

$$(P \,.\, \cos P,\ \delta s).$$

Но и эта сила можетъ произвести перемѣщеніе точки m только въ томъ случаѣ, если она направлена отъ m къ n, а это можетъ быть только въ томъ случаѣ, если уголъ P съ δs острый. Итакъ точка находится въ равновѣсіи, если уголъ $(P,\ \delta s)$ тупой или прямой, то есть если

$$\cos(P, \delta s) \leqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (179)$$

Таково общее условіе равновѣсія, но Лагранжъ выразилъ его въ болѣе удобной формѣ. А именно, замѣтимъ, что:

$$\cos(P, \delta s) = \cos(P, x) \,.\, \cos(\delta s, x) + \cos(P, y) \,.\, \cos(\delta s, y) + \\ + \cos(P, z) \,.\, \cos(\delta s, z) \quad \ldots\ldots \quad (180)$$

и кромѣ того

$$\left.\begin{array}{l} \cos(P, x) = \dfrac{X}{P};\quad \cos(\delta s, x) = \dfrac{\delta x}{\delta s} \\[2ex] \cos(P, y) = \dfrac{Y}{P};\quad \cos(\delta s, y) = \dfrac{\delta y}{\delta s} \\[2ex] \cos(P, z) = \dfrac{Z}{P};\quad \cos(\delta s, z) = \dfrac{\delta z}{\delta s} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (181)$$

гдѣ δx, δy, δz суть проложенія возможнаго перемѣщенія δs.

Поэтому (179) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{X}{P} \cdot \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{Y}{P} \cdot \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{Z}{P} \cdot \frac{\delta z}{\delta s} \leqq 0 \quad \ldots\ldots \quad (182)$$

Но P и δs мы принимаемъ за величины положительныя. Слѣдовательно изъ (182) вытекаетъ

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z \leqq 0 \quad \ldots\ldots \quad (183)$$

Это и есть та форма, въ которой Лагранжъ выразилъ общее условіе равновѣсія точки.

Замѣняя въ (180) косинусы правой части чрезъ ихъ выраженія. данныя въ (181) и помножая обѣ части на $P\,\delta s$, получимъ:

$$P\,.\,\cos(P, \delta s)\,.\,\delta s = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z\;.\;.\;.\;.\;(184)$$

Выраженіе, стоящее въ лѣвой части этого равенства, представляетъ собою, на основаніи (32), работу на пути возможнаго перемѣщенія δs. Эту работу на безконечно-маломъ пути δs называютъ *элементарною.* Слѣдовательно:

$$X\,.\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \text{элементарная работа.}$$

Поэтому принципъ возможныхъ перемѣщеній:

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z \leqq 0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(183)$$

можетъ быть выраженъ слѣдующими словами: точка находится въ равновѣсіи, если элементарная работа дѣйствующихъ на нее силъ не болѣе нуля.

§ 68. Выводъ уравненій равновѣсія свободной точки изъ общаго условія равновѣсія. Если точка свободна, то всякія ея перемѣщенія возможны. Слѣдовательно для свободной точки величины δx, δy, δz совершенно произвольны. Но, при произвольности этихъ величинъ, неравенство (183) можетъ существовать только въ томъ случаѣ, если стоящіе при нихъ коэффиціенты равны нулю, то есть если:

$$X = 0;\quad Y = 0;\quad Z = 0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(185)$$

Уравненіе тождественныя съ (178) потому, что въ (185) X, Y, Z суть проложенія равнодѣйствующей P всѣхъ силъ.

§ 69. Выводъ, изъ общаго условія (183), уравненій равновѣсія точки, которая принуждена оставаться на поверхности. Если точка принуждена оставаться на поверхности, то уже δx, δy, δz не произвольны, и мы сейчасъ выведемъ зависимость, которая между ними существуетъ. Разлагая

$$f(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z) - f(x, y, z)$$

въ рядъ по формулѣ Тайлора и ограничиваясь первымъ членомъ ряда, получимъ:

$$f(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z) - f(x, y, z) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z\;.\;.\;.\;.\;.\;(186)$$

Но оба члена лѣвой части этого равенства равны нулю, такъ какъ точка, и въ начальномъ своемъ положеніи и продвинувшись на возможное перемѣщеніе, остается на поверхности. Слѣдовательно и вторая часть равенства (186) равна нулю, то есть:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z = 0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(187)$$

Вотъ какая зависимость существуетъ между δx, δy, δz. Кромѣ того мы имѣемъ общее условіе равновѣсія:

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z \leqq 0. \quad \ldots\ldots\ldots (183)$$

Помноживъ лѣвую часть (187) на неопредѣленный множитель λ и сложивъ съ (183), получимъ:

$$\left(X + \lambda\,.\,\frac{\partial f}{\partial x}\right).\,\delta x + \left(Y + \lambda\,.\,\frac{\partial f}{\partial y}\right).\,\delta y + \left(Z + \lambda\,.\,\frac{\partial f}{\partial z}\right).\,\delta z \leqq 0\,. \quad (188)$$

Двѣ величины изъ δx, δy, δz совершенно произвольны, третья же опредѣляется по этимъ двумъ при помощи (187). Пусть эта третья величина будетъ δx. Опредѣлимъ λ такъ, чтобы коэффиціентъ при δx въ (188) былъ равенъ нулю. Для этого опредѣлимъ λ изъ уравненія:

$$X + \lambda\,.\,\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,. \quad \ldots\ldots\ldots (189)$$

Тогда (188) уже не будетъ содержать δx; остальные же δy и δz совершенно произвольны, и потому уравненіе (188) возможно только, если коэффиціенты при δy и δz равны нулю, то есть:

$$\left.\begin{aligned} Y + \lambda\,.\,\frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ Z + \lambda\,.\,\frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (190)$$

Уравненія (189) и (190) и представляютъ собою уравненія равновѣсія точки принужденной оставаться на поверхности

$$f(x, y, z) = 0.$$

§ 70. Выводъ, изъ общаго условія (183), **уравненій равновѣсія точки, принужденной оставаться на линіи.** Если точка принуждена оставаться на линіи, опредѣляемой пересѣченіемъ поверхностей

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ F(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (191)$$

то изъ этихъ уравненій по теоремѣ Тайлора получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y = \frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (192)$$

Кромѣ того имѣемъ общее условіе равновѣсія

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z \leqq 0. \quad \ldots\ldots\ldots (193)$$

Помножая 1-ое изъ (192) на λ_1, второе изъ (192) на λ_2 и складывая съ (193), получимъ:

$$\left(X + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y + $$
$$+ \left(Z + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta z \gtreqless 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (194)$$

Опредѣлимъ λ_1 и λ_2 изъ требованія, чтобы коэффиціенты при δx и δy въ (194) были равны нулю. Тогда остается только третій членъ въ лѣвой части (194), и, вслѣдствіе произвольности δz, коэффиціентъ этого члена тоже долженъ быть равенъ нулю. Поэтому имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} X + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ Y + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ Z + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (195)$$

Таковы уравненія равновѣсія точки, принужденной оставаться на линіи

$$f(x, y, z) = 0$$
$$F(x, y, z) = 0$$

§ 71. Уравненія равновѣсія точки въ случаѣ связи, выраженной неравенствомъ. Если точка можетъ двигаться не только по поверхности

$$f(x, y, z) = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (196)$$

но и въ одну какую нибудь опредѣленную сторону отъ нея, то можно сказать, что точка можетъ сойти на сосѣднюю поверхность

$$f(x, y, z) = \alpha, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (197)$$

которая лежитъ, смотря по условію, или въ области

$$f(x, y, z) > 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (198)$$

или въ области

$$f(x, y, z) < 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (199)$$

Примѣръ 1-ый. Точка лежитъ на внѣшней поверхности твердой сферы

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Такая точка можетъ сойти въ область

$$x^2 + y^2 - R^2 > 0,$$

внѣшнюю по отношенію къ данной сферѣ, то есть перейти на сосѣднюю сферу

$$x^2 + y^2 - R^2 = \alpha$$

гдѣ α положительно.

Примѣръ 2-ой. Точка лежитъ на внутренней сторонѣ поверхности сферы

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

Такая точка можетъ сойти въ область

$$x^2 + y^2 - R^2 < 0,$$

лежащую внутри сферы, то есть перейти на сосѣднюю сферу

$$x^2 + y^2 - R^2 = \alpha,$$

гдѣ α отрицательно.

Связи, выражающіяся неравенствами вида (198) или (199) называются *неудерживающими.*

Замѣтимъ, что условіе равновѣсія (183) можетъ быть представлено въ видѣ

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \delta U, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (200)$$

если подъ обозначеніемъ δU будемъ разумѣть неопредѣленную безконечно-малую величину не превосходящую нуль. Изъ (197) имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z = \delta\alpha. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (201)$$

Помноживъ это уравненіе (201) на неопредѣленнаго множителя λ и сложивъ съ (200) получимъ:

$$\left(X + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = \lambda\delta\alpha + \delta U \quad (202)$$

Двѣ величины изъ δx, δy, δz совершенно произвольны, третья же связана съ ними уравненіемъ (201). Пусть эта третья величина будетъ δx. Выбираемъ λ такимъ, чтобы коэффиціентъ при δx въ (202) былъ равенъ нулю. Тогда, вслѣдствіе произвольности δy и δz ихъ коэффиціенты въ уравненіи (202) и правая часть этого уравненія должны быть равны нулю. Поэтому имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} X + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ Y + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ Z + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \\ \delta U + \lambda\delta\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (203)$$

Первыя три изъ уравненій (203) даютъ:

$$P = \lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (204)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{X}{P} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\
\frac{Y}{P} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\
\frac{Z}{P} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (205)$$

Слѣдовательно, для равновѣсія точки, дѣйствующая сила должна быть направлена по нормали къ поверхности

$$f(x, y, z) = 0.$$

Послѣднее изъ уравненій (203) имѣющее видъ

$$\delta U + \lambda\delta\alpha = 0, \dots\dots\dots (206)$$

опредѣляетъ знакъ множителя λ. Именно: черезъ δU мы обозначали величину, не больше нуля; слѣдовательно (206) можетъ удовлетвориться только тогда, когда λ и $\delta\alpha$ имѣютъ одинаковые знаки. Такъ какъ сила P есть величина абсолютная, то благодаря уравненію (204), множитель λ и радикалъ $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ должны имѣть одинаковые знаки. Слѣдовательно, знакъ этого радикала таковъ, какъ знака $\delta\alpha$.

§ 72. Задача: найти положеніе равновѣсія тяжелой точки на сферѣ? Пояснимъ сказанное въ предыдущемъ параграфѣ, и особенно правило знаковъ при радикалѣ, на весьма простой задачѣ, выраженной въ заглавіи настоящаго параграфа.

Возьмемъ начало координатъ въ центрѣ сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \dots\dots\dots (207)$$

Возьмемъ ось z по вертикали внизъ. Имѣемъ:

$$P = mg; \quad X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = mg;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z;$$

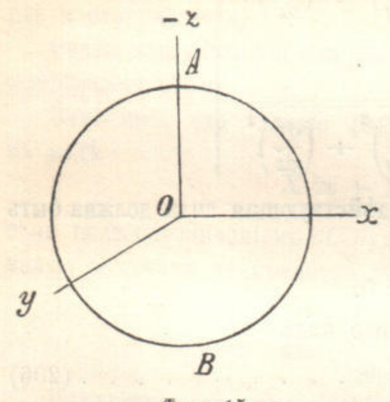
$$\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \pm\, 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \pm\, 2R \dots (208)$$

Уравненія (205) дадутъ

$$x = 0;\quad y = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (209)$$

$$z = -(\pm R). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (210)$$

Уравненія (209) показываютъ, что положенія равновѣсія могутъ быть только на вертикальной оси сферы (фиг. 15). Уравненіе (210) показываетъ, что положенія равновѣсія могутъ быть только на сферѣ. Въ (210) знакъ при R внутри скобки надо взять такой какъ при радикалѣ, какъ это видно изъ (208).



Фиг. 15.

Если точка не можетъ покинуть сферы, то при радикалѣ нужно удержать оба знака; изъ (210) получимъ $z = \mp R$; положенія равновѣсія будутъ въ A и B.

Если точка лежитъ внутри сферы, то $\delta\alpha$ отрицательно; слѣдовательно при радикалѣ надо взять (—); изъ (210) получимъ $z = -(-R)$ или $z = +R$; положеніе равновѣсія будетъ только въ B, такъ какъ положительная ось z идетъ внизъ.

Если точка лежитъ внѣ сферы, то $\delta\alpha$ положительно; при радикалѣ надо взять (+); изъ (210) получимъ $z = -(+R)$ или $z = -R$; положеніе равновѣсія будетъ только въ A.

§ 73. Уравненія равновѣсія точки въ случаѣ двухъ связей, выраженныхъ неравенствами. Если имѣемъ неудерживающія связи:

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z) = \alpha \\ F(x, y, z) = \beta \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (211)$$

то разсуждая совершенно такъ же какъ въ § 72, получимъ:

$$\left.\begin{array}{r} X + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ Y + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ Z + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ \lambda_1 \delta\alpha + \lambda_3 \delta\beta + \delta U = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (212)$$

§ 74. Начало Даламбера. Знаменитый французскій энциклопедистъ и математикъ Даламберъ (Dalembert, 1717—1789) привелъ изученіе движенія несвободной точки къ изученію ея равновѣсія при помощи особыхъ соображеній, получившихъ названіе начала Даламбера. Выводъ уравненій движенія несвободной точки при помощи начала Даламбера имѣетъ, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, чрезвычайно важное значеніе въ механикѣ: онъ

болѣе плодовитъ, чѣмъ выводъ этихъ уравненій, сдѣланный нами въ § 62, 63 и 64.

Если точка m, находясь подъ дѣйствіемъ силы P, не можетъ покинуть поверхности (фиг. 16), то ее можно разсматривать какъ свободную, находящуюся подъ дѣйствіемъ не только силы P но и направленной по внутренней нормали реакціи N. Поэтому равнодѣйствующая силъ P, и N, дѣйствуя на точку какъ на свободную, равна mj и называется *ускорительною* силою. Изъ (фиг. 16) видно, что силы P и $(-mj)$ слагаются въ $(-N)$, которая уравновѣшивается реакціею N. Примемъ обозначенія:

P дѣйствующая сила,
$(-mj)$ сила инерціи,
$(-N)$ потерянная сила.

Мы видѣли, что: 1) *Потерянная сила* $(-N)$ *есть равнодѣйствующая дѣйствующей силы* P *и силы инерціи* $(-mj)$; 2) *Потерянная сила уравновѣшивается реакціею связи.* Въ этихъ двухъ положеніяхъ и состоитъ принципъ Даламбера. Проекціи силы P обозначаемъ черезъ X, Y, Z. Не трудно видѣть, что: проекціи силы $(-mj)$ инерціи суть:

$$\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right);\ \left(-m\frac{d^2y}{dt^2}\right);\ \left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

Фиг. 16.

проекціи потерянной силы суть:

$$\left.\begin{aligned} &X - m\frac{d^2x}{dt^2} \\ &Y - m\frac{d^2y}{dt} \\ &Z - m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (213)$$

§ 75. Уравненія движенія несвободной точки, выводимыя изъ начала Даламбера. Эго начало можетъ быть выражено еще такъ: *уравненія движенія несвободной точки суть уравненія равновѣсія потерянной силы*, проложенія которой выражаются формулами (213). Поэтому достаточно, вмѣсто X, Y, Z, подставить въ уравненія равновѣсія (203) величины (213)), чтобы получить уравненія движенія несвободной точки, которыя поэтому будутъ таковы:

$$\left.\begin{aligned} X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \\ \delta U + \lambda\delta\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (214)$$

гдѣ $f(x, y, z) = \alpha$ есть уравненіе связи.

Если точка подчинена двумъ связамъ, то надо пользоваться не (203), а (212). Тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ \lambda_1\delta\alpha + \lambda_2\delta\beta + \delta U = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (215)$$

§ 76. Сохраненіе живой силы въ движеніи точки. Уравненія (215) могутъ быть представлены такъ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} = X\,\lambda_1\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial F}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = Y\,\lambda_1\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial F}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = Z\,\lambda_1\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (216)$$

Помножимъ 1-ое изъ этихъ уравненій (216) на dx, 2-ое на dy, 3-е на dz и сложимъ. Получимъ:

$$m\left[dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2} + dz\frac{d^2z}{d^2t}\right] = Xdx + Ydy + Zdz +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)\lambda_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz\right)\lambda_2 \quad . \; (217)$$

Два послѣдніе члена правой части этого уравненія равны нулю вслѣдствіе существованія уравненій связей:

$$f\;(x, y, z) = 0$$
$$F\;(x, y, z) = 0.$$

Лѣвая часть уравненія (217) равна $d\left(\frac{mV^2}{2}\right)$, потому по (89)

$$\frac{m\dot{V}^2}{2} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \; . \; . \; . \; . \; . \; (218)$$

дифференцируя же (218), получимъ:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = m\left[dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{dy^2}{dt^2} + dz\frac{dz^2}{dt^2}\right] \; . \; . \; . \; . \; . \; (219)$$

Итакъ (217) принимаетъ замѣчательный видъ:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz \; . \; . \; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (220)$$

Въ § 24-омъ мы сказали, что въ большомъ количествѣ случаевъ приращеніе живой силы равно работѣ. Выведя (220) изъ общей теоріи и припоминая, что $Xdx + Ydy + Zdz$, согласно (184), есть элементарная работа, заключаемъ что, согласно (220), *дифференціалъ живой силы равенъ элементарной работѣ.* Это уже похоже на свойство указанное въ § 24-омъ.

Если данныя силы имѣютъ потенціалъ (когда именно онѣ имѣютъ его укажемъ впослѣдствіи въ § 136), то

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (221)$$

Слѣдовательно:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

или

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU \quad \ldots\ldots\ldots \quad (222)$$

Сравнивая съ (220), получимъ:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (223)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{mV^2}{2} = U + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (224)$$

Мы теперь вывели уже изъ общей теоріи законъ (224) сохраненія живой силы, который былъ только указанъ въ формулѣ (51).

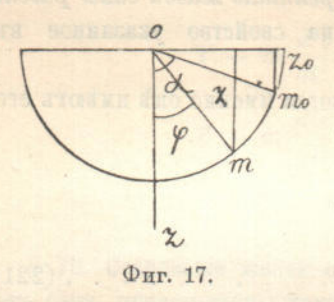
При этомъ необходимо указать на важное значеніе уравненія (222). Оно показываетъ, что дифференціалъ потенціальной функціи равенъ элементарной работѣ.

Все сказанное въ этомъ параграфѣ само по себѣ имѣетъ весьма важное значеніе, какъ мы это въ особенности увидимъ въ § 134, но кромѣ того существованіе потенціальной функціи облегчаетъ значительно рѣшеніе механическихъ вопросовъ. Такъ, напримѣръ, скорость находится весьма просто. Дѣйствительно изъ (224) непосредственно слѣдуетъ:

$$v = \sqrt{\frac{2(U+C)}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (225)$$

Приложимъ теорію потенціальной функціи къ изслѣдованію движенія математическаго маятника.

§ 77. *Математическій маятникъ.* Подъ этимъ названіемъ разумѣютъ отвлеченіе отъ обыкновеннаго физическаго маятника. Именно математическимъ маятникомъ называютъ тяжелую точку m укрѣпленную на концѣ нерастяжимой и невѣсомой нити, другой конецъ которой укрѣпленъ въ неподвижной точкѣ. Задачу о движеніи математическаго маятника, какъ болѣе простую, рѣшаютъ для того, чтобы потомъ перейти (какъ мы это и сдѣлаемъ въ § 201) къ изученію маятника физическаго.



Фиг. 17.

Отклонимъ маятникъ (фиг. 17) на уголъ α отъ вертикали и предоставимъ ему затѣмъ двигаться подъ вліяніемъ тяжести mg (беремъ ось z по вертикали внизъ). Потенціалъ тяжести, какъ мы видѣли въ § 29-омъ равенъ mgz. Итакъ

$$U = mgz \quad \dots\dots\dots\dots \quad (226)$$

Слѣдовательно (224) приметъ видъ:

$$\frac{mv^2}{2} = mgz + C \quad \dots\dots\dots\dots \quad (227)$$

Изъ начальныхъ данныхъ, получимъ

$$C = -mgz_0,$$

гдѣ z_0 есть координата начальнаго положенія маятника. Слѣдовательно (227) принимаетъ видъ:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(z - z_0)$$

или

$$v^2 = 2g(z - z_0) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (228)$$

Вотъ скорость уже и найдена. Мало того, уравненіе (228) даетъ намъ возможность прослѣдить общій хорактеръ движенія маятника. Сдѣлаемъ это. Въ начальномъ положеніи, $z = z_0$ и потому по (228) скорость $v = 0$. Подъ дѣйствіемъ тяжести z увеличивается, и скорость по (228) возрастаетъ. Она будетъ наибольшая, когда z получитъ наибольшее значеніе равное длинѣ l маятника, затѣмъ маятникъ будетъ подниматься по дугѣ изъ этого низкаго положенія, и когда z опять уменьшится до z_0, скорость опять сдѣлается, согласно (228), равно нулю. Въ этомъ положеніи, при окончаніи полуколебанія, маятникъ будетъ находиться въ тѣхъ же условіяхъ какъ и въ началѣ но по другую сторону вертикали, проходящей чрезъ точку подвѣса. Онъ произведетъ обратное движеніе и дойдетъ до начальнаго положенія, откуда пойдетъ опять по прежнему и т. д., движеніе его будетъ колебаніе по дугѣ окружности, описанной изъ точки подвѣса радіусомъ l.

Изслѣдуемъ одно такое колебаніе. Обозначимъ чрезъ φ уголъ, составляемый маятникомъ съ осью z въ концѣ времени t послѣ выхода изъ начальнаго положенія. Примемъ начальное положеніе m_0 за начало дугъ описываемыхъ точкою m. Изъ условій имѣемъ:

$$s = l \cdot (\alpha - \varphi)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = - l \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$z = l \cdot \cos \varphi$$

$$z_0 = l \cdot \cos \alpha.$$

Вставляя эти величины въ (228), получимъ:

$$l^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\, gl \cdot (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (229)$$

Во время перваго полуколебанія φ уменьшается, поэтому $\frac{d\varphi}{dt}$ отрицательно; такъ что изъ (229) получимъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{2\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

Отсюда

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{2\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (230)$$

Интегрированіе этого уравненія, и слѣдовательно точное рѣшеніе задачи, приводитъ къ эллиптическимъ функціямъ. Рѣшимъ ее приблизительно, разсматривая только малыя колебанія, при которыхъ α и φ достаточно малы (напримѣръ $\alpha = 1'$).

Разложивъ $\cos \varphi$ и $\cos \alpha$ по восходящимъ степенямъ перемѣнныхъ φ и α и откинувъ члены шестого и высшихъ порядковъ, получимъ:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{\sqrt{2\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = (\alpha^2 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Разложивъ $\left(1 - \frac{\alpha_2 + \varphi_2}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}$ по биному Ньютона и откинувъ члены 4-го и высшихъ порядковъ, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = (\alpha^2 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{24}\right).$$

Подставивъ въ (230), получимъ:

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2 + \varphi^2)}{24}\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \varphi^2}}\, d\varphi$$

или

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right) \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} + \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}{24} \cdot d\varphi$$

Интегрируя, получимъ:

$$t + const = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right) arc\cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)$$

$$+ \frac{1}{48} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\varphi \sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} - \alpha^2 \cdot arc\cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)\right].$$

При $t = 0$, $\varphi = \alpha$, слѣдовательно $const = 0$. Поэтому

$$t = \frac{1}{48} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \varphi \sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) ar\cos\left(\frac{\alpha}{\varphi}\right) \quad . \; . \; (231)$$

Вотъ уравненіе движенія маятника во время 1-го колебанія. Оно тѣмъ точнѣе выражаетъ истину, чѣмъ менѣе было α.

Опредѣлимъ продолжительность T цѣлаго колебанія и продолжительность T' полуколебанія.

Для опредѣленія T нужно положить въ (231)

$$t = T; \quad \varphi = -\alpha.$$

Получимъ:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (232)$$

Для опредѣленія T' нужно положить:

$$t = T'; \quad \varphi = 0.$$

Получимъ:

$$T' = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (233)$$

Если бы мы пренебрегли квадратами α, то получили бы извѣстныя въ элементарной физикѣ формулы:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (234)$$

$$T' = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (235)$$

Данныя здѣсь формулы (232) и (233) точнѣе формулъ (234) и (235).

ОТДѢЛЪ II.

Равновѣсіе неизмѣняемой системы.

ГЛАВА I.

Сложеніе силъ и паръ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему.

§ 78. Неизмѣняемая система. Неизмѣняемою системою называется такая система точекъ, въ которой взаимныя разстоянія между точками не измѣняются. Такая система можетъ быть названа абсолютно твердою.

Встрѣчающіяся въ природѣ тѣла, даже такія твердыя какъ сталь, алмазъ и проч., строго говоря, не представляютъ собою системъ неизмѣняемыхъ, потому что взаимныя разстоянія между ихъ частицами измѣняются: увеличиваются при нагрѣваніи, измѣняются при упругой деформаціи, а также и вслѣдствіе существующихъ во всякомъ тѣлѣ молекулярныхъ движеній. Какъ и всегда мы сначала упрощаемъ задачу, не принимая въ соображеніе всѣхъ подробностей, разсужденіе же объ этихъ подробностяхъ вводимъ послѣ рѣшенія вопроса въ общемъ видѣ. Неизмѣняемая система и представляетъ собою отвлеченіе отъ понятія о физическомъ твердомъ тѣлѣ.

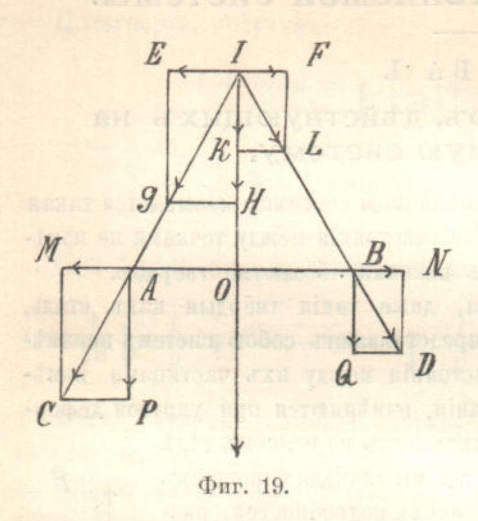
§ 79. Перенесеніе точки приложенія силы. Ученіе о равновѣсіи неизмѣняемой системы основано на слѣдующемъ положеніи: *двѣ равныя и противуположныя силы, приложенныя къ точкамъ* A *и* B *неизмѣняемой системы и направленныя по прямой* AB, *взаимно уничтожаются.*

Фиг. 18.

Положеніе это приводитъ къ слѣдующему важному заключенію: *силу* P, *приложенную къ какой-нибудь точкѣ* A (фиг. 18) *неизмѣняемой системы, можно перенести, не измѣняя ея дѣйствія, въ любую точку* B *системы, лежащую въ направленіи этой силы.* Въ самомъ дѣлѣ, прилагая къ точкамъ A и B взаимно уничтожающіяся силы $(-P)$ и $(+P)$ и замѣчая, что оказавшіяся приложенными въ точкѣ A силы взаимно уничтожаются, убѣждаемся, что вмѣсто данной силы приложенной въ A осталась равная ей сила, приложенная въ точкѣ B, что и требовалось доказать.

§ 80. Сложеніе такихъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, силъ, продолженія которыхъ взаимно пересѣкаются въ одной точкѣ. Если на различныя точки неизмѣняемой системы дѣйствуютъ силы, сходящіяся въ одной точкѣ O, то всѣ онѣ могутъ быть перенесены въ одну точку и послѣдовательнымъ примѣненіемъ правила параллелограмма могутъ быть замѣнены одною равнодѣйствующею.

§ 81. Сложенiе двухъ параллельныхъ и направленныхъ въ одну сторону силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему. Положимъ (фиг. 19) что на точку A неизмѣняемой системы дѣйствуетъ сила P, а на точку B той же системы дѣйствуетъ сила Q параллельная силѣ P и направленная въ ту же сторону. Покажемъ, что такiя двѣ силы тоже приводятся къ одной равнодѣйствующей.



Фиг. 19.

Положимъ, что сила P представляется векторомъ AP, сила Q — векторомъ BQ. Приложимъ къ A и B по прямой AB двѣ равныя и противоположныя силы AM и BN; онѣ, какъ взаимно уничтожающiяся, не измѣнятъ равновѣсiя *). Силы AP и AM могутъ быть замѣнены равнодѣйствующею AC. Силы BQ и BN могутъ быть замѣнены равнодѣйствующею BD. Слѣдовательно данныя силы P и Q можно замѣнить силами AC и BP, сходящимися въ какой-нибудь точкѣ I и приводящимися поэтому къ одной равнодѣйствущей.

Опредѣлимъ величину и направленiе этой равнодѣйствущей.

По перенесенiи въ точку I силы AC и BD представятся, положимъ, векторами IG и IL. Проведемъ IO параллельно заданнымъ силамъ и прямую EIF параллельно прямой AB. Сила IG разлагается на IH и IE. Сила IL разлагается на IK и IF. Изъ равенства параллелограммовъ и изъ условiя $AM = BN$ слѣдуетъ:

$$IE = IF.$$

Эти силы, согласно § 79, взаимно уничтожаются. Кромѣ того имѣемъ

$$IH = AP = P$$
$$IK = BQ = Q.$$

Равнодѣйствующая оставшихся силъ IH и IK имѣетъ одно съ ними направленiе и равна ихъ суммѣ. Итакъ: *равнодѣйствующая взаимно параллельныхъ и въ одну сторону направленныхъ силъ имѣетъ одно съ ними направленiе и равна ихъ суммѣ.*

На основанiи § 79 можно перенести точку приложенiя этой равнодѣйствущей въ точку пересѣченiя O прямыхъ IH и AB.

Опредѣлимъ положенiе точки O.

---

*) Въ дальнѣйшемъ мы часто будемъ пользоваться этимъ прiемомъ введенiя вспомогательныхъ взаимно-уничтожающихся силъ.

Изъ подобія треугольниковъ IGH и IAO слѣдуетъ

$$\frac{IH}{GH} = \frac{IO}{AO}.$$

Изъ подобія треугольниковъ IKL и IOB слѣдуетъ:

$$\frac{IK}{KL} = \frac{IO}{BO}.$$

Но $KL = GH$. Слѣдовательно:

$$\frac{IH}{IK} = \frac{BO}{AO}.$$

или:

$$\frac{P}{Q} = \frac{BO}{AO} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (236)$$

(236) выражаетъ, что: *точка приложенія равнодѣйствующей двухъ одинаково направленныхъ взаимно параллельныхъ силъ, лежащая на прямой, соединяющей точки A и B приложенія этихъ силъ, находится отъ этихъ точекъ A и B въ разстояніяхъ обратно-пропорціональныхъ силамъ.*

§ 82. Центръ параллельныхъ силъ. Положимъ, что на неизмѣняемую систему дѣйствуетъ нѣсколько взаимно-параллельныхъ одинаково направленныхъ силъ P_1, P_2, $P_3 \ldots$ (фиг. 20), Будемъ складывать эти силы по правилу предыдущаго параграфа постепенно, пользуясь тою формулою Аналитической Геометріи, по которой опредѣляются координаты точки, дѣлящей разстояніе между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) въ отношеніи m къ n. Координаты точки C приложенія равнодѣйствующей силъ P_1 и P_2 будутъ:

$$x_C = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2} \quad \ldots\ldots\ldots (237)$$

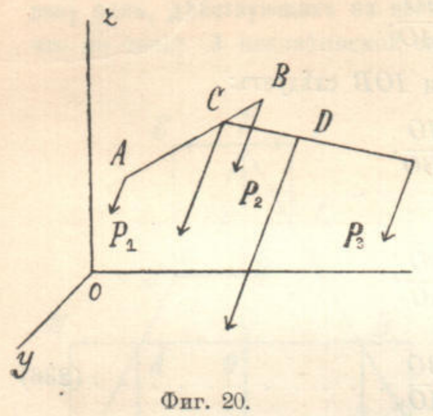
$$y_C = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2} \quad \ldots\ldots\ldots (238)$$

$$z_C = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2} \quad \ldots\ldots\ldots (239)$$

Опредѣлимъ теперь координаты точки D приложенія равнодѣйствующей силъ: P_3 и равнодѣйствующей приложенной въ C. Получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x_D &= \frac{(P_1 + P_2)\, x_c + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} \\ y_D &= \frac{(P_1 + P_2)\, y_c + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3} \\ z_D &= \frac{(P_1 + P_2)\, z_c + P_3 z_3}{P_1 + P_2 + P_3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (240)$$

Благодаря равенствамъ (237) и (238) эти формулы (239) преобразуются въ такія:



Фиг. 20.

$$\left.\begin{aligned} x_D &= \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3} \\ y_D &= \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3}{P_1 + P_2 + P_2} \\ z_D &= \frac{P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3}{P_1 + P_2 + P_3} \end{aligned}\right\} . \quad (241)$$

Затѣмъ находимъ координаты точки приложенія той силы, которая есть равнодѣйствующая силы приложенной въ D и силы P_4, и такъ далѣе.

Законъ образованія формулъ для координатъ послѣдовательно находимыхъ точекъ приложенія равнодѣйствующей все большаго и большаго числа силъ уже выясняется изъ формулъ (237), (238), (239), (241). Уже видно, что координаты точки приложенія равнодѣйствующей всѣхъ заданныхъ параллельныхъ силъ, называемой *центромъ параллельныхъ силъ*, будутъ

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}$$

Въ случаѣ дѣйствія силы тяжести $P = mg$ и получится:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} \\ \bar{y} &= \frac{\Sigma my}{\Sigma m} \\ \bar{z} &= \frac{\Sigma mz}{\Sigma m} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad . \; (242)$$

Изъ этихъ формулъ (242) явствуетъ, между прочимъ, что положеніе центра параллельныхъ силъ не зависитъ отъ общаго ихъ направленія; такъ что, если силы, прилагаясь къ тѣмъ же точкамъ неизмѣняемой системы, измѣнятъ свое направленіе, оставаясь взаимно-параллельными, то центръ этихъ параллельныхъ силъ не измѣнитъ своего положенія въ неизмѣняемой системѣ.

Примѣромъ центра параллельныхъ силъ можетъ служить центръ тяжести. Тяжесть дѣйствуетъ на всѣ точки тѣла, размѣры котораго ничтожны съ размѣрами земного шара, по прямымъ взаимно параллельнымъ (отвѣснымъ); точка приложенія всѣхъ этихъ силъ называется *центромъ тяжести*.

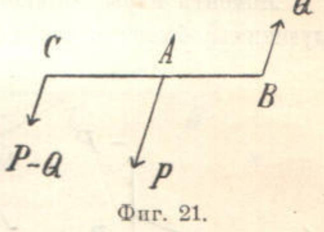
§ 83. Сложеніе двухъ силъ взаимно-параллельныхъ, но направленныхъ въ противуположныя стороны. Возьмемъ двѣ такія силы P и Q (фиг. 21). Выберемъ на прямой AB, соединяющей ихъ точки приложенія A и B такую точку C, чтобы:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{Q}{P-Q}$$

и чтобы точка A приложенія большей силы P лежала между B и C.

Согласно § 81-му можно разложить силу P на силу $P-Q$ приложенную въ точкѣ C и на силу $(-Q)$, приложенную въ точкѣ B.

Силы $(+Q)$ и $(-Q)$, приложенныя въ B взаимно уничтожаются и у насъ останется одна сила $P-Q$ приложенная въ C, которая замѣнила собою совокупность данныхъ силъ P и Q. Слѣдовательно: *равнодѣйствующая двухъ взаимно параллельныхъ но противуположно направленныхъ силъ P и Q параллельна даннымъ силамъ, направлена въ сторону большей изъ данныхъ силъ, и точка приложенія ея находится на внѣшней части отрѣзка AB опредѣляемаго точками приложенія данныхъ силъ, въ сторонѣ большей силы; причемъ равнодѣйствующая равна разности данныхъ силъ. Если A есть точка приложенія большей изъ данныхъ силъ, C точка приложенія равнодѣйствующей, то*



Фиг. 21.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{Q}{P-Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (243)$$

§ 84. Пара силъ. Въ случаѣ силъ параллельныхъ, но противуположно направленныхъ, съ уменьшеніемъ большей силы P, равнодѣйствующая $(P-Q)$ уменьшается, разстояніе же AC, какъ видно изъ (243), увеличивается. Наконецъ, при

$$P = Q$$

разстояніе AC сдѣлается безконечно большимъ. равнодѣйствующая же $(P-Q)$ обратится въ нуль. Слѣдовательно двѣ равныя и параллельныя, но противуположныя, силы приводятся къ силѣ равной нулю, дѣйствующей на безконечно большомъ разстояніи. О такомъ дѣйствіи мы никакого понятія не имѣемъ. Приведеніе такой совокупности силъ къ такой непонятной равнодѣйствующей никакой пользы не приноситъ. Поэтому знаме-

нитый французскій математикъ Poinsot предложилъ разсматривать двѣ равныя, параллельныя, но противуположныя силы, какъ особый элементъ, равновѣсія названный имъ *парою силъ* и далъ теорію паръ, значительно упрощающую общую теорію равновѣсія неизмѣняемой системы.

На основаніи сказаннаго въ § 79-омъ можно всегда перенести силы, составляющія пару по ихъ направленію такъ, чтобы прямая AB (фиг. 22), соединяющая ихъ точки приложенія, была къ нимъ перпендикулярна. Такая прямая AB называется *плечомъ пары*.

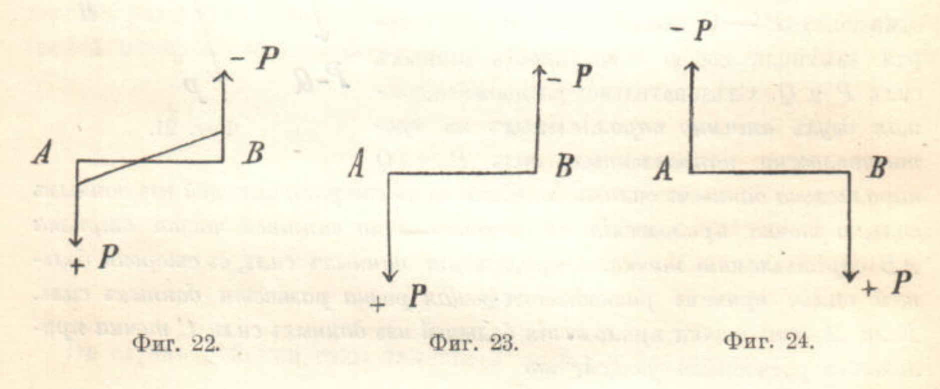
Произведеніе

$$P \,.\, AB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (244)$$

одной изъ силъ, составляющихъ пару, на плечо называется *моментомъ пары*.

Прямая, проведенная чрезъ средину плеча перпендикулярно къ плоскости пары, называется *осью пары*.

Моментъ пары обыкновенно представляютъ себѣ геометрически слѣдующимъ образомъ: откладываютъ равную ему длину по оси пары въ та-



Фиг. 22. Фиг. 23. Фиг. 24.

кую сторону, чтобы наблюдателю, стоящему на плоскости пары съ туловищемъ направленнымъ по моменту, пара представлялась стремящеюся повернуть систему по направленію движенія стрѣлки часовъ. Такимъ образомъ для пары (фиг. 23) моментъ надо отложить подъ плоскость чертежа для пары же (фиг. 24) моментъ надо отложить надъ плоскостью чертежа.

§ 85. Перенесеніе паръ. Докажемъ, что пару можно перенести, не измѣняя ея дѣйствія, какъ угодно, лишь бы не измѣнилось направленіе ея оси.

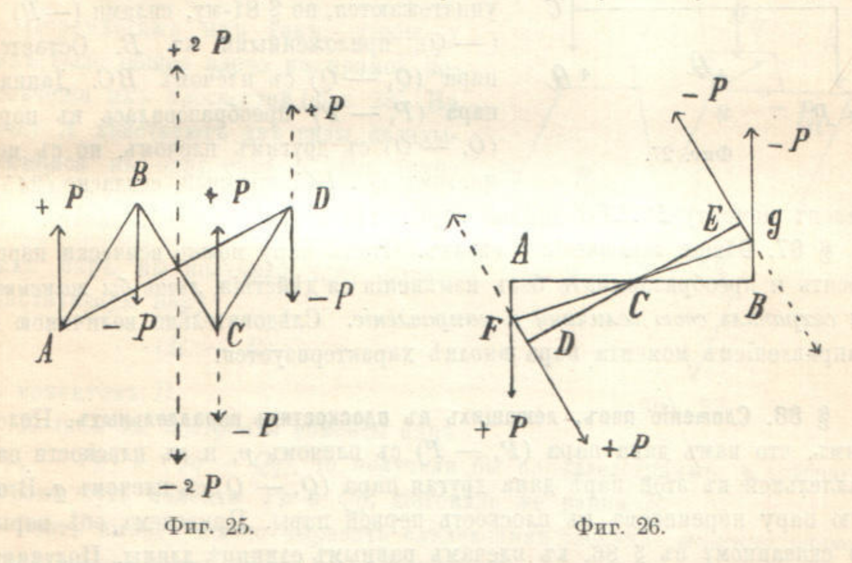
I) *Всякая пара можетъ быть перенесена въ плоскость параллельную ея плоскости.* Возьмемъ прямую CD (фиг. 25) равную и параллельную плечу AB данной пары. Дѣйствіе данной пары не измѣнится, если мы приложимъ въ точкѣ C равныя и противуположныя силы $(+P)$ и $(-P)$ и въ точкѣ D равныя и противуположныя силы $(+P)$ и $(-P)$.

Силы B $(-P)$ и C $(-P)$ сложатся въ одну силу $(-2P)$, приложенную въ пересѣченіи m діагоналей параллелограмма $ABCD$. Силы AP и DP сложатся въ одну силу $2P$, приложенную въ точкѣ m.

Сила $2P$ и $(-2P)$, какъ равныя и противуположныя, приложенныя въ одной точкѣ, взаимно уничтожатся.

Останутся силы CP и D $(-P)$ представляющія собою данную пару, перенесенную въ плоскость параллельную ея плоскости.

II) *Всякая пара можетъ быть повернута въ своей плоскости около средины плеча безъ измѣненія ея дѣйствія.* Проведемъ чрезъ средину C плеча данной пары (фиг. 26) прямую DE равную плечу AB и дѣля-



Фиг. 25. Фиг. 26.

щуюся пополамъ въ точкѣ C. Въ концѣ D этой прямой приложимъ двѣ взаимно уничтожающіяся силы $(+P)$ и $(-P)$ перпендикулярныя къ DE, и въ концѣ E сдѣлаемъ тоже самое. Перенеся силы по ихъ направленію. получимъ пару P $(-P)$ съ плечомъ DE, двѣ силы приложенныя къ F и двѣ силы приложенныя въ G. Равнодѣйствующая силъ приложенныхъ въ G проходитъ чрезъ C и равна и противуположна равнодѣйствующей силъ приложенныхъ въ F, тоже проходящей чрезъ C. Эти равнодѣйствующія взаимно уничтожаются, и остается пара съ плечомъ DE, представляющая собою данную пару, повернутую около C.

Изъ совокупности доказанныхъ въ настоящемъ параграфѣ теоремъ слѣдуетъ, что пару можно какъ угодно переносить безъ измѣненія ея дѣйствія, если только не измѣнять направленія ея момента при такомъ перенесеніи.

86. Преобразованіе паръ. Пару можно еще преобразовывать, безъ измѣненія ея дѣйствія, въ другую, имѣющую другое плечо и другія силы, лишь бы моментъ (произведеніе силы на плечо) оставался тотъ же.

Возьмемъ пару $(P, -P)$ приложенную къ плечу AB (фиг. 27); на продолженіи плеча AB возьмемъ точку C. Приложимъ къ B двѣ равныя и противуположныя силы Q и $(-Q)$ перпендикулярныя къ плечу. Приложимъ тоже къ C двѣ равныя и противуположныя силы Q и $(-Q)$ перпендикулярныя къ плечу. При этомъ выберемъ Q такъ, чтобы

$$Q \,.\, BC = P \,.\, AB \quad . \; . \; (245)$$

Фиг. 27.

Силы P и Q, приложенныя къ A и C уничтожаются, по § 81-му, силами $(-P)$ и $(-Q)$, приложенными къ B. Остается пара $(Q, -Q)$ съ плечомъ BC. Данная пара $(P, -P)$ преобразовалась въ пару $(Q, -Q)$ съ другимъ плечомъ, но съ моментомъ $Q \,.\, BC$, который, согласно (245), равенъ моменту $P \,.\, AB$ данной пары. Что и требовалось доказать.

§ 87. Общее заключеніе о парахъ. Итакъ пару можно всячески переносить и преобразовывать безъ измѣненія ея дѣйствія, *лишь бы моментъ ея сохранялъ свою величину и направленіе.* Слѣдовательно величиною и направленіемъ момента пара вполнѣ характеризуется.

§ 88. Сложеніе паръ, лежащихъ въ плоскостяхъ параллельныхъ. Положимъ, что намъ дана пара $(P, -P)$ съ плечомъ p, и въ плоскости параллельной къ этой парѣ дана другая пара $(Q, -Q)$ съ плечомъ q. Вторую пару перенесемъ въ плоскость первой пары. Приведемъ обѣ пары, по сказанному въ § 86, къ плечамъ равнымъ единицѣ длины. Получимъ такія пары: $(Pp, -Pp)$ и $(Qq, -Qq)$, моменты которыхъ Pp и Qq равны моментамъ данныхъ паръ.

Перемѣщаемъ вторую пару такъ, чтобы плечо ея совпало съ плечемъ первой пары и чтобы точка приложенія силы $(+Pp)$ совпала съ точкою приложенія силы $(+Qq)$. Если направленія этихъ силъ совпадаютъ, то получимъ равнодѣйствующую пару.

$$[(Pp + Qq), -(Pp + Qq)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (246)$$

Если направленія силъ $(+Pp)$ и $(+Qq)$ противуположны, то получимъ равнодѣйствующую пару

$$[(Pp - Qq), -(Pp - Qq)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (247)$$

По построенію плечи паръ (246) и (247) равны единицѣ. Слѣдовательно моментъ пары (246) равенъ

$$Pp + Qq.$$

Моментъ пары (247) равенъ

$$Pp - Qq.$$

Этотъ выводъ можно выразить такими словами: *Моментъ равнодѣйствующей пары равенъ алгебраической суммѣ моментовъ составляющихъ паръ, если послѣднія лежатъ въ плоскостяхъ взаимно параллельныхъ.*

§ 89. Сложеніе паръ, лежащихъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ. Приведемъ данныя пары къ плечамъ равнымъ единицѣ. Получимъ пары:

$$(Pp, - Pp)$$
$$(Qq, - Qq).$$

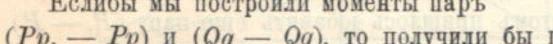
Перемѣстимъ ихъ такъ, чтобы у нихъ было общее плечо на прямой пересѣченія ихъ плоскостей (фиг. 28). На точку A дѣйствуютъ двѣ силы, складывающіяся въ одну силу R. На точку B дѣйствуютъ двѣ силы, складывающіяся въ одну силу $(- R)$. Вмѣсто данныхъ паръ мы получили одну равнодѣйствующую пару

$$(R, - R)$$

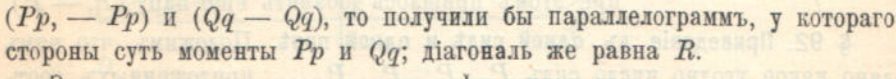
съ моментомъ R.

Фиг. 28.

Еслибы мы построили моменты паръ



$(Pp, - Pp)$ и $(Qq - Qq)$, то получили бы параллелограммъ, у котораго стороны суть моменты Pp и Qq; діагональ же равна R.



Этотъ выводъ можно выразить слѣдующими словами: *моментъ равнодѣйствующей пары равенъ геометрической суммѣ моментовъ составляющихъ паръ, если послѣднія лежатъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ.*

ГЛАВА II.

Приведеніе силъ, дѣйствующихъ на абсолютно твердое тѣло, къ простѣйшимъ системамъ силъ.

§ 90. Общее замѣчаніе. Силы, дѣйствующія на точку, всегда приводятся къ одной равнодѣйствующей.

Силы, дѣйствующія на различныя точки неизмѣняемой системы, не всегда приводятся къ одной равнодѣйствующей. Въ послѣдующихъ параграфахъ мы покажемъ, что:

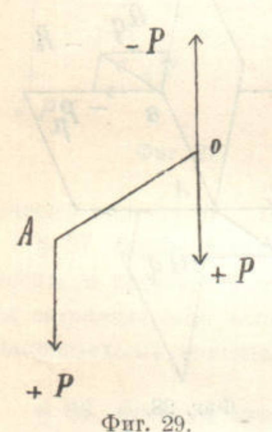
1) силы, дѣйствующія на неизмѣняемую систему, всегда могутъ быть приведены къ двумъ непараллельнымъ и непересѣкающимся силамъ;

2) силы, дѣйствующія на неизмѣняемую систему, всегда могутъ быть

приведены къ совокупности равнодѣйствующей силы и равнодѣйствующей пары;

3) упомянутыя подъ № 2 равнодѣйствующія сила и пара могутъ быть располагаемы одна относительно другой безконечнымъ числомъ способовъ, но всегда можно расположить ихъ и такъ, что равнодѣйствующая сила и моментъ равнодѣйствующей пары будутъ лежать на одной прямой и производить *винтовое усиліе*, называемое *динамою*.

§ 91. Перенесеніе силы. Докажемъ прежде всего слѣдующую весьма важную теорему: *Точку приложенія данной силы всегда можно перенести, безъ измѣненія ея дѣйствія на неизмѣняемую систему, въ любую точку пространства, если при этомъ добавить къ ней нѣкоторую пару.*



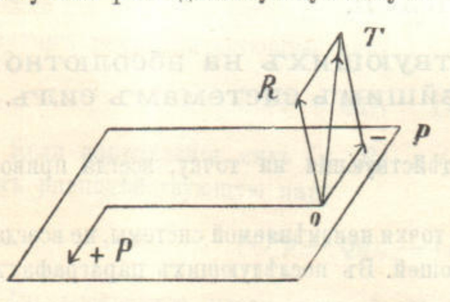
Фиг. 29.

Положимъ, что на неизмѣняемую систему дѣйствуетъ сила P (фиг. 29), приложенная въ точкѣ A, и требуется перенести точку приложенія этой силы въ точку O.

Дѣйствіе силы не измѣнится, если приложимъ въ O двѣ равныя P и параллельныя ей взаимно противуположныя силы. Полученную совокупность силъ можемъ разсматривать какъ силу P приложенную въ O и пару $(P, -P)$.

Данная сила P оказалась перенесенною въ O, но при этомъ пришлось добавить еще пару $(P, -P)$.

§ 92. Приведеніе къ одной силѣ и одной парѣ. Положимъ, что намъ дано какое угодно число силъ $P_1, P_2, P_3, P_4 \ldots$, приложенныхъ, соотвѣтственно, къ точкамъ $A, B, C, D \ldots$ неизмѣняемой системы. Перенесемъ, по теоремѣ предыдущаго параграфа, всѣ эти силы въ какую-либо точку O. Согласно съ упомянутою теоремою при этомъ придется добавить нѣсколько паръ. Сложивъ всѣ силы, перенесенныя въ точку O, получимъ равнодѣйствующую силу R. Сложивъ всѣ пары, получимъ равнодѣйствующую пару $(P, -P)$. Точка O, въ которую переносятся всѣ данныя силы называется *центромъ приведенія*.



Фиг. 30.

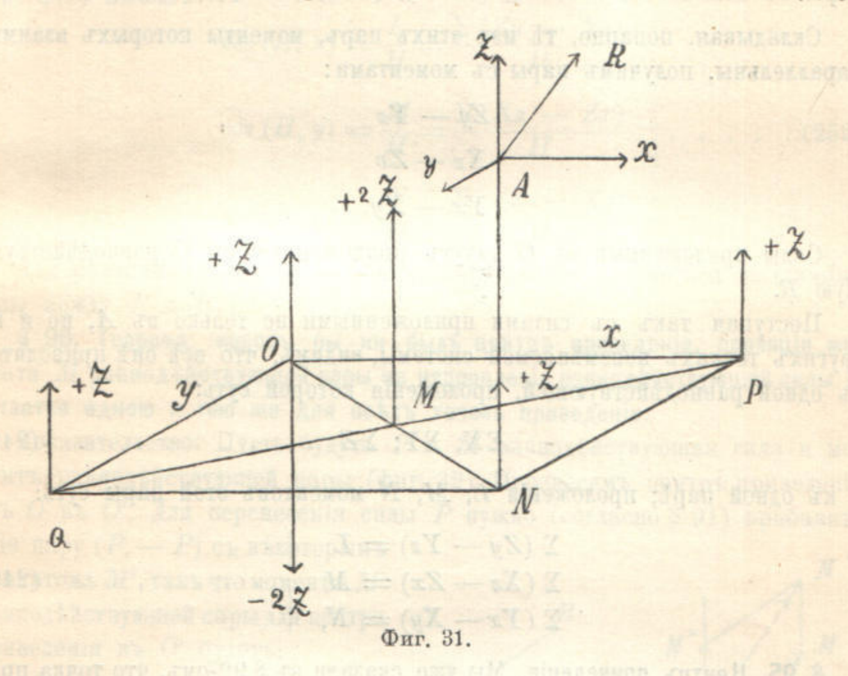
Итакъ: всякую совокупность силъ дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему можно всегда привести къ совокупности равнодѣйствующихъ силъ и пары.

§ 93. Приведеніе къ двумъ непараллельнымъ и непересѣкающимся силамъ. Положимъ, что у насъ (фиг. 30) исполнено уже приведеніе къ одной силѣ R и одной парѣ $(P, -P)$.

Сложимъ приложенныя въ точкѣ O силы R и $(-P)$ въ равнодѣйствующую T. Остались двѣ непараллельныя и непересѣкающіяся силы T и $(+P)$.

§ 94. Аналитическое выраженіе приведенія къ одной парѣ и одной силѣ. Представимъ себѣ, что на нѣкоторую точку A неизмѣняемой системы (фиг. 31) дѣйствуетъ сила R. Выберемъ какія-нибудь оси Декартовыхъ координатъ. Проведя чрезъ точку A прямыя, параллельныя этимъ осямъ, проложимъ на нихъ силу R. Получимъ три слагающихъ X, Y, Z.

Займемся пока одною слагающею Z. Перенесемъ Z по ея направленію такъ, чтобы точка приложенія N оказалась въ плоскости (x, y)



Фиг. 31.

Опустивъ изъ N перпендикуляры NP, NQ на оси иксовъ и игрековъ и обозначая координаты точки A чрезъ (x, y, z), получимъ:

$$OP = x$$

$$OQ = y.$$

Приложимъ въ началѣ координатъ O силы Z и $(-Z)$. Изъ нихъ силу Z оставимъ, а полученную теперь пару $(Z, -Z)$ съ плечомъ ON преобразуемъ къ плечу вдвое меньшему. Получимъ пару:

$$(2Z, -2Z)$$

съ плечомъ OM. Силу $2Z$ приложенную къ M разложимъ на силы Z и Z, приложенныя въ P и Q. Всего теперь осталось: остальная сила

$$Z = R \cos.(R, z)$$

приложенная въ O и двѣ пары:

$$(Z, -Z) \text{ съ плечомъ } x \text{ и моментомъ } (-Zx),$$
$$(Z, -Z) \text{ съ плечомъ } y \text{ и моментомъ } (+Zy).$$

Поступая точно такъ же съ приложенными въ A силами X и Y. получимъ:

силы: $R\cos(R, x)$; $R\cos(R, y)$; $R\cos(R, z)$

приложенныя въ O;

пары съ моментами: (Xz); $(-Zx)$; (Yx); $(-Xy)$; (Zy); $(-Yz)$.

Складывая, попарно, тѣ изъ этихъ паръ, моменты которыхъ взаимно параллельны, получимъ пары съ моментами:

$$Zy - Yz$$
$$Xz - Zx$$
$$Yx - Xy.$$

Силы приложенныя въ O дадутъ приложенную въ O равнодѣйствующую R.

Поступая такъ съ силами приложенными не только въ A, но и въ другихъ точкахъ неизмѣняемой системы, видимъ, что всѣ онѣ приводятся къ одной равнодѣйствующей, проложенія которой суть:

$$\Sigma X;\ \Sigma Y;\ \Sigma Z \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (248)$$

и къ одной парѣ; проложенія L, M, N моментовъ этой пары суть:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma(Zy - Yz) = L \\ \Sigma(Xz - Zx) = M \\ \Sigma(Yx - Xy) = N, \end{array}\right| \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (249)$$

§ 95. Центръ приведенія. Мы уже сказали въ § 92-омъ, что точка приложенія равнодѣйствующей силы называется *центромъ* приведенія. При выводѣ формулъ (248) и (249) мы принимали за центръ приведенія начало координатъ. Изъ способа, которымъ мы выводили эти формулы, видно, что какую бы точку мы ни принимали за центръ приведенія (и за начало координатъ) равнодѣйствующая сила P получится той же величины и того же направленія. Но для каждой точки приведенія получится своя особая равнодѣйствующая пара.

Приведеніе данныхъ силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, можетъ быть, слѣдовательно, исполнено безконечнымъ числомъ способовъ. Уголъ, составляемый равнодѣйствующею силою P и моментомъ равнодѣйствующей пары H, опредѣляется формулою:

$$\cos(P, H) = \cos(P, x) \cdot \cos(H, x) + (\cos P, y) \cdot \cos(H, y) +$$
$$+ \cos(P \cdot z) \cdot \cos(H, z) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (250)$$

причемъ изъ (248) имѣемъ:

$$\cos(P, x) = \frac{\Sigma X}{P}$$

$$\cos(P, y) = \frac{\Sigma Y}{P} \quad \ldots \ldots \ldots (251)$$

$$\cos(P, z) = \frac{\Sigma Z}{P}$$

изъ (249) имѣемъ:

$$\cos(H, x) = \frac{L}{H} = \frac{\Sigma(Zy - Yz)}{H}$$

$$\cos(H, y) = \frac{M}{H} = \frac{\Sigma(Xz - Zx)}{H} \quad \ldots \ldots (252)$$

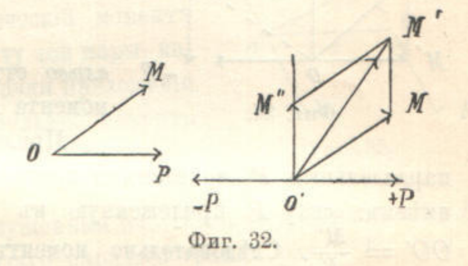
$$\cos(H, z) = \frac{N}{H} = \frac{\Sigma(Yx - Xy)}{H}$$

Для различныхъ центровъ приведенія будутъ получаться различные углы между P и H.

§ 96. Теорема: каковъ бы ни былъ центръ приведенія, проэкція момента M равнодѣйствующей пары на направленіе равнодѣйствующей силы P остается одною и тою же для всѣхъ точекъ приведенія.

Доказательство: Пусть будутъ P и M равнодѣйствующая сила и моментъ равнодѣйствующей пары (фиг. 32). Перенесемъ центръ приведенія изъ O въ O'. Для перенесенія силы P нужно (согласно § 91) прибавить еще пару $(P, -P)$ съ нѣкоторымъ моментомъ M'', такъ что моментъ M' равнодѣйствующей пары для центра приведенія въ O' будетъ:

$$\overline{M'} = \overline{M} + \overline{M''}$$



Фиг. 32.

Черточки надъ буквами обозначаютъ, что берется (согласно § 89) *геометрическая сумма.* Но M'' перпендикуляренъ къ P, такъ какъ P есть одна изъ силъ добавочной пары, имѣющей моментъ M''. Слѣдовательно, проэктируя моменты на направленіе P, получимъ:

$$M' \cos(M', P) = M \,.\, \cos(M, P) + M'' \cos(M'', P) =$$
$$= M \cos(M, P) + M'' \cos(90^\circ).$$

Слѣдовательно:

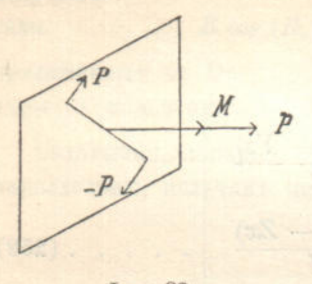
$$M' \,.\, \cos(M', P) = M \,.\, css(M, P),$$

что и требовалось доказать.

§ 97. Динама. Изъ всѣхъ приведеній совокупности силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, самое замѣчательное то, когда моментъ M

равнодѣйствующей пары лежитъ на одной прямой съ равнодѣйствующею силою P. Такая совокупность силы P и пары, имѣющей моментъ M направленный по силѣ P называется *динамою* (фиг. 33).

Въ динамѣ пара M стремится повернуть неизмѣняемую систему около силы P, а сила P стремится подвинуть тѣло по своему направленію: динама представляетъ собою винтовое усиліе. Если динама состоитъ изъ пары имѣющей моментъ M_0 и силы P, направленной по этому моменту, то величина:



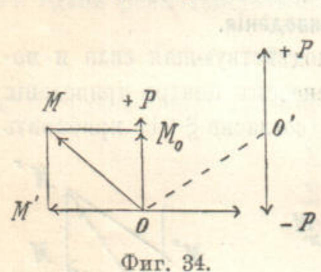
Фиг. 33.

$$\frac{M^0}{P} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (253)$$

называется *параметромъ* динамы. Прямая, по которой дѣйствуетъ P, называется *центральною осью* или *осью динамы*.

§ 98. Теорема: Всякая система силъ, дѣйствующая на неизмѣняемую систему, можетъ быть приведена къ динамѣ. Положимъ, что система силъ приведена къ совокупности силы P и пары съ моментомъ M при центрѣ приведенія O (фиг. 34). Разложимъ моментъ M на два момента изъ коихъ одинъ M_0 направленъ по P, другой M' перпендикуляренъ къ P.

Выберемъ другой центръ приведенія O' слѣдующимъ образомъ: возставимъ изъ O перпендикуляръ къ плоскости POM и отложимъ на немъ



Фиг. 34.

$$OO' = \frac{M'}{P}$$

влѣво отъ силы P. если смотрѣть съ конца момента M'.

Приложимъ въ O' двѣ силы равныя и параллельныя P, но взаимно противоположныя ($+P$) и ($-P$). Теперь имѣемъ: силу P приложенную въ O' и пару ($P, -P$) съ плечомъ $OO' = \frac{M'}{P}$. Слѣдовательно моментъ этой пары будетъ ($-M'$), такъ какъ она вращаетъ по стрѣлкѣ часовъ, если на нее смотрѣть не съ конца M, а съ конца ($-M'$).

Моменты ($+M$) и ($-M$) уничтожатся и останутся: сила P, приложенная въ O' и моментъ M_0 параллельный ей. Остается его перенести параллельно самому себѣ и получимъ *динаму* при центрѣ приведенія O'.

§ 99. Частные случаи приведенія силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему.

I) Если:

$$M_0 = 0,$$

то изъ (253) видимъ, что параметръ p динамы равенъ нулю. Изъ чер-

тежа (фиг. 34) видно, что въ общемъ случаѣ:

$$M_0 = M \cdot \cos (M, P).$$

Въ настоящемъ случаѣ слѣдовательно

$$M \cdot \cos (M \cdot P) = 0.$$

Итакъ: *совокупность всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, приводится къ одной силѣ, если* $M \cdot \cos (M, P) = 0$. Такую систему можно разсматривать какъ динаму, *параметръ которой равенъ нулю.*

II) Если:

$$P = 0.$$

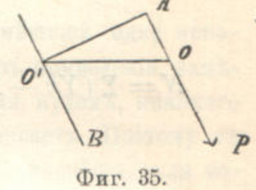
то изъ (253) вытекаетъ

$$p = \infty.$$

Итакъ: совокупность силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, эквивалентная одной парѣ, можетъ быть разсматриваема какъ динама, *параметръ которой равенъ безконечности* *).

§ 100. Статическіе моменты. Въ статикѣ (теоріи равновѣсія) неизмѣняемой системы чрезвычайно удобно пользоваться понятіями: *статическій моментъ* относительно оси и статическій моментъ относительно точки. Опредѣленіе этихъ понятій дается въ слѣдующихъ параграфахъ, гдѣ будетъ выяснена также ихъ тѣсная связь съ понятіемъ о парѣ.

§ 101. Статическій моментъ относительно точки. Статическимъ моментомъ силы P относительно точки O' (фиг. 35) называется *площадь параллелограмма $O'OPB$, построеннаго на силѣ P и на прямой OO' соединяющей точку приложенія силы P съ данною точкою O.*



Фиг. 35.

Не трудно видѣть, что статическій моментъ относительно точки равенъ моменту той пары, которая потребна для перенесенія точки приложенія силы P изъ O въ O'. Дѣйствительно: моментъ этой пары равенъ

$$P \cdot O'A,$$

гдѣ $O'A$ есть перпендикуляръ, опущенный изъ O' на направленіе силы P. Точно также и площадь упомянутаго параллелограмма равна $P \cdot O'A$.

Поэтому можно еще дать такое опредѣленіе: *статическимъ моментомъ силы P относительно точки O называется произведеніе $P \cdot O'A$ силы P на перпендикуляръ, опущенный изъ точки O' на направленіе силы P.*

§ 102. Статическій моментъ относительно оси. Статическимъ моментомъ силы относительно оси называется *произведеніе составленное изъ*

---

*) Теорія динамы получила широкое развитіе благодаря, въ особенности, работамъ Plüker'a и Ball'я.

Plüker. Neue Geometrie des Raumes.

Ball. Theory of screws.

проэкціи этой силы на плоскость перпендикулярную къ оси и изъ кратчайшаго разстоянія между силою и осью. Подъ осью здѣсь разумѣется какая-либо данная прямая.

Изъ этого опредѣленія вытекаетъ такое: статическій моментъ силы относительно оси равенъ статическому моменту проэкціи этой силы на плоскость перпендикулярную къ оси относительно точки пересѣченія оси съ ея кратчайшимъ разстояніемъ отъ силы.

Слѣдовательно, статическій моментъ силы относительно оси равенъ моменту пары, упомянутой въ предыдущемъ параграфѣ.

Слѣдовательно (см. § 88), статическіе моменты относительно данной оси складываются въ такой равнодѣйствующій статическій моментъ относительно той же оси, который равенъ алгебраической суммѣ составляющихъ статическихъ моментовъ.

§ 103. Статическіе моменты относительно осей координатъ совокупности силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему. Въ сложеніи силъ, разобранномъ въ § 94-омъ, Zy есть статическій моментъ силы Z относительно оси иксовъ; — Yz есть статическій моментъ силы Y относительно оси иксовъ, и такъ далѣе. Слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} L = \Sigma\,(Zy - Yz) &= \text{статическій моментъ данныхъ силъ} \\ &\quad\ \text{относительно оси иксовъ,} \\ &= \text{проложеніе на ось иксовъ момента} \\ &\quad\ \text{равнодѣйствующей пары,} \\ M = \Sigma\,(Xz - Zx) &= \text{статическій моментъ данныхъ силъ} \\ &\quad\ \text{относительно оси игрековъ,} \\ &= \text{проложеніе на ось игрековъ мо-} \\ &\quad\ \text{мента равнодѣйствующей пары,} \\ N = \Sigma\,(Yx - Xy) &= \text{статическій моментъ данныхъ силъ} \\ &\quad\ \text{относительно оси зедовъ,} \\ &= \text{проложеніе на ось зедовъ момента} \\ &\quad\ \text{равнодѣйствующей пары.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (254)$$

Итакъ, статическіе моменты совокупности данныхъ силъ относительно осей координатъ соотвѣтственно равны проложеніямъ на оси координатъ момента равнодѣйствующей пары. И тѣ и другія опредѣляются формулами (254).

§ 104. Удобства, представляемыя понятіемъ о статическомъ моментѣ. Статическіе моменты весьма упрощаютъ дѣло во многихъ случаяхъ при изслѣдованіи вращающихъ силъ.

Напримѣръ, вращающая сила p, приложенная къ ободу колеса радіуса R, уравновѣшивается силою P приложенною на разстояніи r отъ оси колеса, если

$$Rp = rP.$$

Проще сказать, что для поворота даннаго колеса требуется моментъ M, чѣмъ объяснять, что для его поворота требуется такая-то сила, прило-

женная на такомъ-то разстояніи отъ оси. Если же данъ моментъ M требуемый для поворота колеса, то соотношеніе между силою (параллельною плоскости колеса) и разстояніемъ ея отъ оси представляется формулою

$$M = P \cdot r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (255)$$

ГЛАВА III.

Условія равновѣсія неизмѣняемой системы.

§ 105. Условіе равновѣсія свободной неизмѣняемой системы. Если движеніе неизмѣняемой системы ничѣмъ не стѣсняется, то она можетъ быть въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, если моментъ равнодѣйствующей пары и равнодѣйствующая сила, а слѣдовательно и проложенія ихъ на оси координатъ равны нулю. Поэтому условія равновѣсія свободной неизмѣняемой системы таковы:

$$\Sigma X = 0$$
$$\Sigma Y = 0$$
$$\Sigma Z = 0$$
$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,(Zy - Yz) = 0 \\ \Sigma\,(Xz - Zx) = 0 \\ \Sigma\,(Yx - Xy) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (256)$$

§ 106. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, имѣющей одну неподвижную точку. Избравъ неподвижную точку за центръ приведенія, замѣчаемъ, что равнодѣйствующая сила, даже и не будучи нулемъ, никакого дѣйствія на неизмѣняемую систему произвести не можетъ. Поэтому въ настоящемъ случаѣ неизмѣняемая система будетъ въ равновѣсіи, если моментъ равнодѣйствующей пары, а слѣдовательно и его проложенія на оси будутъ равны нулю. Условія равновѣсія будутъ таковы:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,(Zy - Yz) = 0 \\ \Sigma\,(Xz - Zx) = 0 \\ \Sigma\,(Yx - Xy) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (257)$$

§ 107. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, способной только вращаться около нѣкоторой оси. Примемъ эту ось за ось зедовъ. Ни равнодѣйствующая сила, ни проложенія момента равнодѣйствующей пары на оси x или y не могутъ двинуть такую неизмѣняемую систему. Поэтому необходимое и достаточное условіе равновѣсія въ настоящемъ случаѣ будетъ:

$$\Sigma\,(Yx - Xy) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (258)$$

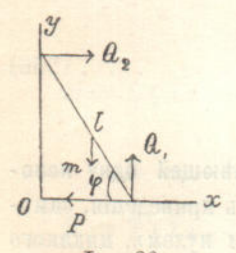
§ 108. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, способной вращаться около нѣкоторой оси Z **и поступательно двигаться по направленію этой оси.** Здѣсь неизмѣняемая система можетъ быть приведена въ движеніе поступательное только проэкціею ΣZ равнодѣйствующей силы на ось z, и во вращательное—проекціею момента равнодѣйствующей пары на ось z. Слѣдовательно для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma Z = 0 \\ \Sigma (Yx - Xy) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (259)$$

§ 109. Условіе равновѣсія неизмѣняемой системы, способной двигаться только параллельно данной плоскости (xy). Здѣсь неизмѣняемая система можетъ быть приведена въ движеніе только силами параллельными плоскости (x, y) и парою параллельною этой плоскости. Слѣдовательно, для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \\ \Sigma (Yx - Xy) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (260)$$

§ 110. Примѣръ. Опредѣлить положеніе равновѣсія балки l (фиг. 36), опирающейся однимъ концомъ въ горизонтальный полъ, другимъ о вертикальную стѣну, при чемъ нижній конецъ балки удерживается веревкою перекинутою чрезъ блокъ съ навѣшаннымъ на нее грузомъ P и предполагается, что между балкою и стѣною, а также между балкою и поломъ нѣтъ никакого тренія; вѣсъ балки равенъ m.



Фиг. 36.

Условія равновѣсія будутъ:

$$\Sigma X = -P + Q_2 = 0$$

$$\Sigma Y = -m + Q_1 = 0$$

$$\Sigma (xY - yX) = l \, . \, \cos\varphi \quad Q_1 - \frac{l \, . \, \cos\varphi}{2} m - l \, . \, \sin\varphi \, . \, Q_2 = 0.$$

Отсюда:

$$Q_1 = m; \quad Q_2 = P$$

$$tg\,\varphi = \frac{l \, . \, Q_1 - \frac{ml}{2}}{l \, . \, P} = \frac{m}{2P}.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что чѣмъ больше вѣсъ балки, тѣмъ больше долженъ быть уголъ φ, то-есть — тѣмъ круче она должна быть поставлена для равновѣсія.

Впослѣдствіи мы увидимъ, что существованіе тренія значительно измѣняетъ дѣло.

ГЛАВА IV.

О центрѣ тяжести.

§ 111. Общія формулы для опредѣленія центра тяжести. Центръ тяжести есть центръ параллельныхъ силъ тяжести точекъ системы. Поэтому координаты центра тяжести системы, состоящей изъ отдѣльныхъ точекъ, опредѣляются формулами (242).

Посмотримъ какъ опредѣляются координаты центра тяжести сплошнаго тѣла.

Обозначимъ чрезъ ρ плотность тѣла. Вырѣжемъ въ немъ мысленно безконечно малый параллелепипедъ, съ ребрами параллельными осямъ координатъ. Объемъ такого параллелепипеда будетъ:

$$dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

Масса его будетъ

$$m = \rho \quad dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

Вѣсъ каждаго такого элемента равенъ

$$mg = g \,.\, \rho \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

Слѣдовательно, формулы для опредѣленія координатъ центра тяжести сплошного тѣла получатся изъ формулъ (242) замѣною въ нихъ силъ P силами $g \,.\, \rho \,.\, dx\, dy\, dz$ и замѣною суммъ тройными интегралами, распространенными на весь объемъ даннаго тѣла. Такимъ образомъ, для опредѣленія координатъ центра тяжести сплошнаго тѣла получаются формулы:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int\int\int x\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int dx\, dy\, dz} \\ \bar{y} &= \frac{\int\int\int y\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int dx\, dy\, dz} \\ \bar{z} &= \frac{\int\int\int z\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int dx\, dy\, dz} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (261)$$

Предѣлы интеграціи выясняются въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ безъ особыхъ затрудненій. Покажемъ это на примѣрѣ.

§ 112. Центръ тяжести четверти конуса. Опредѣлимъ центръ тяжести однороднаго тѣла, имѣющаго видъ такой четверти конуса, которая помѣщается между плоскостями координатъ (фиг. 37), если ось конуса направлена по оси иксовъ, и основаніе отстоитъ отъ вершины, помѣщенной въ началѣ координатъ, на разстояніи a.

Приготовимъ предварительно для настоящаго случая интегралы, входящіе въ формулы (261).

Уравненіе конуса таково:

$$y^2 + z^2 = k^2x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (262)$$

гдѣ k есть тангенсъ угла, составляемаго образующею съ осью конуса. Изъ (262) имѣемъ:

$$z = \sqrt{k^2x^2 - y^2}\,.$$

Предѣлы по оси z будутъ: o и $\sqrt{k^2x^2-y^2}$.

Предѣлы по оси y будутъ: o и kx.

Предѣлы по оси x будутъ: o и a.

Фиг. 37.

Вычисляемъ:

$$\int_0^{\sqrt{k^2x^2-y^2}}\int_0^{kx}\int_0^a dx\,dy\,dz = \int_0^{kx}\int_0^a \sqrt{k^2k^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Далѣе, пользуясь формулою

$$\int \sqrt{A^2-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\left[y\sqrt{A^2-y^2} + A^2\,.\,arsin\left(\frac{y}{A}\right)\right],$$

получимъ

$$\int_0^{kx}\int_0^a \sqrt{k^2x^2-y^2}\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int_0^a\left[y\sqrt{k^2x^2-y^2} + k^2x^2\,.\,ar\sin\left(\frac{y}{kx}\right)\right]_0^{kx} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a\left[k^2x^2\,.\,\frac{\pi}{2}\right]dx = \frac{a^3k^2\,.\,\pi}{12}.$$

Итакъ, въ настоящемъ случаѣ:

$$\int\int\int dx\,dy\,dz = \frac{a^3k^2\,.\,\pi}{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (263)$$

Вычисляемъ теперь

$$\int_0^{\sqrt{k^2x^2-y^2}}\int_0^{kx}\int_0^a x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{kx}\int_0^a x\sqrt{k^2x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a x\left[y\sqrt{k^2x^2-y^2} + k^2x^2\,.\,ar\sin\left(\frac{y}{kx}\right)\right]_0^{kx} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a\left(k^2x^3\,\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{a^4k^2\pi}{16}.$$

Итакъ, въ настоящемъ случаѣ:

$$\int\int\int x\,dx\,dy\,dz = \frac{a^4\,.\,k^2\pi}{16} \quad \ldots\ldots (264)$$

Вычисляемъ теперь:

$$\int_0^{\sqrt{k^2x^2-y^2}}\int_0^{kx}\int_0^{a} y\,.\,dx\,dy\,dz = \int_0^{kx}\int_0^{a} y\sqrt{k^2x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Далѣе пользуясь формулою:

$$\int y\sqrt{A^2-y^2}\,dy = -\frac{1}{3}\,(A^2-y^2)^{\frac{3}{2}},$$

получимъ:

$$\int_0^{kx}\int_0^{a} y\sqrt{k^2x^2-y^2}\,dx\,dy = -\frac{1}{3}\int_0^{a}\left([k^2x^2-y^2]^{\frac{3}{2}}\right)_0^{kx} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,k^3\int_0^{a} x^3\,dx = \frac{k^3a^4}{12}.$$

Итакъ, въ настоящемъ случаѣ:

$$\int\int\int y\,dx\,dy\,dz = \frac{k^3a^4}{12} \quad \ldots\ldots\ldots (265)$$

Наконецъ вычисляемъ:

$$\int_0^{\sqrt{k^2x^2-y^2}}\int_0^{kx}\int_0^{a} z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{kx}\int_0^{a}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{k^2x^2-y^2}} dx\,dy =$$

$$= \int_0^{kx}\int_0^{a}\frac{(k^2x^2-y^2)}{2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{kx}\int_0^{a} k^2x^2\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int_0^{kx}\int_0^{a} y^2\,dx\,dy =$$

$$= \frac{k^3x}{2}\int_0^{a} x^3\,dx - \frac{k^3}{6}\int_0^{a} x^3\,dx = \frac{k^3}{3}\int_0^{a} x^3\,dx = \frac{k^3a^4}{12}.$$

Итакъ, въ настоящемъ случаѣ:

$$\int\int\int z\,dx\,dz\,dz = \frac{k^3a^4}{12} \quad \ldots\ldots (266)$$

Подставляя теперь приготовленные въ (263), 264), (265), (266) инте-

гралы въ (261), получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{3}{4}a \\ \bar{y} &= \frac{k}{\pi}a \\ \bar{z} &= \frac{k}{\pi}a\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (267)$$

Изъ чертежа (фиг. 37) видно, что $AB = ka$.

Изъ формулъ (267) видно, что для опредѣленія центра тяжести четверти конуса надо отъ точки C, лежащей на разстояніи $\frac{3}{4}a$ отъ вершины, отложить $CD = \frac{ka}{\pi} = \frac{AB}{\pi}$ и изъ D параллельно оси z отложить $DS = \frac{AB}{\pi}$. Точка S и будетъ центромъ тяжести данной четверти конуса.

Изъ этого примѣра видно, что формулы (261) имѣютъ совершенно общій (приложимый ко всякому случаю сплошного тѣла) характеръ, но требуютъ сложныхъ вычисленій. Поэтому стараются рѣшать задачи на опредѣленіе центра тяжести болѣе простыми путями, если это возможно. Къ рѣшенію такихъ задачъ мы и перейдемъ.

§ 113. Центръ тяжести дуги окружности. Примемъ биссектрису центральнаго угла, опирающагося на данную дугу за ось игрековъ, перпендикулярный діаметръ—за ось иксовъ. По (242) имѣемъ:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma my}{\Sigma m},$$

гдѣ m суть элементы массъ пропорціональные вѣсу; они пропорціональны элементамъ дуги. Поэтому называя элементы дуги чрезъ $s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$ и обозначая ихъ координаты соотвѣтственными значками, получимъ:

Фиг. 38.

$$\bar{y} = \frac{s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 + s_3 \cdot y_3 + \ldots}{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots} \quad (268)$$

Изъ подобія треугольниковъ abc и oap (фиг. 38) имѣемъ:

$$\frac{ab}{bc} = \frac{oa}{ap}.$$

Обозначая чрезъ δ проложеніе на ось иксовъ дугового элемента ab, получимъ:

$$\frac{s}{\delta} = \frac{r}{y}.$$

Отсюда:

$$s \cdot y = r \cdot \delta.$$

Подставляя въ (268), получимъ:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma r\delta}{\Sigma s} = \frac{r \cdot AB}{\text{дуга } AB}.$$

Обозначая чрезъ φ половину центральнаго угла AOB, получимъ:

$$\bar{y} = r \cdot \frac{2r \cdot \sin\varphi}{2r \cdot \varphi} = r \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Итакъ:

$$\bar{y} = r \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi} \quad \dots\dots\dots\dots (269)$$

По симметріи же дуги AB относительно оси y видимъ, что:

$$x = 0.$$

Итакъ: Центръ тяжести круговой дуги лежитъ на биссектрисѣ соотвѣтственнаго центральнаго угла въ разстояніи $r \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi}$ *отъ центра.*

§ 114. Центръ тяжести полуокружности лежитъ, очевидно, на радіусѣ перпендикулярномъ къ ея діаметру.

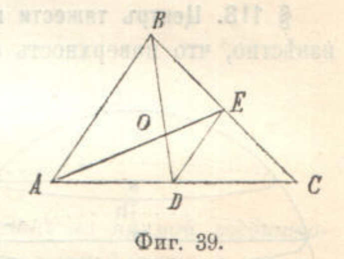
Для опредѣленія его разстоянія отъ центра достаточно въ формулѣ (269) положить:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Получимъ:

$$\bar{y} = \frac{2r}{\pi} \quad \dots\dots\dots\dots (270)$$

§ 115. Центръ тяжести площади треугольника. Разбивая площадь треугольника (фиг. 39) на безконечно узкія площади параллельныя основанію, замѣчаемъ, что центры тяжести всѣхъ такихъ полосокъ лежатъ на прямой, соединяющей вершину съ срединою основанія, такъ какъ эта прямая дѣлитъ пополамъ всѣ прямыя, проведенныя въ треугольникѣ параллельно основанію. Центръ тяжести всей площади треугольника есть центръ тяжести центровъ тяжести такихъ полосокъ. Поэтому онъ лежитъ на каждой изъ прямыхъ, соединяющихъ вершину треугольника съ срединою противуположной стороны. Такія прямыя называются *медіанами*, которыя, какъ извѣстно, пересѣкаются въ одной точкѣ.



Фиг. 39.

Итакъ: *Центръ тяжести площади треугольника находится на пересѣченіи медіанъ.*

Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DE} = 2.$$

Слѣдовательно:

$$BO = \frac{2}{3} BD.$$

Поэтому можно сказать также: *Центръ тяжести площади треугольника лежитъ на медіанѣ въ разстояніи $\frac{2}{3}$ медіаны отъ вершины.*

§ 116. Центръ тяжести кругового сектора. Разбивъ мысленно безконечно близкими радіусами (фиг. 40) весь секторъ на безконечно малые треугольники, заключаемъ, по предыдущему параграфу, что центры тяжести всѣхъ такихъ элементарныхъ треугольниковъ лежатъ на дугѣ описанной радіусомъ $\frac{2}{3}\ r$ изъ центра. Центръ тяжести всего сектора лежитъ, очевидно, въ центрѣ тяжести этой дуги, а послѣдній, согласно § 113-му, лежитъ на разстояніи равномъ произведенію радіуса дуги на отношеніе $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$. Слѣдовательно центръ тяжести сектора лежитъ на разстояніи



Фиг. 40.

$$\frac{2}{3}\, r \,.\, \frac{\sin\varphi}{\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (271)$$

отъ центра.

§ 117. Центръ тяжести площади полукруга. Полагая въ (271)

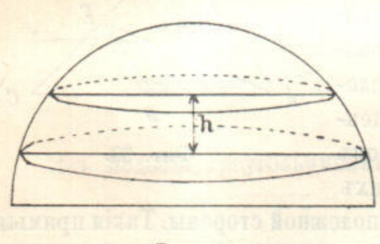
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

получимъ, что разстояніе центра тяжести площади полукруга отъ центра равно:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \cdot$$

§ 118. Центръ тяжести поверхности сферическаго пояса. Изъ геометріи извѣстно, что поверхность сферическаго пояса равна:

$$2\pi r h,$$



Фиг. 41.

гдѣ r радіусъ, h высота пояса. Центръ тяжести такой поверхности, какъ видно изъ симметріи, лежитъ на радіусѣ, перпендикулярномъ основанію пояса. Плоскость параллельная основанію и проходящая чрезъ центръ тяжести должна разсѣкать поясъ на части имѣющія равныя массы и, слѣдовательно, на части имѣющія равныя площади. Такая плоскость проходитъ чрезъ средину высоты h (фиг. 41), потому что она дѣлитъ поясъ на 2 части, равныя $2\pi r\, \frac{h}{2}$.

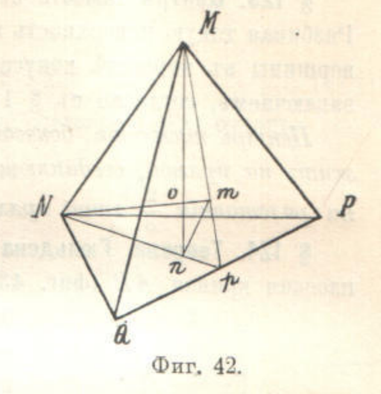
Слѣдовательно: *Центръ тяжести поверхности сферическаго пояса лежитъ на срединѣ его высоты.*

§ 119. Центръ тяжести поверхности полушарія. Изъ предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что:

Центръ тяжести поверхности полушарія лежитъ на срединѣ радіуса перпендикулярнаго къ его основанію.

§ 120. Центръ тяжести объема тетраэдра. Разобьемъ тетраэдръ (фиг. 42) на треугольныя пластинки параллельныя его основанію. Благодаря взаимному подобію этихъ пластинокъ ихъ центры тяжести лежатъ на прямой, соединяющей вершину M съ центромъ тяжести n основанія NPQ. По § 115-ому

$$np = \frac{1}{3}\,Np.$$



Фиг. 42.

Точно такъ же можно сказать, что, центръ тяжести тетраэдра лежитъ на прямой Nm, соединяющей вершину N съ центромъ тяжести m грани MPQ и что:

$$pm = \frac{1}{3}\,Mp.$$

Слѣдовательно, центръ тяжести тетраэдра лежитъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ Mn и Nm, соединяющихъ вершины съ центрами тяжести противуположныхъ граней.

Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ:

$$mn = \frac{1}{3}\,MN.$$

$$om = \frac{1}{3}\,ON.$$

Слѣдовательно:

$$om = \frac{1}{4}\,Nm.$$

$$NO = \frac{3}{4}\,Nm.$$

Итакъ: *Центръ тяжести тетраэдра лежитъ на прямой, соединяющей вершину съ центромъ тяжести противуположной грани, въ разстояніи отъ вершины равномъ $\frac{3}{4}$ этой прямой.*

§ 121. Центръ тяжести многогранной пирамиды. Разбивъ многогранную пирамиду на тетраэдры, имѣющіе общую съ пирамидою вершину, и согласно предыдущему параграфу, заключаемъ, что:

Центръ тяжести многогранной пирамиды лежитъ на прямой, соединяющей вершину пирамиды съ центромъ тяжести ея основанія, въ разстояніи отъ вершины равномъ $\frac{3}{4}$ этой прямой.

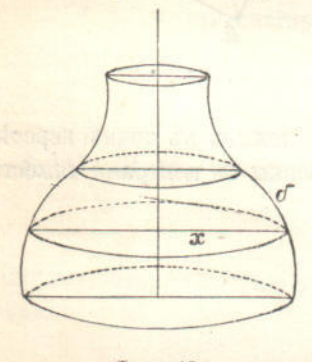
§ 122. Центръ тяжести объема прямого круглаго конуса. Разсматривая прямой круглый конусъ какъ пирамиду съ безконечнымъ числомъ граней, согласно съ § 121-ымъ находимъ, что:

Центръ тяжести объема прямого круглаго конуса лежитъ на его высотѣ въ $\frac{3}{4}$ этой высоты отъ вершины.

§ 123. Центръ тяжести боковой поверхности прямаго круглаго конуса. Разбивая такую поверхность на безконечно малые треугольники, имѣющіе вершины въ вершинѣ конуса и основанія на окружности его основанія, заключаемъ, согласно съ § 115-мъ, что:

Центръ тяжести боковой поверхности прямаго круглаго конуса лежитъ на прямой, соединяющей вершину конуса съ центромъ основанія, на разстояніи $\frac{2}{3}$ этой прямой отъ вершины.

§ 124. Теорема Гюльдена - Паппуса о поверхностяхъ. Положимъ, что плоская кривая AB (фиг. 43), вращаясь около лежащей въ ея плоскости оси y, описываетъ нѣкоторую поверхность вращенія. Разобьемъ кривую AB на безконечно малые элементы δ. Разсмотримъ поясъ, описанный однимъ изъ такихъ элементовъ. Обозначимъ чрезъ x разстояніе элемента δ отъ оси y. Поверхность пояса, описаннаго элементовъ δ, будетъ



Фиг. 43.

$$2\pi x \,.\, \delta.$$

Поверхность всего тѣла будетъ

$$s = \Sigma 2\pi x \,.\, \delta = 2\pi \Sigma x \,.\, \delta \quad . \quad . \; (272)$$

Разстояніе же центра тяжести дуги AB отъ оси y, согласно съ (242) будетъ:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x \,.\, \delta}{\Sigma \delta} = \frac{\Sigma x \,.\, \delta}{AB}.$$

Отсюда:

$$\Sigma x \,.\, \delta = \overline{x} \,.\, AB.$$

Вставляя въ (272), получимъ формулу:

$$s = 2\pi \overline{x} \,.\, AB \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (273)$$

выражающую теорему Гюльдена-Паппуса: *Поверхность тѣла вращенія равна произведенію длины окружности, описываемой центромъ тяжести меридіана, на длину меридіана.*

§ 125. Теорема Гюльдена-Паппуса объ объемахъ. Представимъ себѣ тѣло вращенія (фиг. 44), образованное вращеніемъ фигуры s около оси y, лежащей въ плоскости этой фигуры. Обозначимъ чрезъ s площадь вра-

щаемой фигуры, чрезъ δ—элементъ этой площади, находящійся на разстояніп x отъ оси y.

При одномъ полномъ оборотѣ элементъ δ описываетъ путь:

$$2\pi x$$

и объемъ

$$2\pi x \cdot \delta.$$

Объемъ всего тѣла вращенія будетъ:

$$V = \Sigma 2\pi x \cdot \delta = 2\pi \cdot \Sigma x\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (274)$$

Координата центра тяжести площади s, согласно (242) будетъ:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x\delta}{\Sigma x} = \frac{\Sigma x\delta}{s}.$$

Отсюда:

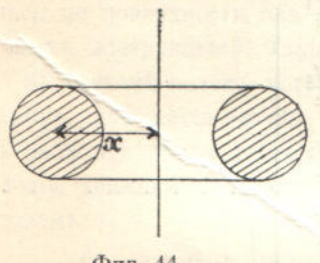
$$\Sigma x\delta = \overline{x} \cdot s.$$

Вставляя въ (274) получимъ формулу

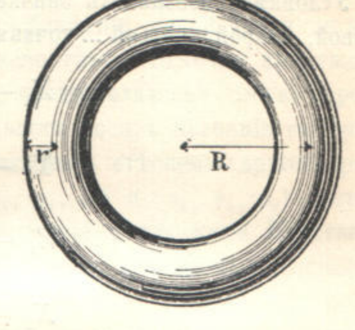
$$V = 2\pi\overline{x} \cdot s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (275)$$

выражающую вторую теорему Гюльдена-Паппуса: *Объемъ тѣла вращенія равенъ произведенію площади вращаемой фигуры, лежащей въ плоскости меридіана, на путь, пройденный ея центромъ тяжести въ теченіи полнаго оборота.*

§ 126. Примѣръ: поверхность и объемъ тора. Кольцо, образуемое вращеніемъ круга радіуса r около оси y (фиг. 45), лежащей въ плоскости этого круга, называется *торомъ*. Обозначимъ чрезъ R разстояніе центра вращаемаго круга отъ оси вращенія. По первой теоремѣ Гюльдена поверхность тора равна:



Фиг. 44.



Фиг. 45.

$$2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

По второй теоремѣ Гюльдена объемъ тора равенъ:

$$2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$$

ОТДѢЛЪ III.

Движеніе какой бы то ни было системы точекъ.

ГЛАВА I.

Общія уравненія механики.

§ 127. Основная формула Лагранжа. Какова бы ни была данная система точекъ, находящаяся подъ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ,— относительно ея можно разсуждать слѣдующимъ образомъ, примѣняя къ ней начало Даламбера (§ 75) и принципъ возможныхъ перемѣщеній (§ 67).

Условимся обозначать значками 1, 2, 3 ... величины, относящіяся къ первой, второй, третьей ... точкамъ. Проложенія потерянныхъ силъ будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 - m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} \\ Y_1 - m_1 \dfrac{d^2y_1}{dt^2} \\ Z_1 - m_1 \dfrac{d^2z_1}{dt^2} \\ X_2 - m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} \\ Y_2 - m_2 \dfrac{d^2y_2}{dt^2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (276)$$

Обозначимъ проложенія возможныхъ перемѣщеній на оси координатъ чрезъ δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2 ... Припомнимъ формулу (183) выражающую, что для равновѣсія точки необходимо и достаточно, чтобы элементарная работа была бы не больше нуля

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \leqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots (183)$$

Начало Даламбера состоитъ въ томъ, что потерянныя силы должны уравновѣшиваться въ теченіи движенія. Слѣдовательно проложенія (276)

потерянныхъ силъ должны удовлетворять условію равновѣсія (183). Другими словами: чтобы получить условіе равновѣсія потерянныхъ силъ, которое должно быть всегда удовлетворено, необходимо и достаточно подставить вмѣсто X, Y, Z выраженія (276) въ формулу

$$\Sigma\,[X\delta x + Y\delta y + Z\delta z] \geqq 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (277)$$

представляющую собою распространеніе на систему формулы (183).

Получимъ:

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \delta y\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] \geqq 0 \; . \; (278)$$

Эта формула представляетъ собою условіе равновѣсія потерянныхъ силъ. Это условіе, согласно началу Даламбера, должно удовлетворяться во всякомъ движеніи. Поэтому формула (278) представляетъ собою самую общую формулу движенія. Она была найдена Лагранжемъ (Lagrange 1736—1813) и выражаетъ движеніе какой бы то ни было системы точекъ, будетъ ли эта система отдѣльныхъ точекъ или сплошное тѣло — твердое, жидкое или газообразное.

Всѣ явленія неорганическаго міра приводятся къ движенію. Всякими движеніями управляетъ формула (278). Такимъ образомъ, формула (278) управляетъ всѣми явленіямя неорганическаго міра—она представляетъ собою общій міровой законъ.

§ 128. Обобщеніе понятія о связяхъ. Движеніе одной точки можетъ быть, какъ мы видѣли (§ 60, 61), стѣснено тѣмъ, что точка принуждена двигаться по поверхности или по линіи, представляющей собою пересѣченіе двухъ поверхностей. Такія поверхности носятъ названіе *связей*.

Но въ системѣ точекъ могутъ существовать стѣсненія другого рода. Напримѣръ, двѣ какія-нибудь точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) системы могутъ быть подчинены условію, что разстояніе между ними R остается въ теченіи движенія неизмѣннымъ. Это условіе можетъ быть выражено равенствомъ:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - R^2 = 0 \; . \; . \; . \; (279)$$

Стѣсненіе движенія можетъ, напримѣръ, состоять въ томъ, что разстояніе между двумя точками системы можетъ сдѣлаться меньше R но не можетъ сдѣлаться больше R. Такому стѣсненію движенія подвергаются двѣ точки, связанныя между собою гибкою нитью длины R. Это стѣсненіе (связь) можетъ быть выражено неравенствомъ:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - R^2 \geqq 0 \; . \; . \; . \; (280)$$

Формулы, подобныя (279) или (280), а также формулы, относящіяся къ удерживающимъ или неудерживающимъ поверхностямъ, выражающія стѣсненія движенія системы, называются *связями*. Связи, какъ мы видимъ, могутъ быть выражены равенствами или неравенствами.

§ 129. Уравненіе Лагранжа въ 1-ой формѣ. Въ приложеніи къ опредѣленной задачѣ общая формула (278) распадается, какъ мы это сейчасъ увидимъ, на цѣлую сисцему дифференціальныхъ уравненій, выведенныхъ Лагранжемъ помощью способа неопредѣленныхъ множителей. Приведемъ этотъ знаменитый выводъ.

Вмѣсто того чтобы писать

$$\gtreqless 0,$$

условимся писать въ формулѣ (278)

$$= \delta\pi,$$

въ связяхъ

$$= \delta f,$$

предполагая, что величины $\delta\pi$ и δf суть совершенно неопредѣленныя величины, обладающія только тѣмъ свойствомъ, что въ случаѣ существованія равенства онѣ равны (вмѣстѣ или порознь, смотря по условію задачи) нулю; въ случаѣ же неравенства онѣ (вмѣстѣ или порознь) отрицательны.

Положимъ, что условія задачи вводятъ связи

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots = 0 \\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_2 + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots\ldots\ldots = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial f_k}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_k}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots\ldots\ldots = 0
\end{array}\right| \quad \ldots (281)$$

Формулу (278) напишемъ въ видѣ:

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = \delta\pi \quad \ldots (282)$$

Помножимъ 1-ое изъ уравненій (281) на неопредѣленный множитель λ_1, 2-ое на λ_2 ... и сложимъ ихъ всѣхъ вмѣстѣ и съ уравненіемъ (282). Получимъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma\left[\left(X - m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k\dfrac{\partial f_k}{\partial x}\right)\delta x + \right. \\
\left(Y - m\dfrac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k\dfrac{\partial f_k}{\partial y}\right)\delta y + \\
\left.\left(Z - m\dfrac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k\dfrac{\partial f_k}{\partial z}\right)\delta z\right] = \\
\qquad = \delta\pi + \lambda_1\delta f_1 + \lambda_2\delta f_2 + \ldots + \lambda_k\delta f_k
\end{array}\right\} \quad \ldots (283)$$

гдѣ Σ распространяется на всѣ точки системы, число коихъ обозначимъ чрезъ n. Здѣсь содержатся, слѣдовательно $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \delta x_3 \ldots$ Выберемъ множители $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_k$ такъ, чтобы коэффиціенты при k величинахъ $\delta x_1, \delta y_1 \ldots$ были нулями. Тогда остальныя $3n-k$ изъ такихъ

величинъ будутъ совершенно произвольны, ибо стѣсняющихъ условій (281) было только k. Поэтому коэффиціенты при остальныхъ $3n-k$ проложеніяхъ возможныхъ перемѣщеній должны быть равными нулю для существованія уравненія (283).

Итакъ, всѣ коэффиціенты при δx_1, δy_1, δz_1, δx_2 ... равны нулю.

Такимъ образомъ получается система $3n$ дифференціальныхъ уравненій:

$$X_1 - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_1} = 0$$

$$X_2 - m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_1 - m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_1} = 0 \quad \ldots (284)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_1 - m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_1} = 0$$

$$Z_2 - m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Кромѣ того имѣемъ систему k связей:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) &= \delta f_1 \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) &= \partial f_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_k(x_3, y_3, z_3, x_4 \ldots) &= \partial f_k \end{aligned} \quad \ldots\ldots (285)$$

Исключивъ изъ (284) k множителей λ получимъ $3n-k$ уравненій, которыя вмѣстѣ съ k уравненіями (285) дадутъ $3n$ уравненій, рѣшающихъ задачу. Обыкновенно пишутъ совмѣстно уравненія (284) и (285) и называютъ эту систему уравненій уравненіями Лагранжа въ 1-ой формѣ.

Теперь мы приведемъ важнѣйшіе и наиболѣе общіе выводы, которые можно сдѣлать изъ основной формулы (282), называемые *началами* механики, потому что каждый изъ нихъ, будучи хотя только частнымъ случаемъ закона (282), служитъ общимъ началомъ для рѣшенія обширной группы механическихъ вопросовъ.

ГЛАВА II.

Начало сохраненія движенія центра инерціи.

§ 130. Дифференціальныя уравненія начала сохраненія движенія центра инерціи. Та точка системы, которая, въ случаѣ дѣйствія силы тяжести

называется центромъ тяжести, въ случаѣ дѣйствія какихъ бы то ни было силъ называется центромъ инерціи.

Примѣнимъ формулу (282) къ такой системѣ, *для которой возможно всякое поступательное движеніе.* Это значитъ, что всѣ точки системы могутъ имѣть общее перемѣщеніе имѣющее проложеніями $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ одинаковые для всѣхъ точекъ, и точки могутъ произвести такое перемѣщеніе въ любомъ направленіи, такъ какъ поступательнымъ движеніемъ системы мы называемъ такое ея движеніе, при которомъ всѣ траекторіи взаимно параллельны, всѣ проходимые одновременно пути равны и всѣ скорости равны.

Если, согласно такому предположенію, возможныя перемѣщенія всѣхъ точекъ имѣютъ одни и тѣ же проложенія $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, то ихъ можно въ формулѣ (282) вывести за знакъ суммы, и тогда получимъ:

$$\delta\alpha\,\Sigma\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\delta\beta\Sigma\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\delta\gamma\Sigma\left(Z-m\frac{d^2z}{dt}\right)=\delta\pi\ . \quad (286)$$

Но мы предположили, что *всякое* поступательное движеніе системы возможно. Слѣдовательно величины $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ совершенно произвольны: онѣ не связаны между собою никакою зависимостью. Формула (286) не выражаетъ никакой зависимости между $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ только въ томъ случаѣ, если коэффиціенты при этихъ величинахъ порознь равны нулю. Слѣдовательно: система, для которой возможно всякое перемѣщеніе, должна удовлетворять уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=0\\ \Sigma\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=0\\ \Sigma\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=0\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (287)$$

Эти уравненія равносильны такимъ:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\,\frac{d^2x}{dt^2}&=\Sigma X\\ \Sigma m\,\frac{d^2y}{dt^2}&=\Sigma Y\\ \Sigma m\,\frac{d^2z}{dt^2}&=\Sigma Z\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (288)$$

Уравненія (287) или (288) называются дифференціальными уравненіями сохраненія движенія центра тяжести. Причина такого названія будетъ выяснена въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 131. Начало сохраненія движенія центра инерціи въ случаѣ существованія внѣшнихъ силъ. Въ томъ случаѣ, если на систему дѣйствуетъ

тяжесть, уравненія (242) получаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{g\Sigma mx}{g\Sigma m}\\ \bar{y} &= \frac{g\,\Sigma my}{g\Sigma m}\\ \bar{z} &= \frac{g\,\Sigma mz}{\Sigma m}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (289)$$

По сокращеніи на g и обозначая массу Σm всей системы чрезъ M преобразуемъ уравненія (289) въ такія:

$$\left.\begin{aligned}M\bar{x} &= \Sigma mx\\ M\bar{y} &= \Sigma my\\ M\bar{z} &= \Sigma mz\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (290)$$

Дифференцируя ихъ два раза, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} &= \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}\\ M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} &= \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}\\ M\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} &= \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (291)$$

Сравнивая (291) съ (288), получимъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned}M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} &= \Sigma X\\ M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} &= \Sigma Y\\ M\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} &= \Sigma Z\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (292)$$

которыя тоже могутъ быть названы дифференціальными уравненіями сохраненія движенія центра тяжести. Сравнивая ихъ съ уравненіями (117) получимъ слѣдующее выраженіе начала сохраненія движенія центра инерціи. *Центръ инерціи системы, способной имѣть всякое поступательное движеніе, движется такъ, какъ будто въ немъ была сосредоточена масса всей системы и всѣ силы.*

Отсюда слѣдуетъ, напримѣръ, что вылетающая изъ ружья въ пустотѣ дробь летитъ такъ, что центръ тяжести всѣхъ дробинокъ описываетъ ту же самую траекторію, которую описалъ бы центръ пули, если бы при тѣхъ же условіяхъ и по тому же направленію выстрѣлъ былъ произведенъ пулею. Здѣсь внѣшняя сила, дѣйствующая на систему, есть сила тяжести.

Другой примѣръ: центръ тяжести разлетающихся во всѣ стороны осколковъ гранаты описываетъ ту же самую траекторію, которую описалъ бы центръ тяжести гранаты, если бы она не лопнула. Если и бываетъ трудно во многихъ задачахъ опредѣлить движеніе всей системы, то по крайней мѣрѣ движеніе ея центра тяжести опредѣляется сравнительно легко по изложенному выше началу.

§ 132. Начало сохраненія движенія центра инерціи въ случаѣ отсутствія внѣшнихъ силъ. Если на систему не дѣйствуютъ никакія внѣшнія силы, а только силы взаимнаго притяженія или отталкиванія составляющихъ систему матеріальныхъ точекъ, то:

$$\Sigma X = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Sigma Z = 0$$

и уравненія (292) принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} &= 0 \\ M\frac{d^2\overline{y}}{dt^2} &= 0 \\ M\frac{d^2\overline{z}}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (293)$$

Эти уравненія (293) весьма просто интегрируются. А именно: первые интегралы ихъ суть:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d\overline{x}}{dt} &= b_1 \\ M\frac{d\overline{y}}{dt} &= b_2 \\ M\frac{d\overline{z}}{dt} &= b_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (294)$$

гдѣ b_1, b_2, b_3 суть постоянныя интеграціи. Интегрируя уравненія (294), получимъ вторые интегралы уравненій (293):

$$\left.\begin{aligned} M\overline{x} &= a_1 + b_1 t \\ M\overline{y} &= a_2 + b_2 t \\ M\overline{z} &= a_3 + b_3 t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (295)$$

Эти уравненія (295) показываютъ, что, *въ случаѣ отсутствія внѣшнихъ силъ центръ тяжести системы движется равномѣрно и прямолинейно*, потому что уравненія эти линейныя (1-го порядка) относительно $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, t.

Изъ нихъ имѣемъ:

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\frac{\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}{M}.$$

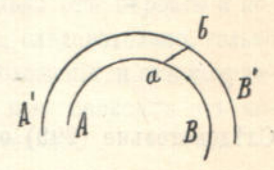
Солнечная система, напримѣръ, настолько удалена отъ всѣхъ неподвижныхъ звѣздъ, что подвержена только взаимнымъ притяженіямъ планетъ и солнца. Поэтому центръ тяжести солнечной системы движется равномѣрно и прямолинейно. Наблюденія дѣйствительно показали, что такое движеніе происходитъ и что оно направлено къ созвѣздію Геркулеса.

ГЛАВА III.

Начало сохраненія живой силы.

§ 133. Начало сохраненія живой силы. Мы видѣли, что нѣкоторыя изъ связей представляются поверхностями, по которымъ принуждена двигаться та или другая точка системы. Пусть AB (фиг. 46) представляетъ собою такую поверхность. Эта поверхность не измѣняетъ своего вида, если коэффиціенты ея уравненія не зависятъ отъ времени. Въ такомъ случаѣ перемѣщенія точки могутъ совершаться по этой поверхности, и потому возможныя перемѣщенія δx, δy, δz будутъ тождественны съ dx, dy, dz, удовлетворяющими уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0.$$



Фиг. 46.

Если же уравненіе связи содержитъ время, то дѣло происходитъ иначе. На чертежѣ (фиг. 46) изображены два положенія измѣняющейся связи. Здѣсь перемѣщеніе ab точки не тождественно съ перемѣщеніемъ ея по поверхности въ первоначальномъ видѣ. Слѣдовательно здѣсь δx, δy, δz не тождественны сь dx, dy, dz.

Остановимся на первомъ случаѣ: предположимъ, что *коэффиціенты уравненія связей не зависятъ отъ времени.*

Въ этомъ случаѣ въ основной формулѣ (278):

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0. \quad (278)$$

величины δx, δy, δz могутъ быть замѣнены дифференціалами dx, dx, dz. Послѣ такой замѣны основная формула (278) обращается въ:

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right]=0. \quad (296)$$

Отсюда:

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \Sigma\,(Xdx + Ydy + Zdz) \quad . \; . \; . \; . \; (297)$$

Введемъ еще новое условіе: положимъ, *что всѣ данныя силы имѣютъ потенціальную функцію* U. Тогда (297) обращается въ:

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) . \; (298)$$

Величина въ правой части этого уравненія есть полный дифференціалъ ∂U. Слѣдовательно (298) обращается въ:

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = dU \; . \; . \; . \; . \; . \; (299)$$

Преобразуемъ теперь лѣвую часть уравненія (299). Для этого припомнимъ, что:

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 .$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\,d\,(V^2) &= \left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d^2z}{dt^2}\right)dt = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\end{aligned}\right\} \; . \; . \; (300)$$

Слѣдовательно (299) обращается въ:

$$\frac{1}{2}\,d\Sigma m V^2 = dU \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (301)$$

Интегрируя (301), получимъ:

$$\Sigma\,\frac{mV^2}{2} = U + C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (302)$$

гдѣ C постоянная интеграціи. Положимъ, что въ нѣкоторый моментъ скорость была V_0, потенціальная функція была U_0. Тогда для этого момента (302) приметъ видъ:

$$\Sigma\,\frac{mV_0{}^2}{2} = U_0 + C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (303)$$

Вычитая (303) изъ (302), получимъ:

$$\Sigma\,\frac{mV^2}{2} - \Sigma\,\frac{mV_0{}^2}{2} = U - U_0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (304)$$

Величина $\Sigma\,\frac{mV^2}{2}$ называется *живою силою системы*. Уравненіе (304) выражаетъ собою *начало сохраненія живой силы*. Поясним̆ъ, въ чемъ оно состоитъ.

Замѣтимъ, что U есть *функція положенія*, то есть функція только координатъ x, y, z; при данныхъ x, y, z для всѣхъ точекъ системы функція U принимаетъ вполнѣ опредѣленное значеніе: при данномъ расположеніи точекъ системы U имѣетъ вполнѣ опредѣленную величину. Уравненіе (304) показываетъ, слѣдовательно, что: *при перемѣщеніи системы изъ одного расположенія въ другое разность живыхъ силъ, которыя система имѣла въ 1-мъ и во 2-мъ расположеніяхъ, равна разности соотвѣтствующихъ потенціальныхъ функцій.*

Но, если система, выходя изъ даннаго расположенія, возвращается къ нему же, переходя чрезъ рядъ другихъ расположеній, то $U - U_0 = 0$. Тогда, согласно (304), получимъ:

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} = \Sigma \frac{mV_0^2}{2}.$$

Слѣдовательно: *при возвращеніи системы къ прежнему расположенію и живая сила ея принимаетъ опять ту же величину, какую она имѣла въ этомъ прежнемъ расположеніи.* Въ этомъ и состоитъ *начало сохраненія живой силы.*

Оно можетъ быть выражено еще иначе. Уравненіе (304) показываетъ, что приращеніе живой силы системы зависитъ только отъ перваго и послѣдняго значенія потенціальной функціи, зависитъ, слѣдовательно, только отъ координатъ точекъ системы въ первомъ расположеніи и отъ координатъ точекъ системы въ послѣднемъ расположеніи и *не* зависитъ отъ координатъ промежуточныхъ расположеній. Слѣдовательно:

По какимъ бы путямъ, подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ, система ни переходила изъ одного расположенія въ другое,—приращеніе живой силы остается тѣмъ же.

§ **134. Уравненіе живой силы.** Уравненію (304) можно придать другой видъ и начало сохраненія живой силы формулировать иначе, именно такъ, какъ это удобно для практической механики.

Лѣвая часть уравненія (297), какъ мы видѣли, равна $d\Sigma \frac{mV^2}{2}$; правая часть уравненія (297) есть сумма элементарныхъ работъ всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ (см. § 67).

Сумма работъ всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ называется работою этихъ силъ. Слѣдовательно уравненію (301) можно дать видъ:

$$d\Sigma \frac{mV^2}{2} = \left.\begin{array}{l}\text{работѣ всѣхъ силъ дѣйствующихъ} \\ \text{на систему въ теченіи времени } dt.\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (305)$$

Поэтому $\Sigma \frac{Vm^2}{2} - \Sigma \frac{mV_0^2}{2}$ равно работѣ T всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ за время $t - t_0$. Итакъ:

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} - \Sigma \frac{mV_0^2}{2} = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (306)$$

Уравненіе (306) называется уравненіемъ живой силы. Оно выражается словами такъ.

Приращеніе живой силы равно работѣ; при чемъ подразумѣвается работа силъ, дѣйствовавшихъ на систему за время, въ теченіи котораго это приращеніе живой силы совершилось. Изъ этой теоремы и изъ сказаннаго въ концѣ § 133 выводимъ: *Работа дѣйствующихъ силъ, потребная для перевода системы изъ одного расположенія въ другое, не зависитъ отъ путей, по которымъ этотъ переходъ происходитъ.*

По этой теоремѣ оказывается, что для поднятія даннаго груза на данную высоту требуется совершенно опредѣленная работа, величина которой не зависитъ отъ устройства подъемныхъ приспособленій: будемъ ли мы поднимать грузъ вертикально или по наклонной плоскости или иною машиною, будемъ-ли мы его поднимать тихо или скоро, работа потребная для поднятія груза будетъ одна и та же. Мы можемъ измѣнять только силу потребную для подъема, а именно: въ теченіи долгаго времени можно поднять на извѣстную высоту данный грузъ меньшею силою чѣмъ въ теченіи короткаго, но работу придется затратить ту же. Здѣсь говорится о всѣхъ силахъ, побѣждающихъ или способствующихъ дѣйствію силы тяжести груза, слѣдовательно и о такихъ сопротивленіяхъ, какъ треніе, такъ что понятно, что чѣмъ меньше треніе въ подъемной машинѣ, тѣмъ меньшая работа требуется отъ поднимающихъ силъ

Принципъ, выражаемый уравненіемъ живой силы, выражается практиками, не совсѣмъ точно, словами: *проигрывая въ скорости, выигрываемъ въ силѣ*: дѣйствуя съ большою скоростью на длинный конецъ рычага или на конецъ полиспаста (таля) поднимаемъ грузъ, прикрѣпленный къ короткому концу рычага, или къ другому концу таля, съ малою скоростью, но зато такимъ приспособленіемъ можемъ малою силою поднять большой грузъ. Однако, пренебрегая треніемъ, замѣтимъ, что положительная работа малой подъемной силы на большомъ пути, проходимомъ точкою ея приложенія, въ точности равна отрицательной работѣ большого груза на маломъ пути проходимомъ точкою его приложенія, если грузъ поднимается равномѣрно.

§ 135. Уравненіе сохраненія энергіи. Уравненію (304) можно придать еще третій видъ, имѣющій особенно важное значеніе въ физикѣ. Изберемъ тотъ моментъ, для котораго мы обозначаемъ скорость чрезъ V_0, потенціалъ чрезъ U_0, такъ, чтобы для этого момента потенціальная функція принимала свою максимальную величину, такъ чтобы:

$$U_0 = U_{max}.$$

Уравненіе (304) приметъ видъ:

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} + (U_{max} - U) = \Sigma \frac{mV_0^2}{2}.$$

Но $\Sigma \frac{mV_0^2}{2}$ есть величина постоянная. Слѣдовательно

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} + (U_{max} - U) = const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (307)$$

Величину $\Sigma \frac{mV^2}{2}$, то есть живую силу называютъ *кинетическою энергiею* системы.

Величину $(U_{max} - U)$ называютъ *потенцiальною энергiею системы*.

Сумму кинетической и потенцiальной энергiи называютъ *полною энергiею* системы.

Уравненiе (307) показываетъ, что *полная энергiя системы есть величина постоянная*. Это уравненiе (307) служитъ математическимъ выраженiемъ знаменитаго *закона сохраненiя* энергiи.

§ 136. Условiя при которыхъ существуетъ потенцiальная функцiя. Мы видѣли, что начало сохраненiя живой силы примѣнимо только къ такимъ случаямъ, когда для дѣйствующихъ силъ существуетъ потенцiальная функцiя. Докажемъ, что она существуетъ въ одномъ весьма общемъ классѣ случаевъ.

Теорема: Если разсматривается движенiе такой системы, въ которой не дѣйствуютъ никакiя силы кромѣ притяженiя къ неподвижнымъ центрамъ и притяженiй точекъ между собою,—то, по какому-бы закону ни дѣйствовали эти притяженiя, всегда для такого движенiя существуетъ такая функцiя U координатъ точекъ, производныя которой по этимъ координатамъ равны проложенiямъ силъ на оси координатъ. Эта функцiя U и называется потенцiальною функцiею. Для доказательства этой теоремы разсмотримъ три случая.

1) *Точка* (x, y, z) *притягивается неподвижнымъ центромъ* (a, b, c). Разстоянiе r точки отъ центра опредѣляется формулою:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Дифференцируя по x, получимъ:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{x-a}{r}.$$

Называя чрезъ α, β, γ углы, образованные разстоянiемъ r съ осями координатъ, получимъ:

$$\frac{dr}{dx} = \cos\alpha$$

Точно такъ же получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dy} &= \cos\beta \\ \frac{dr}{dz} &= \cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (308)$$

Слѣдовательно проложенія X, Y, Z притяженія $(-P)$ оказываемаго центромъ на точку будутъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= -P \,.\, \cos\alpha = -P\frac{\partial r}{\partial x} \\ Y &= -P \,.\, \cos\beta = -P\frac{\partial r}{\partial y} \\ Z &= -P \,.\, \cos\gamma = -P\frac{\partial r}{\partial z} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (309)$$

Называя чрезъ U интегралъ $\int -Pdr$. то есть полагая:

$$U = \int -Pdr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (310)$$

получимъ, согласно съ (310):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -P\frac{\partial r}{\partial x} = X$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = -P\frac{\partial r}{\partial y} = Y$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = -P\frac{\partial r}{\partial z} = Z$$

Итакъ, въ данномъ случаѣ существуетъ такая функція U, для которой

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= Z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (311)$$

она именно равна $\int -Pdr$, какъ это видно изъ (310). Эта функція удовлетворяетъ уравненіямъ (311). Слѣдовательно въ настоящемъ случаѣ существуетъ потенціальная функція.

2) *Система состоитъ изъ двухъ свободныхъ точекъ взаимно притягивающихся съ силою* P. Разстояніе r между этими точками опредѣляется формулою:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad \ldots\ldots (312)$$

Проложенія силы, дѣйствующей на точку (x_1, y_1, z_1) будутъ:

$$X_1 = -P\frac{\partial r}{\partial x_1};\; Y_1 = -P\frac{\partial r}{\partial y_1};\; Z_1 = -P\frac{\partial r}{\partial z_1} \quad \ldots (313)$$

Проложенія силы, дѣйствующей на точку (x_2, y_2, z_2) будутъ:

$$X_2 = -P\frac{\partial r}{\partial x_2};\; Y_2 = -P\frac{\partial r}{\partial y_2};\; Z_2 = -P\frac{\partial r}{\partial z_2} \quad \ldots (314)$$

Эти проложенія (314) равны и противуположны проложеніямъ (313), потому что изъ (312) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{x_1-x_2}{r};\ \frac{\partial r}{\partial y_1}=\frac{y_1-y_2}{r};\ \frac{\partial r}{\partial z_1}=\frac{z_1-z_2}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2}=-\frac{x_1-x_2}{r};\ \frac{\partial r}{\partial y_2}=-\frac{y_1-y_2}{r};\ \frac{\partial r}{\partial z_2}=-\frac{z_1-z_2}{r}$$

такъ что

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}=-\frac{\partial r}{\partial x_2};\ \frac{\partial r}{\partial y_1}=-\frac{\partial r}{\partial y_2};\ \frac{\partial r}{\partial z_1}=-\frac{\partial r}{\partial z_2}.$$

Полагая:

$$\int -P\,dr=U$$

получимъ:

$$X_1=\frac{\partial U}{\partial x_1};\ Y_1=\frac{\partial U}{\partial y_1};\ Z_1=\frac{\partial U}{\partial z_1};\ X_2=\frac{\partial U}{\partial x_2};\ Y_2=\frac{\partial U}{\partial y_2};\ Z_1=\frac{\partial U}{\partial z_2}.$$

Итакъ, и въ случаѣ взаимнаго притяженія двухъ свободныхъ точекъ потенціальная функція существуетъ.

3) *Система состоитъ изъ какого-бы то ни было числа взаимно притягивающихся точекъ:* m_1, m_2, m_3, m_4 ...

Обозначимъ разстояніе между точками m_k и m_i чрезъ r_{ki}, такъ что, напримѣръ, разстояніе между точками m_3 и m_4 будетъ r_{34}. Силу, съ которою притягиваются взаимно точки m_k и m_i обозначимъ чрезъ P_{ki}.

Складывая проложенія всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на одну точку, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}&=\frac{\partial\,(U_{12}+U_{13}+\ldots)}{\partial x_1}=X_1\\
m\,\frac{d^2y_1}{dt^2}&=\frac{\partial\,(U_{12}+U_{13}+\ldots)}{\partial y_1}=Y_1\\
m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}&=\frac{\partial\,(U_{12}+U_{13}+\ldots)}{\partial z_1}=Z_1\\
m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}&=\frac{\partial\,(U_{21}+U_{23}+\ldots)}{\partial x_2}=X_2
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots(315)$$

Величины U со значками обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что въ каждую изъ нихъ входятъ координаты только тѣхъ двухъ точекъ, которыя имѣютъ значки равные одному изъ значковъ поставленныхъ при U. Поэтому, при указанныхъ въ правыхъ частяхъ уравненій (315) дифференцированіяхъ, будутъ равны нулю, напримѣръ, такія производныя, какъ производныя по x_1, y_1, z_1, отъ U_{23}, U_{54} ... Вообще, при дифференцирова-

ніи по x_1, y_1, z_1 не обратятся въ нуль только производныя отъ U_{12}, U_{13}, U_{14} ... Поэтому уравненія (315), относящіяся къ точкѣ (x_1, y_1, z_1) останутся вѣрными, если присоединить еще ко вторымъ членамъ производныя отъ суммы U_{23}, U_{24}, U_{35} ... всѣхъ остальныхъ U. Подобнымъ же образомъ можно дополнить и остальныя уравненія. Тогда во всѣхъ вторыхъ членахъ уравненій (315) получимъ частныя производныя отъ одной и той же функціи

$$U = (U_{12} + U_{13} + \ldots + U_{23} + U_{24} + \ldots + U_{34} + \ldots)$$

Сами же уравненія (315) дадутъ:

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$$

$$Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1}$$

$$Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1}$$

$$X_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Итакъ, въ случаѣ взаимныхъ притяженій и отталкиваній (разсматриваемыхъ какъ отрицательныя иритяженія) сопровождаемыхъ притяженіями къ неподвижнымъ центрамъ. существуетъ потенціальная функція. Теорема доказана.

§ **137. Консервативная система.** Система, въ которой работа существующихъ въ ней силъ, потребная для перевода этой системы изъ одного опредѣленнаго расположенія въ другое не зависитъ отъ путей, по коимъ этотъ переходъ совершается, называется *консервативною.* Изъ этого опредѣленія и изъ § 134 слѣдуетъ, что *консервативною* системою можно назвать всякую систему, къ которой примѣнимо начало сохраненія живой силы.

Изъ § 136 слѣдуетъ, что къ числу консервативныхъ системъ относится также и система взаимно притягивающихся точекъ и неподвижныхъ притягивающихъ центровъ, по какому бы закону ни происходили всѣ эти притяженія.

§ **138. Энергія.** Изъ §§ 135, 136, 137 слѣдуетъ, что энергія консервативной системы есть величина постоянная и что она равна суммѣ энергіи кинетической и потенціальной. Для того чтобы уяснить себѣ какое физическое значеніе имѣетъ *полная энергія,*—разсмотримъ знакомый уже намъ примѣръ. Тяжелая точка m поднята на высоту h отъ земли и затѣмъ предоставлена дѣйствію тяжести. Тогда она падаетъ. Если за начало координатъ принять ту точку пространства, до которой была поднята точка m и взять ось z по вертикали внизъ. то потенціальная функція

будетъ mgz: максимальная ея величина равна въ данномъ случаѣ mgh. Уравненіе (307) принимаетъ, слѣдовательно, въ настоящемъ случаѣ видъ:

$$\frac{mv^2}{2} + mg(h - z) = const \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (316)$$

Здѣсь $mg(h - z)$ есть та работа, которую осталось еще произвести силѣ тяжести до полнаго паденія точки на землю.

Чтобы увидать чему равенъ $const.$, замѣтимъ, что, при $z = 0$, скорость $v = 0$ и (316) принимаетъ видъ

$$mgh = const.$$

Итакъ *полная энергія* въ данномъ случаѣ равна $mgh =$ работѣ, производимый силою тяжести на протяженіи полнаго паденія точки съ высоты h.

Въ моментъ t, для котораго написано уравненіе (316), потенціальная энергія $mg(h - z) =$ работѣ, которую осталось еще произвести силѣ тяжести. Съ теченіемъ времени z увеличивается, и потому эта потенціальная энергія $mg(h - z)$ уменьшается: все меньше и меньше работы остается произвести силѣ тяжести.

Итакъ, потенціальная энергія можетъ быть разсматриваема какъ способность произвести работу.

Кинетическая энергія $\Sigma \frac{mv^2}{2}$ тоже способна произвести работу. Это видно непосредственно изъ уравненія (306) живой силы, а также и изъ того, что тѣло обладающее живою силою $\Sigma \frac{mv^2}{2}$, ударяясь о препятствіе, производитъ, какъ мы знаемъ, работу перемѣщенія частицъ того предмета, о который ударяется, и эта работа производится, по уравненію (306) именно на счетъ уменьшенія кинетической энергіи $\Sigma \frac{mv^2}{2}$. Во время движенія дѣйствующія силы производятъ работу $\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2}$, тѣло же поддается этой работѣ: производитъ отрицательную работу. При разрушеніи препятствія тѣло производитъ положительную работу равную $\Sigma \frac{mv^2}{2}$. Полная энергія можетъ быть, поэтому, опредѣлена какъ полная способность системы къ совершенію работы.

Уравненіе (316), напримѣръ, показываетъ, что существующая въ разсматриваемой системѣ сила тяжести въ моментъ t способна еще произвести работу равную потенціальной энергіи $mg(h - z)$, да сама движущаяся точка способна произвести работу равную кинетической энергіи $\frac{mv^2}{2}$. Такая же работоспособность системы (точки и дѣйствующей на нее силы тяжести) равна суммѣ энергій кинетической и потенціальной, то-есть полной энергіи.

Относительно какой-бы то ни было сложной системы можно сказать то же самое. Дѣйствительно, кинетическая энергія можетъ быть переведена въ работу, какъ это видно изъ 306; потенціальная энергія можетъ быть

тоже переведена въ работу, какъ это видно изъ того, что, согласно со сказаннымъ въ §§ 133 и 135:

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \int_{t_0}^{t} du \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (317)$$

равняется полной работѣ силъ за время $t - t_0$, такъ что всякая разность $U_0 - U$ эквивалентна работѣ.

Итакъ:

Энергія есть полная работоспособность данной системы и дѣйствующихъ въ ней и на нее силъ.

Энергія консервативной системы есть величина постоянная. Въ этомъ состоитъ механическое выраженіе принципа сохраненія энергіи, математическое выраженіе котораго заключается въ уравненіи (307).

§ 139. Законъ сохраненія энергіи. Въ видѣ формулы

$$\Sigma m \left[\frac{d^2x}{dt^2}\, dx + \frac{d^2y}{dt^2}\, dy + \frac{d^2z}{dt^2}\, dz \right] = \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) \ . \ . \ (318)$$

законъ сохраненія энергіи былъ извѣстенъ еще Лангранжу. Какъ законъ сохраненія живой силы, онъ былъ усмотрѣнъ еще Иваномъ Бернулли и установленъ Даніиломъ Бернулли въ 1748 году. Но въ полномъ своемъ объемѣ, какъ основной законъ физики, то-есть въ приложеніи ко всѣмъ переходамъ энергіи изъ одного вида въ другой, этотъ законъ былъ открытъ одновременно Робертомъ Майэромъ (*Mayer*: Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. Annal. d. Chem. u. Pharmac 1842. Bd. 42) и Гельмгольтцемъ (*Helmholtz* Die Erhaltung der Kraft, 1847) *).

Въ этой общей формѣ законъ сохраненія энергіи можетъ быть выраженъ такъ: *Энергія не исчезаетъ и не образуется вновь, но энергія одного вида можетъ перейти въ эквивалентное количество энергіи другого вида.*

Напримѣръ: тепловая энергія одной большой калоріи можетъ перейти въ 426 килограмметровъ работы.

Законъ сохраненія энергіи полагается современною наукою въ основаніе естествознанія наряду съ химическимъ закономъ сохраненія матеріи.

Достовѣрность его не вытекаетъ изъ основныхъ законовъ Ньютона: мы видѣли, что онъ вѣренъ только для *консервативныхъ* системъ. Но всѣ имѣющіеся до сего времени наблюденія и опыты подтверждаютъ вѣрность этого закона: силы природы—оказывается—обладаютъ консервативнымъ

---

*) Еще въ 1760 г. Ломоносовъ довольно ясно провидѣлъ и законъ сохраненія энергіи и переходъ работы въ тепло. Онъ, напримѣръ, писалъ: «Всѣ перемѣны, въ натурѣ случающіяся, такого суть состоянія, что сколько чего у одного тѣла отнимется, столько присовокупится къ другому... Сей всеобщій естественный законъ простирается и въ самыя правила движенія: ибо тѣло движущее своею силою другое, столько-же оныя у себя теряетъ, сколько сообщаетъ другому, которое отъ него движеніе получаетъ». См. *Меншуткина*: Ломоносовъ какъ физико-химикъ. (Жур. рус. физ. хим. общ. т. XXXVI вып. 6, 8, 9).

характеромъ. Поэтому достоинство закона сохраненія энергіи равносильно достоинству основныхъ законовъ Ньютона, которые тоже выведены изъ наблюденій и опыта.

Уравненіе (306) живой силы можетъ быть выражено такъ: *если работа совершается внѣшними для тѣла силами, то она измѣряется приращеніемъ живой силы тѣла; если же работа совершается тѣломъ, то-есть на счетъ его кинетической энергіи, то эта работа измѣряется убылью его живой силы.*

При поверхностномъ взглядѣ на нѣкоторыя явленія можно не усмотрѣть закона сохраненія энергіи, который выясняется, какъ только начнемъ глубже вникать въ дѣло. Напримѣръ, поверхностному наблюдателю можетъ показаться, что работа, совершаемая силою протаскивающею грузъ равномѣрнымъ движеніемъ по горизонтальной доскѣ затрачивается безслѣдно. При ближайшемъ разсмотрѣніи дѣла замѣтимъ, что такой процессъ сопровождается звукомъ, слышится шорохъ: часть работы пошла на приведеніе воздуха въ колебательное движеніе—на образованіе звуковыхъ волнъ; процессъ этотъ сопровождается нагрѣваніемъ доски и груза: часть работы пошла на развитіе живой силы молекулярныхъ движеній, называемыхъ теплотою.

Поднимемъ грузъ на извѣстную высоту; для этого приходится затратить нѣкоторую работу, но она не пропадаетъ, а превращается въ потенціальную энергію, которая можетъ перейти опять въ работу при паденіи груза; такова работа производимая, напримѣръ, гирею часовъ. Заводя карманные часы, мы затрачиваемъ работу на сгибаніе часовой пружины, но при этомъ образуемъ потенціальную энергію упругихъ силъ пружины, которая потомъ, переходя въ работу, приводитъ въ движеніе часовой механизмъ.

Заслуга Майэра и Гельмгольтца заключается въ томъ, что они усмотрѣли во всѣхъ явленіяхъ природы различные виды энергіи, которые относятся къ двумъ типамъ: кинетической энергіи и потенціальной и усмотрѣли переходъ энергіи изъ одного вида въ другой.

Къ потенціальной энергіи относятся: энергія массъ, притягивающихся по закону всемірнаго тяготѣнія, энергія упруго-измѣненнаго тѣла, энергія положенія частицъ, рѣзко мѣняющаяся при переходѣ тѣла изъ твердаго состоянія въ жидкое и изъ жидкаго въ газообразное, энергія химическаго сродства, энергія электростатическая и энергія магнитная.

Къ кинетической энергіи относятся: энергія движенія тѣла какъ цѣлаго, энергія тепловая, измѣряемая живою силою безпорядочныхъ движеній частицъ, энергія звуковыхъ колебаній, лучистая энергія эфира, проявляющаяся свѣтомъ, электрическими лучами Герца и лучистою теплотою, кинетическая энергія эфира называемая электрическимъ токомъ.

§ 140. Невозможность perpetuum mobile. Такой процессъ претерпѣваемый данною системою, при которомъ система періодически возвращается къ первоначальному состоянію, называется циклическимъ. Каждый такой

періодъ называется цикломъ. Если законъ сохраненія энергіи вѣренъ по отношенію ко всѣмъ процессамъ, совершающимся въ природѣ, то данная система можетъ произвести работу только въ томъ случаѣ, если скорости ея перваго положенія отличны отъ скоростей послѣдняго положенія, потому что только въ этомъ случаѣ лѣвая часть уравненія

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = T$$

не равна нулю.

Въ циклическомъ же процессѣ при совершеніи каждаго цикла скорости возвращаются къ прежнимъ своимъ значеніямъ и потому въ теченіи цикла или цѣлаго числа цикловъ

$$\Sigma \frac{mv_0}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = 0$$

система не производитъ, сама по себѣ безъ полученія энергіи извнѣ, никакой работы.

Всѣ двигатели, то-есть машины дающія работу, потребляютъ для произведенія ея энергію извнѣ: паровыя машины потребляютъ потенціальную энергію угля; часы потребляютъ энергію гири или пружины и для того, чтобы опять завести ихъ поднятіемъ гири или сгибаніемъ пружины, требуется энергія извнѣ; конный приводъ потребляетъ энергію принятой лошадьми пищи; водяной двигатель потребляетъ энергію паденія воды, для поднятія которой потребовалась бы энергія извнѣ.

Подъ названіемъ perpetuum mobile разумѣютъ машину, которая совершала бы циклическій процессъ, служащій источникомъ работы, безъ потребленія на ея произведеніе энергіи со стороны.

Изъ сказаннаго видно, что существованіе perpetuum mobile противорѣчитъ закону сохраненія энергіи: если бы perpetuum mobile было осуществлено, то пришлось бы отказаться отъ принципа сохраненія энергіи.

Но законъ этотъ оправдывается во всѣхъ извѣстныхъ намъ явленіяхъ. Что же касается perpetuum mobile, то съ нимъ дѣло обстоитъ еще хуже: если бы даже и оказался возможнымъ циклическій процессъ, творящій работу изъ ничего, то для полученія пользы отъ этой работы необходимо было бы, чтобы за преодолѣніемъ тренія и другихъ вредныхъ сопротивленій, отъ существованія которыхъ невозможно избавиться, оставалась еще часть даромъ полученной работы на преодолѣніе полезныхъ сопротивленій, то есть тѣхъ сопротивленій, преодолѣніе которыхъ составляетъ цѣль машины.

Людей, теряющихъ время надъ придумываніемъ perpetuum mobile, соблазняетъ движеніе планетъ. Но движеніе планеты около солнца не даетъ работы. Планета движется по эллипсу, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится солнце; при приближеніи планеты къ вершинѣ эллипса ближайшей къ солнцу увеличивается скорость и, слѣдовательно, кинетическая энергія планеты на счетъ уменьшенія ея потенціальной энергіи;

при удаленіи планеты отъ солнца дѣло происходитъ обратно: потенціальная энергія увеличивается на счетъ кинетической. Работа притягательной силы солнца положительна при приближеніи къ нему планеты и отрицательна при удаленіи ея отъ солнца: въ теченіи полнаго обращенія планеты работа этой силы равна нулю.

Самый дешевый двигатель—водяной, но и онъ не perpetuum mobile, потому что съ теченіемъ времени портится, да и существованіе данной рѣки ограничено геологическимъ періодомъ значительно меньшимъ вѣчности.

§ 141. **Начало сохраненія живой силы примѣнимо только къ полной совокупности дѣйствующихъ на систему силъ.** Разсмотримъ слѣдующій примѣръ: желѣзнодорожный поѣздъ отправляется отъ станціи A къ станціи B. Требуется, пользуясь началомъ сохраненія живой силы обсудить: производитъ локомотивъ для осуществленія этого движенія работу или не производитъ никакой работы.

Несомнѣнно локомотивъ производитъ работу, и на это тратится изрядное количество угля, стоющаго денегъ. Между тѣмъ при неосмотрительномъ примѣненіи начала сохраненія живой силы получилось бы слѣдующее: при отходѣ поѣзда со станціи A всѣ скорости v_1 были равны нулю при приходѣ на станцію B скорости v_2 опять равны нулю; получили бы

$$\Sigma \frac{mv_2^2}{2} - \Sigma \frac{mv_1^2}{2} = 0 = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (319)$$

то-есть оказалось бы, что работа T локомотива равна нулю. На что же требовалась затрата угля?

Несообразность такого заключенія происходитъ отъ весьма важной ошибки: мы не приняли во вниманіе силъ сопротивленія (тренія осей колесъ въ подшипникахъ, сопротивленія воздуха и проч.).

Въ дѣйствительности дѣло происходитъ такъ. При выходѣ со станціи A работа локомотива идетъ на увеличеніе скорости поѣзда (на увеличеніе, слѣдовательно, его живой силы) и на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій.

При дальнѣйшемъ равномѣрномъ движеніи поѣзда работа локомотива идетъ только на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій. Приближаясь къ станціи B машинистъ прекращаетъ работу локомотива, и пріобрѣтенная поѣздомъ живая сила идетъ на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій вплоть до полнаго ея истощенія, то-есть до остановки поѣзда.

Въ примѣненіи къ разсматриваемому случаю начало сохраненія живой силы показываетъ, что работа всѣхъ дѣйствующихъ на поѣздъ силъ, то-есть и тяги локомотива и сопротивленій, считаемая за весь проѣздъ отъ A до B равна нулю. Сопротивленія дѣйствуютъ въ сторону противоположную движенію. Слѣдовательно, если принять работу локомотива за положительную, то работу сопротивленій приходится принять за отрицательную. Каждая изъ этихъ работъ въ отдѣльности не равна нулю; но положительная работа локомотива уничтожается отрицательною работою сопротивленій и въ совокупности получается работа равная нулю, со-

гласно съ уравненіемъ (319) живой силы, которое само по себѣ вѣрно, но только если принимаемъ въ разсчетъ всѣ силы.

Здѣсь мы не приняли въ разсчетъ еще давленія поѣзда на рельсы; но это давленіе по 3-му основному закону Ньютона уничтожается давленіемъ рельсъ на колеса.

Другой примѣръ: человѣкъ стоитъ въ теченіи часа на мѣстѣ, при чемъ никакой видимой механической работы не производитъ. Отчего же онъ устаетъ? Оттого, что на напряженіе мускуловъ (главнымъ образомъ мускуловъ ногъ) безъ котораго стоять невозможно, потребна затрата энергіи, заключающейся въ дѣятельности нервовъ.

ГЛАВА IV.

Начало сохраненія площадей.

§ 142. **Дифференціальныя уравненія начала сохраненія площадей.** Положимъ, что связи, существующія въ системѣ таковы, что всѣ точки системы могутъ двигаться по дугамъ окружностей, лежащихъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси z и имѣющихъ центры на этой оси, при чемъ взаимныя разстоянія точекъ не мѣняются. Другими словами: разсматриваемъ систему способную повернуться какъ одно цѣлое около оси z. Это еще не значитъ, что система въ самомъ дѣлѣ совершаетъ такое вращеніе: мы только хотимъ сказать, что связи допускаютъ вращенія около оси z. Къ такимъ системамъ относятся между прочимъ: система свободныхъ точекъ; свободная неизмѣняемая система, неизмѣняемая система вращающаяся около оси z, свободная нить, свободная жидкость и проч.

Обозначая чрезъ r радіусъ (разстояніе отъ оси z) какой-нибудь точки системы и чрезъ φ уголъ, на который повертываются радіусы всѣхъ точекъ одновременно, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,.\,cos\,\varphi \\ y &= r\,.\,sin\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (320)$$

Отсюда:

$$\delta x = -\,r\,.\,sin\,\varphi\,.\,d\varphi; \qquad \delta y = r\,.\,cos\,\varphi\,.\,d\varphi; \qquad \delta z = 0$$

или, согласно съ (320):

$$\delta x = -\,y\,d\varphi; \qquad \delta y = x\,.\,d\varphi; \qquad \delta z = 0\,.\,.\,.\,.\,(321)$$

Вставляя эти проложенія (321) возможныхъ перемѣщеній въ основное уравненіе (282) механики:

$$\Sigma\left[\left(X - m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\,\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = \delta\pi,$$

получимъ:

$$\Sigma\left[\left(X - m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)(-\,yd\varphi) + \left(Y - m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)(xd\varphi) + 0\right] = \delta\pi$$

или, благодаря произвольности величины $d\varphi$ и условія $\delta\pi \gtreqless 0$, получимъ:

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \Sigma (xY - yX).$$

Это есть дифференціальное уравненіе начала сохраненія площадей для системы обладающей «вращаемостью» около оси z.

Если система способна вращаться около каждой изъ осей координатъ, то мы получили бы такимъ же способомъ:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \Sigma (xY - yX) \\ \Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \Sigma (yZ - zY) \\ \Sigma m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= \Sigma (zX - xZ) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (322)$$

Таковы дифференціальныя уравненія начала сохраненія площадей для системы способной вращаться около каждой изъ осей координатъ. Къ такого рода системамъ относятся: система свободныхъ точекъ, свободная нить, свободная жидкость, свободная неизмѣняемая система, неизмѣняемая система вращающаяся около неподвижной точки и проч.

§ 143. Начало сохраненія площадей. Если вторыя части уравненій (322) равны нулю, что между прочимъ бываетъ въ отсутствіи внѣшнихъ силъ, то

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = 0$$

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0$$

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0$$

Эти уравненія легко интегрируются давая интегралы:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= c_1 \\ \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= c_2 \\ \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= c_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (323)$$

гдѣ c_1, c_2, c_3, суть постоянныя интеграціи. Лѣвыя части этихъ уравненій (326) называются *моментами количества движенія* относительно осей x, y, z.

Уравненія (323) называются сокращенно *интегралами площадей.*

Согласно § 54-му величины, стоящія въ скобкахъ въ (323) помноженныя на dt суть проложенія на плоскости координатъ площади, описанной въ теченіи времени dt радіусомъ-векторомъ одной изъ точекъ системы. Уравненія (323) и выражаютъ *законъ площадей,* состоящій въ слѣдующемъ: Суммы произведеній массъ на проложенія площадей, описываемыхъ радіусами-векторами точекъ системы, пропорціональны времени.

§ **144. Неизмѣняемая плоскость.** Обозначимъ чрезъ $C\,dt$ сумму произведеній массъ и проложеній на нѣкоторую плоскость P площадей, описываемыхъ радіусами-векторами точекъ системы въ теченіи времени dt. Опредѣлимъ такое положеніе плоскости P, при которомъ Cdt достигало бы максимальнаго значенія. Согласно съ (323), имѣемъ:

$$C\,dt = [c_1 \,.\, \cos(P, yz) + c_2 \,.\, \cos(P, zx) + c_3 \,.\, \cos(P, xy)]\; dt.$$

Обозначимъ чрезъ P' вспомогательную плоскость, направленіе коей опредѣлялось бы уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} \cos(P', yz) &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ \cos(P', zx) &= \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ \cos(P', xy) &= \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (324)$$

Пользуясь этими формулами и извѣстною формулою опредѣляющею $\cos$ угла между двумя прямыми, получимъ:

$$C\,dt = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \,.\, \cos(P, P').$$

Когда P совпадаетъ съ P', то $\cos(P, P')$ получаетъ наибольшее значеніе. Слѣдовательно наибольшее значеніе $C\,dt$ будетъ имѣть для плоскости, положеніе которой опредѣляется уравненіями (324). Но правыя части этихъ уравненій постоянны. Слѣдовательно, эта плоскость неподвижна. Она называется *неизмѣняемою плоскостью.*

Солнечная система какъ система свободныхъ точекъ, на которую не дѣйствуютъ внѣшнія силы, подчиняется уравненіямъ (323). Слѣдовательно, въ солнечной системѣ существуетъ (хотя и воображаемая) плоскость, остающаяся неподвижною. Существованіе неизмѣняемой плоскости открылъ Лапласъ. Для астронома, несущагося на земномъ шарѣ, совершающемъ обращеніе около солнца, вращеніе около оси, движеніе процессіи и движеніе нутаціи, чрезвычайно важно было это открытіе плоскости неподвижной или, лучше сказать, участвующей только въ общемъ поступательномъ движеніи солнечной системы, упомянутомъ въ § 132-мъ.

ГЛАВА V.

Движеніе системы подъ дѣйствіемъ мгновенныхъ силъ.

§ 145. Количество движенія. Импульсъ силы. Если сила F дѣйствуетъ въ точку m въ одномъ и томъ же направленіи, то, согласно (21):

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

Если сила дѣйствуетъ въ теченіи времени T, и скорости въ началѣ и въ концѣ этого промежутка времени суть v и v', то:

$$mv' - mv = \int_0^T F\,dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (325)$$

Произведеніе mv массы на скорость называется *количествомъ движенія*.

Величина $\int_0^T d\,Ft$ называется *импульсомъ силы* F за время T. Нѣмецкіе ученые называютъ импульсъ силы интеграломъ времени Zeitintegral.

Уравненіе (325) выражаетъ собою теорему: *приращеніе количества движенія за промежутокъ времени T равно импульсу силы за это время.*

Положимъ, что сила F безконечно возрастаетъ, а промежутокъ времени T безконечно уменьшается. Тогда $\int_0^T F\,dt$ можетъ имѣть конечный предѣлъ. Обозначимъ этотъ предѣлъ чрезъ P; тогда (325) приметъ видъ:

$$m\,(v' - v) = P\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (326)$$

Въ теченіи времени T скорость измѣнилась. Допустимъ, что въ теченіи этого времени она оставалась конечною (не была безконечно-большою) и обозначимъ чрезъ V наибольшее значеніе, котораго она достигала въ теченіи времени T. Тогда путь, пройденный точкою m за время T, меньше чѣмъ VT. При переходѣ къ предѣлу, для безконечно-малаго T эта величина VT обращается въ нуль. Слѣдовательно въ теченіи безконечно-малаго T точка не подвинулась: она не имѣла времени подвинуться, а между тѣмъ скорость ея измѣнилась изъ v въ v'.

Слѣдовательно, при дѣйствіи безконечно большихъ но *мгновенныхъ* силъ положеніе точки не успѣваетъ измѣниться, а измѣняется только скорость. Такая сила называется *мгновенною* или *ударомъ*.

Ударъ мы опредѣляемъ какъ безконечно-большую силу, дѣйствующую въ теченіи безконечно-малаго времени. Въ природѣ, хотя и не имѣется безконечно-большихъ силъ, но существуютъ силы весьма большія, дѣйствующія въ теченіи весьма малаго времени, какъ напримѣръ, при ударѣ

молотка. Эти силы мы разсматриваемъ какъ удары и наши изслѣдованія будуть тѣмъ точнѣе, чѣмъ больше сила и чѣмъ менѣе продолжительность ея дѣйствія.

Силу P въ уравненіи (325) называютъ силою удара. Согласно (326): *сила удара измѣряется приращеніемъ количества движенія.*

§ **146. Дифференціальныя уравненія системы, на которую дѣйствуетъ одновременно нѣсколько мгновенныхъ силъ.** Обозначимъ чрезъ u, v, w проложенія на оси координатъ скорости которую имѣла точка системы только что передъ дѣйствіемъ мгновенныхъ силъ, чрезъ u', v', w' проложенія скорости по окончаніи дѣйствія мгновенныхъ силъ, чрезъ X', Y', Z' проложенія мгновенной силы. Имѣемъ:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\Sigma m (u' - u) = \Sigma \int_0^T X dt = \Sigma X'.$$

Точно такія же уравненія получимъ для проложеній на оси y и z. Всего получимъ три уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m (u' - u) &= \Sigma X' \\ \Sigma m (v' - v) &= \Sigma Y' \\ \Sigma m (w' - w) &= EZ' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (327)$$

Изъ уравненія сохраненія площадей:

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \Sigma [yZ - zY]$$

получимъ:

$$\Sigma m \left(y \frac{dw}{dt} - z \frac{dv}{dt} \right) = \Sigma (yZ - zY).$$

Въ предѣлѣ получимъ:

$$\Sigma m [y (w' - w) - z (v' - v)] = \Sigma (yZ' - zY').$$

Такія же уравненія получимъ для другихъ проложеній.
Всего получимъ такія три уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m [y (w' - w) - z (v' - v)] &= \Sigma (yZ' - zY') \\ \Sigma m [z (u' - u) - x (w' - w)] &= \Sigma (zX' - xZ') \\ \Sigma m [x (v' - v) - y (u' - u)] &= \Sigma (xY' - yX') \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (328)$$

ОТДѢЛЪ IV.

Механика неизмѣняемой системы.

ГЛАВА I.

Моменты инерціи неизмѣняемой системы.

§ 147. Вращеніе неизмѣняемой системы около неподвижной оси. Неизмѣняемою системою называется такая совокупность матеріальныхъ точекъ, въ которой разстояніе между каждыми двумя точками остается неизмѣннымъ. Если неизмѣняемая система представляетъ собою сплошное тѣло, то она называется *абсолютно твердымъ тѣломъ*.

Если движеніе абсолютно твердаго тѣла стѣснено условіемъ, что двѣ точки его должны оставаться неподвижными, то, благодаря тому, что двумя точками опредѣляется прямая линія, и вся прямая, соединяющая эти неподвижныя точки, тоже останется неподвижною. Эта прямая называется *осью вращенія*; остальныя точки тѣла могутъ двигаться, но, благодаря абсолютной твердости тѣла, каждая точка тѣла будетъ принуждена оставаться на одномъ и томъ же разстояніи отъ оси и, слѣдовательно описывать окружность, лежащую въ плоскости перпендикулярной къ оси и имѣющую центръ на оси вращенія. Такое движеніе называется *вращеніемъ около оси*. Благодаря абсолютной твердости тѣла, углы, на которые отклоняются одновременно радіусы всѣхъ точекъ, движущихся по своимъ окружностямъ, будутъ равны.

Уголъ, на который одновременно отклоняются радіусы всѣхъ точекъ, называется *угломъ поворота*. Если уголъ поворота измѣняется пропорціонально времени, то вращеніе называется равномѣрнымъ. Не трудно видѣть, что каждая точка тѣла, вращающагося равномѣрно около оси, совершаетъ *равномѣрное движеніе* по окружности, изслѣдованное въ примѣрахъ §§ 39 и 44 и въ § 50-мъ.

Обозначимъ чрезъ ω уголъ поворота, на который отклоняются радіусы всѣхъ точекъ тѣла въ теченіи единицы времени. Этотъ уголъ называется *угловою скоростью* равномѣрнаго вращенія около оси.

Примемъ ось вращенія за ось зедовъ и проведемъ ось x чрезъ на-

чальное положеніе одной изъ точекъ вращающагося тѣла; плоскость окружности, описываемой этою точкою, примемъ за плоскость (x, y). Въ единицу времени радіусъ точки (x, y, z) тѣла отклоняется на уголъ ω. Въ теченіи времени t онъ отклоняется на уголъ ωt. Поэтому:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \,.\, cos\,(\omega t) \\ y &= r \,.\, sin\,(\omega t) \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (329)$$

Дифференцируя эти уравненія, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -r \quad \omega \,.\, sin\,(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} &= +r \quad \omega \,.\, cos\,(\omega t) \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (330)$$

Согласно (89):

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Слѣдовательно скорость разсматриваемой точки (x, y, z) вращающагося тѣла будетъ:

$$v = \sqrt{r^2\omega^2\,[sin^2\,(\omega t) + cos^2\,(\omega t)]}$$

или:

$$v = \omega \,.\, r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (331)$$

Здѣсь v называется *линейною скоростью* точки (x, y, z). Итакъ:

Линейная скорость точки вращающагося тѣла равна произведенію угловой скорости на радіусъ.

§ 148. Моментъ инерціи относительно оси. Опредѣлимъ живую силу T абсолютно твердаго тѣла, равномѣрно вращающагося около оси. По самому опредѣленію живой силы

$$T = \Sigma \frac{mv^2}{2}.$$

Вставивъ сюда, вмѣсто v, его величину изъ (331), получимъ:

$$T = \Sigma \frac{m}{2}\,\omega^2 r^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (332)$$

ω есть величина одинаковая, какъ мы видѣли, для всѣхъ точекъ тѣла. Поэтому, вынося $\frac{\omega^2}{2}$ за знакъ суммы въ (332), получимъ:

$$T = \frac{\omega^2}{2}\,\Sigma m r^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (333)$$

Оказывается, что при данной угловой скорости ω, живая сила равномѣрно вращающагося твердаго тѣла пропорціональна величинѣ Σmr^2

Эту величину называютъ *моментомъ инерціи относительно оси* и обозначаютъ чрезъ J, такъ что:

$$J = \Sigma mr^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (334)$$

$$T = \frac{\omega^2}{2} . J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (335)$$

Изъ (334) вытекаетъ слѣдующее опредѣленіе:

Моментъ инерціи относительно оси равенъ суммѣ произведеній массъ точекъ системы на квадраты ихъ разстояній отъ оси.

Изъ уравненія живой силы мы видѣли, что работа можетъ быть превращена въ живую силу и обратно: живая сила можетъ быть превращена въ работу. Слѣдовательно, если, какъ мы это сейчасъ видѣли, живая сила равномѣрно вращающагося около оси тѣла пропорціональна моменту инерціи, то тѣлу тѣмъ труднѣе сообщить вращеніе около данной оси, чѣмъ больше его моментъ инерціи относительно этой оси. Наоборотъ, вращающееся съ извѣстною скоростью ω около данной оси тѣло тѣмъ труднѣе остановить, чѣмъ больше его моментъ инерціи относительно этой оси.

Мы видѣли въ § 11-мъ, что *инерція* точки (ея сопротивляемость измѣненію движенія) измѣряется массою. Теперь мы можемъ сказать, что инерція тѣла, вращающагося около оси, измѣряется его моментомъ инерціи относительно этой оси.

Изъ (334) видно, что одно и тоже тѣло можетъ имѣть разные моменты инерціи относительно разныхъ осей. Это видно уже, такъ сказать, изъ ежедневнаго опыта съ вращаемостью разныхъ тѣлъ. Такъ напримѣръ, всякому вѣроятно случалось убѣдиться, что бревно или палку вращающуюся съ извѣстною скоростью около поперечной оси труднѣе остановить, чѣмъ тоже бревно или палку вращающуюся съ тою же скоростью около продольной оси.

Не трудно видѣть, что дѣйствительно моментъ инерціи Σmr^2 относительно поперечной оси длиннаго бревна больше момента инерціи Σmr_1^2 того же бревна относительно продольной оси; такъ какъ въ первомъ случаѣ нѣкоторые r (относящіеся къ концамъ бревна) велики, а во второмъ случаѣ всѣ r, сравнительно, малы.

Изъ предыдущаго видно, что можно говорить о моментахъ инерціи всякой неизмѣняемой системы. Разница будетъ въ томъ, что для опредѣленія момента инерціи неизмѣняемой системы состоящей изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ точекъ надо просто взять сумму величинъ mr^2; для опредѣленія же момента инерціи сплошнаго абсолютно твердаго тѣла надо суммировать безконечное множество величинъ mr^2, относящихся къ безконечному множеству точекъ тѣла, но такъ какъ эти величины mr^2, благодаря безконечной малости массъ m точекъ тѣла, безконечно малы, то суммированіе обращается въ интегрированіе, распространяемое на весь объемъ тѣла. Такимъ образомъ, принимая обозначенія:

$A =$ моментъ инерціи тѣла относительно оси x

$B =$ » » » » » y

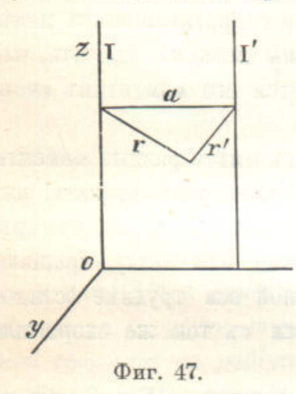
$C =$ » » » » » z

и замѣчая, что разстояніе точки (x, y, z) отъ оси x равно $\sqrt{y^2 + z^2}$ получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= \iiint (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \Sigma m\,(y^2 + z^2) \\ B &= \iiint (z^2 + x^2)\, dx\, dy\, dz = \Sigma m\,(z^2 + x^2) \\ C &= \iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \Sigma m\,(x^2 + y^2) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (336)$$

если плотность тѣла равна единицѣ, такъ что $m = dx\, dy\, dz$.

§ 149. Соотношенія между моментами инерціи относительно взаимно параллельныхъ осей. Примемъ за ось z ось вращенія и обозначимъ чрезъ J моментъ инерціи относительно этой оси. Опредѣлимъ моментъ инерціи J' относительно оси L параллельной оси z и отстоящей отъ нея на разстояніи a.



Фиг. 47.

Пусть m есть одна изъ точекъ тѣла (фиг. 47). Обозначимъ чрезъ r и r' ея разстоянія отъ осей z и L. Имѣемъ:

$$r'^2 = a^2 + r^2 - 2ar \,.\, \cos(r, x) = a^2 + r^2 - 2ax.$$

Слѣдовательно:

$$J' = \Sigma m r'^2 = a^2\, \Sigma m + \Sigma m r^2 - 2a\, \Sigma m x.$$

Если O находится въ центрѣ инерціи, то, согласно съ (242), имѣемъ $\Sigma mx = 0$. Слѣдовательно:

$$J' = J + a^2 \,.\, M. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (337)$$

гдѣ $M = \Sigma m =$ массѣ всего тѣла.

Формула (337) показываетъ, что *моментъ инепціи J' относительно какой-либо оси равенъ суммѣ момента инерціи J относительно оси параллельной и проходящей чрезъ центръ инерціи и произведенія $a^2 \,.\, M$ массы на квадратъ разстоянія между осями.* Эта теорема весьма часто примѣняется при вычисленіи моментовъ инерціи.

§ 150. Соотношенія между моментами инерціи относительно взаимно пересѣкающихся осей. Опредѣлимъ моментъ инерціи относительно оси L, проходящей чрезъ начало координатъ и составляющей съ осями координатъ углы α, β, γ (фиг. 48).

Пусть m есть одна изъ точекъ тѣла; r ея разстояніе отъ L. По тео-

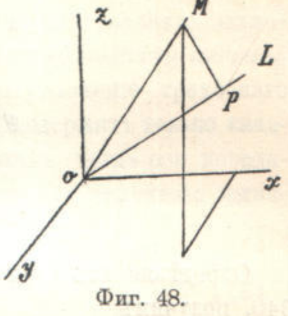
ремѣ о проекціяхъ имѣемъ:

$$OP = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\,.\,\cos\gamma$$
$$r^3 = x^2 + y^2 + z^2 - OP^2.$$

Слѣдовательно

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^3 - [x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma]^2 = x^2(1-\cos^2\alpha) +$$
$$+ y^2(1-\cos^2\beta) + z^2(1-\cos^2\gamma) - 2yz\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\gamma - 2zx\,.\,\cos\gamma\,.\,\cos\alpha -$$
$$- 2xy\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\beta$$

или:



Фиг. 48.

$$r^2 = x^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + y^2(\cos^2\gamma + \cos^2\alpha) +$$
$$+ z^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) - 2yz\,.\,\cos\beta\cos\gamma -$$
$$- 2zx\,.\,\cos\gamma\,.\,\cos\beta - 2xy\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\gamma$$

Откуда наконецъ:

$$r^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta +$$
$$+ (x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2yz\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\gamma - 2zx\,.\,\cos\gamma\,.\,\cos\alpha - 2xy\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\beta.$$

Слѣдовательно:

$$J = \Sigma mr^2 = \cos^2\alpha\,\Sigma m(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\,\Sigma m(z^2 + x^2) +$$
$$+ \cos^2\gamma\,\Sigma m(x^2 + y^2) - 2\cos\beta\,.\,\cos\gamma\,\Sigma myz - 2\cos\gamma\,.\,\cos\alpha\,\Sigma mzx -$$
$$- 2\cos\alpha\,.\,\cos\beta\,\Sigma m\,xy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (338)$$

Пользуясь обозначеніями (336) и вводя обозначенія центробѣжныхъ моментовъ D, E, F

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\,yz &= D \\ \Sigma m\,zx &= E \\ \Sigma mxy &= F \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (339)$$

можемъ представить (338) въ видѣ:

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\alpha - 2D\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\gamma - 2E\,.\,\cos\gamma\,.\,\cos\alpha$$
$$- 2F\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (340)$$

Эта формула служитъ для опредѣленія момента инерціи относительно оси L по даннымъ: A, B, C, D, E, F, α, β, γ.

§ 151. Эллипсоидъ инерціи. Будемъ проводить чрезъ начало координатъ различныя оси L, опредѣлять для каждой изъ нихъ J по формулѣ (340) и откладывать на каждой такой оси отъ начала координатъ векторъ $\rho = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{J}}$ обратно-пропорціональный квадратному корню изъ мо-

мента инерціи относящагося къ той оси, по которой откладывается векторъ; ($\sqrt{k}$ есть постоянное=коэффиціентъ пропорціональности). Докажемъ, что концы такихъ векторовъ окажутся лежащими на нѣкоторомъ эллипсоидѣ, имѣющемъ центръ въ началѣ координатъ.

Дѣйствительно, обозначивъ черезъ (x, y, z) координаты конца вектора ρ, имѣемъ:

$$\rho = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{J}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (341)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \,.\, \cos\alpha = \frac{\sqrt{k}\,.\,\cos\alpha}{\sqrt{J}} \\ y &= \rho \,.\, \cos\beta = \frac{\sqrt{k}\,.\,\cos\beta}{\sqrt{J}} \\ z &= \rho \,.\, \cos\gamma = \frac{\sqrt{k}\,.\,\cos\gamma}{\sqrt{J}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (342)$$

Опредѣляя изъ (342) величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и вставляя ихъ въ 340, получимъ:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2\,Dyz - 2\,Ezx - 2\,Fxy = k \quad \ldots (343)$$

Это уравненіе (343) 2-го порядка относительно (x, y, z). Радіусъ-векторъ ρ этой поверхности опредѣляется изъ формулы (341), которая показываетъ, что ρ не можетъ быть безконечно большимъ, если J не обращается въ нуль ни для одной изъ осей L. Но J не обращается въ нуль ни для одной изъ такихъ осей, если разсматриваемое тѣло не состоитъ исключительно изъ точекъ расположенныхъ по одной изъ осей L. Итакъ, поверхность (343), будучи 2-го порядка и не имѣя безконечно удаленныхъ точекъ, представляетъ собою трехосный эллипсоидъ или одинъ изъ его частныхъ видовъ. Этотъ эллипсоидъ называется *эллипсоидомъ инерціи*.

Онъ служитъ для полученія яснаго представленія о томъ, какъ распредѣляются моменты инерціи J, относящіеся къ осямъ, проходящимъ чрезъ данную точку.

Такъ какъ въ предыдущемъ разсужденіи положеніе начала координатъ было совершенно произвольнымъ, то для каждой точки пространства существуетъ свой эллипсоидъ инерціи по отношенію къ данному тѣлу. Разъ эллипсоидъ инерціи для данной точки O пространства мысленно построенъ по формулѣ (343), то распредѣленіе моментовъ инерціи J для осей проходящихъ чрезъ O оказывается, согласно сказанному, такимъ, что для каждой оси L проходящей чрезъ O моментъ инерціи опредѣляется по тому отрѣзку ρ, который отсѣкается на этой оси эллипсоидомъ инерціи, помощью формулы

$$J = \frac{k}{\rho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (344)$$

§ 152. Главныя оси. Главные моменты инерціи. Прямыя, совпадающія съ главными осями эллипсоида инерціи, построеннаго для данной точки O пространства по отношенію къ данному тѣлу, называются *главными осями* для точки O по отношенію къ данному тѣлу.

Эллипсоидъ инерціи, построенный для центра тяжести, называется *центральнымъ эллипсоидомъ инерціи* тѣла. Его главныя оси называются *главными центральными осями.*

Моменты инерціи относительно главныхъ осей для какой-нибудь точки O называются *главными моментами инерціи* для этой точки.

Моменты инерціи относительно главныхъ осей центральнаго эллипсоида инерціи называются *главными центральными моментами инерціи.*

Изъ Аналитической Геометріи извѣстно, что уравненіе трехоснаго эллипсоида, отнесеннаго къ его главнымъ осямъ, содержитъ только квадраты перемѣнныхъ. Слѣдовательно въ тѣхъ случаяхъ, когда оси координатъ взяты по главнымъ осямъ для какой-либо точки O, уравненіе эллипсоида инерціи (343) принимаетъ видъ:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k \quad \dots\dots\dots \quad (345)$$

Положимъ, что тѣло симметрично относительно плоскостей (y, z) и (z, x); тогда для каждой точки, имѣющей положительное x будетъ находиться въ тѣлѣ симметричная точка, имѣющая отрицательное x, и потому величины $\Sigma mxy = F$ и $\Sigma mzx = E$ обратятся въ нули. Точно также для каждой точки, имѣющей положительное y, найдется въ тѣлѣ симметричная ей точка, имѣющая отрицательное y, такъ что $\Sigma myz = D$ будетъ нуль. Но если D, E, F равны нулю, то уравненіе 343 принимаетъ видъ 345. Итакъ: *Если тѣло симметрично по отношенію къ двумъ плоскостямъ, проходящимъ чрезъ данную точку O, то главныя оси для точки O находятся во взаимномъ пересѣченіи этихъ плоскостей и въ пересѣченіяхъ ихъ съ плоскостью перпендикулярною этому взаимному пересѣченію и проходящею чрезъ O.*

Согласно сказанному и формулѣ (340) заключаемъ: если A, B, C главные моменты для точки O даны, то моментъ инерціи J относительно оси L, проходящей чрезъ O и составляющей съ главными для точки O осями углы α, β, γ, находится по формулѣ:

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \quad \dots\dots \quad (346)$$

§ 153. Моменты инерціи параллелепипеда относительно его осей симметріи. Согласно со сказаннымъ въ § 152-мъ оси симметріи параллелепипеда суть его *главныя центральныя оси инерціи.* Примемъ ихъ за оси координатъ, для опредѣленія, по формуламъ (336), главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи A, B, C. Пусть a, b, c, суть ребра параллеле-

пипеда. Вычислимъ входящіе въ формулы (336) интегралы:

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\,dx\,dy\,dz = bc\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\,dx = bc\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = bc\left(\frac{a^3}{24}+\frac{a^3}{24}\right) = \frac{a^3bc}{12}$$

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{c}{2}} y^2\,dx\,dy\,dz = \frac{ab^3c}{12}$$

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} z^3\,dx\,dy\,dz = \frac{abc^3}{12}$$

Слѣдовательно формулы (336) дадутъ, принимая плотность $= \delta$:

$$A = \delta\,\frac{abc}{12}\,(b^2 + c^2)$$

$$B = \delta\,\frac{abc}{12}\,(c^2 + a^2)$$

$$C = \delta\,\frac{abc}{12}\,(a^2 + b^2)$$

Или, обозначая массу $\delta\,abc$ черезъ M:

$$\left.\begin{aligned} A &= M\,\frac{(b^2+c^2)}{12} \\ B &= M\,\frac{(c^2+a^2)}{12} \\ C &= M\,\frac{(a^2+b^2)}{12} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (347)$$

§ 154. Центральный эллипсоидъ инерціи параллелепипеда. Вставляя опредѣленныя формулами (347) величины въ (345) получимъ слѣдующее уравненіе центральнаго эллипсоида инерціи параллелепипеда:

$$\frac{M}{12}\left[(b^2 + c^2)\,x^2 + (c^2 + a^2)\,y^2 + (a^2 + b^2)\,z^2\right] = k \quad . \ . \ (348)$$

Произвольность коэффиціента пропорціональности показываетъ, что для насъ важны не столько размѣры эллипсоида инерціи сколько его форма. Однако постараемся на этомъ примѣрѣ выяснить дѣло до конца. Для соблюденія обязательной однородности формулъ замѣтимъ, что

стоящее въ скобкахъ формулы (348) выраженіе есть величина размѣра $[L^4]$. Поэтому, и для полученія простѣйшихъ формулъ, положимъ;

$$k = \frac{M}{12} p^4 \qquad (349)$$

гдѣ p есть нѣкоторая линейная величина. Тогда (348) обратится въ

$$(b^2 + c^2)\, x^2 + (c^2 + a^2)\, y^2 + (a^2 + b^2)\, z^2 = p^4$$

или

$$\frac{x^2}{\dfrac{p^4}{(\sqrt{c + b^2})^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{p^4}{(\sqrt{c^2 + a^2})^2}} + \frac{z^2}{\dfrac{p^4}{(\sqrt{a^2 + b^2})^2}} = 1 \qquad (350)$$

Итакъ, главныя полуоси центральнаго эллипсоида инерціи суть:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{p^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ \dfrac{p^2}{\sqrt{c^2 + a^2}} \\ \dfrac{p^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array}\right\} \qquad (351)$$

Опредѣлимъ по этимъ даннымъ моментъ инерціи параллепепипеда относительно оси, проходящей чрезъ его центръ тяжести и составляющей съ осями углы (α, β, γ). По (346), и (347) имѣемъ:

$$J = \frac{M}{12}\left[(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma\right] \qquad (352)$$

Посмотримъ, какую бы мы получили величину для J, еслибы опредѣлили ее по (344).

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что:

$$x = \rho \,.\, \cos\alpha$$

$$y = \rho \,.\, \cos\beta$$

$$z = \rho \,.\, \cos\gamma$$

Подставляя эти величины въ (350) получимъ:

$$\rho^2\left[(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma\right] = p^4.$$

Вставляя сюда, вмѣсто p^4, его величину изъ (349), получимъ:

$$\rho^2\left[b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma\right] = \frac{12k}{M} \qquad (353)$$

Вставляя въ (344) величину ρ^2 опредѣляемую изъ (353), получимъ

$$J = \frac{k \,.\, M\left[(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^3\gamma\right]}{12k}$$

Здѣсь произвольная величина k сокращается и получается опять формула (352).

На этомъ примѣрѣ мы хотѣли выяснить слѣдующее. Благодаря произвольности k эллипсоидъ инерціи даннаго тѣла, опредѣленный уравненіемъ (343) имѣетъ произвольные размѣры. Другими словами; для каждаго значенія k получается свой эллипсоидъ инерціи, но любой изъ этихъ взаимно подобныхъ эллипсоидовъ годится для опредѣленія J построеніемъ, изложеннымъ въ концѣ § 151 и выражаемымъ формулою (344). Когда говорятъ объ эллипсоидѣ инерціи тѣла, то говорятъ о любомъ изъ взаимно подобныхъ эллипсоидовъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ k.

Посмотримъ теперь, какое соотношеніе имѣется между формою параллелепипеда и формою его эллипсоида инерціи. Положимъ: *наибольшій* размѣръ параллелепипедъ имѣетъ въ направленіи оси *иксовъ*, *наименьшій* въ направленіи оси *зедовъ*, такъ что:

$$a > b > c.$$

Изъ (351) видно что въ такомъ случаѣ эллипсоидъ инерціи будетъ имѣть *тоже* наибольшую ось по оси *иксовъ*, наименьшую по оси *зедовъ*.

Но изъ (344) видно, что чѣмъ больше ось 2ρ эллипсоида инерціи, тѣмъ меньше относящійся къ ней моментъ инерціи. Слѣдовательно наибольшій моментъ инерціи параллелепипеда будетъ относиться къ его наименьшей оси симметріи и наименьшій моментъ инерціи относится къ его наибольшей оси симметріи.

Если имѣемъ кубъ, то $a = b = c$ и эллипсоидъ инерціи принимаетъ видъ сферы.

Если $b=c$. то эллипсоидъ инерціи есть [см. (347) или (351)] эллипсоидъ вращенія около оси z.

§ 155. Эллипсоидъ инерціи параллелепипеда, относящійся къ концу его наименьшей оси симметріи. Предполагая $a>b>c$ опредѣлимъ моменты инерціи A', B', C', относящіеся къ осямъ параллельнымъ ребрамъ параллелепипеда и проходящимъ чрезъ точку, опредѣляемую, въ системѣ координатъ предыдущаго параграфа, координатами $\left(o,\ o,\ \frac{c}{2}\right)$.

По (337) имѣемъ:

$$A' = A + \frac{c^2}{4} M$$

$$B' = B + \frac{c^2}{4} M$$

$$C' = C,$$

или, согласно (347)

$$A' = M\frac{(b^2 + c^2)}{12} + \frac{3c^2}{12} M = M\frac{(b^2 + 4c^2)}{12}$$

$$B' = M\frac{(c^2 + a^2)}{12} + \frac{3c^2}{12} M = M\frac{(4c^2 + a^2)}{12}$$

$$C' = M\frac{(a^2 + b^2)}{12}.$$

Согласно § 152-му главныя оси инерціи точки $\left(o, o, \frac{c}{2}\right)$ именно параллельны осямъ (x, y, z). Величина главныхъ полуосей эллипсоида инерціи построеннаго для точки $\left(o, o, \frac{c}{2}\right)$ прямо опредѣляется изъ (341) формулами.

полуось параллельная оси x равна $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{A'}}$

» » » y » $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{B'}}$

» » » z » $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{C'}}$

§ 156. Моментъ инерціи прямого круглаго цилиндра относительно его геометрической оси. Обозначимъ чрезъ R радіусъ, чрезъ h высоту цилиндра. Примемъ за элементъ объема безконечно малую призму, ребра которой параллельны оси z цилиндра и основаніе которой ограничено дугами окружностей радіусовъ r и $r + dr$ и двумя радіусами, составляющими между собою уголъ $d\theta$. Высота такой призмы будетъ dz; объемъ ея будетъ $r\,dr\,d\theta\,dz$, такъ что ея моментъ инерціи относительно оси z равенъ

$$r^3\,dr\,d\theta\,dz.$$

Поэтому моментъ инерціи J всего цилиндра относительно его геометрической оси равенъ

$$J = \delta \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3\,dr\,d\theta\,dz = \frac{\pi}{2} R^4 h\,\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; (354)$$

Но масса цилиндра$=\pi R^2 h\delta$. Слѣдовательно:

$$J = \frac{R^2}{2} M \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (355)$$

ГЛАВА II.

Моменты инерціи площадей.

§ 157. Моментъ инерціи площади. Представимъ себѣ весьма тонкую пластинку ограниченную двумя взаимно параллельными плоскостями и какою либо цилиндрическою поверхностью, периметръ основанія которой называется *контуромъ* пластинки. Пусть b толщина, μ плотность пластинки. Возьмемъ на одной изъ плоскихъ сторонъ элементарную площадь ds и вырѣжемъ по контуру этой площади элементъ пластинки, тоже цилиндрическій, съ образующими перпендикулярными къ плоскимъ сторонамъ. Масса m такого элемента будетъ:

$$m = b \,.\, \mu \;.\; ds \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (355)$$

Обозначимъ чрезъ r разстояніе такого элемента отъ оси MN, лежащей въ плоскости одной изъ плоскихъ сторонъ пластинки.

Моментъ инерціи всей пластинки относительно оси MN будетъ

$$J = \Sigma mr^2 = \Sigma b\mu \,.\, r^2 ds = b\mu \,\Sigma\, r^2 ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; (357)$$

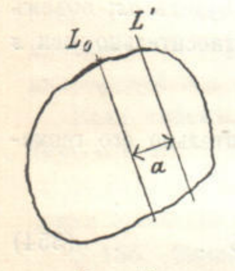
Величина $b\mu$, какъ это вытекаетъ изъ (356), есть масса пластинки, вырѣзанной на единицѣ площади. Ее называютъ массою единицы площади пластинки. Если эта масса $b\mu$ равна единицѣ, то

$$J = \Sigma r^2 ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (358)$$

Теоремы предыдущей главы легко распространить на моменты инерціи площадей, тогда получимъ слѣдующее.

§ 158. Соотношеніе между моментами инерціи площади относительно взаимно-параллельныхъ осей.

Моментъ инерціи J' относительно какой-нибудь оси L' (фиг. 49) равенъ суммѣ момента инерціи J_0 относительно оси параллельной но проходящей чрезъ центръ инерціи пластинки и произведенія квадрата разстоянія между этими осями на площадь s всей пластинки.

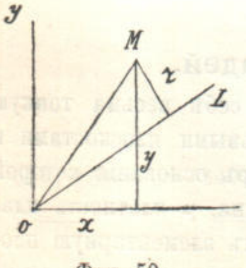


Фиг. 49.

$$J' = J_0 + a^2 \,.\, s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (359)$$

Отсюда слѣдуетъ, что *изъ всѣхъ моментовъ инерціи данной площади относительно осей параллельныхъ между собою наименьшій тотъ, который берется относительно оси, проходящей чрезъ центръ инерціи площади.* (Здѣсь разсматриваемъ только оси, лежащія въ плоскости пластинки).

§ 159. Моменты инерціи площади относительно осей, взаимно-пересѣкающихся. По даннымъ моментамъ инерціи площади относительно двухъ взаимно перпендикулярныхъ осей x и y опредѣлимъ моментъ инерціи относительно оси, проходящей чрезъ ихъ пересѣченіе O (фиг. 50).



Фиг. 50.

$$\Sigma y^2 \,.\, ds = A.$$

$$\Sigma x^2 \,.\, ds = B.$$

Примемъ обозначеніе:

$$\Sigma xy \,.\, ds = C.$$

Найдемъ по этимъ даннымъ, чему равенъ моментъ инерціи J относительно прямой L, составляющей съ осью x уголъ φ. Пусть M будетъ какая-нибудь точка $(x,\, y)$ данной площади. Обозна-

чимъ чрезъ r ея разстояніе отъ L. Имѣемъ:

$$r^2 = x^2 + y^2 - [\overline{OM} \,.\, cos\,(\overline{OM}, L)]^2$$
$$= x^2 + y^2 - [x\,cos\,\varphi + y\,sin\,\varphi]^2$$
$$= x^2\,sin^2\,\varphi + y^2\,cos^2\,\varphi - 2xy \,.\, sin\,\varphi \,.\, cos\,\varphi.$$

Поэтому:

$$J = \Sigma r^2 \,.\, ds = sin^2\,\varphi\,\Sigma x^2 \,.\, ds + cos^2\,\varphi\,\Sigma y^2 \,.\, ds - 2\,sin\,\varphi \,.\, cos\,\varphi \,.\, \Sigma xy\,ds$$

или

$$J = A \,.\, cos^2\,\varphi + B\,sin^2\,\varphi - 2C \,.\, sin\,\varphi \,.\, cos\,\varphi. \quad \ldots \quad (360)$$

Эта формула опредѣляетъ J по даннымъ φ, A, B, C. Слѣдовательно, вообще говоря, для рѣшенія задачи недостаточно знать φ, A, B: надо еще знать C. Но мы сейчасъ увидимъ, подобно тому какъ мы это видѣли въ предыдущей главѣ, что во многихъ случаяхъ $C = o$.

§ 160. Эллипсъ инерціи. Чрезъ какую-нибудь точку O плоскости, въ которой лежитъ данная площадь, будемъ проводить оси L, опредѣлять по отношенію къ этимъ L моменты инерціи и откладывать на осяхъ L векторы ρ, такъ чтобы:

$$\rho = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (362)$$

Докажемъ, что геометрическое мѣсто концовъ такихъ векторовъ будетъ эллипсъ.

Имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \,.\, cos\,\varphi = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{J}} \,.\, cos\,\varphi \\ y &= \rho \,.\, sin\,\varphi = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{J}} \,.\, sin\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (362)$$

Вставивъ опредѣляемыя изъ (362) величины $cos\,\varphi$ и $sin\,\varphi$ въ (360), пополучимъ:

$$Ax^2 + By^2 - 2Cxy = k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (363)$$

Это уравненіе 2-го порядка. J не обращается въ нуль. Слѣдовательно, согласно (361), кривая (363) не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ. Слѣдовательно это эллипсъ. Онъ называется *эллипсомъ инерціи.* Извѣстно изъ аналитической геометріи, что большая ось такого эллипса наклонена къ оси x подъ угломъ α опредѣляемымъ формулою:

$$tg\,(2\alpha) = \frac{2C}{B - A}.$$

Повернувъ оси координатъ на уголъ α получимъ уравненіе этого эллипса въ видѣ

$$A'x_1^{\,2} + B'y_1^{\,2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (364)$$

Оси эллипса инерціи, построеннаго для точки O называются *главными осями инерціи* для точки O. Если O находится въ центрѣ тяжести дан-

ной площади, то оси эллипса инерціи называются *главными центральными осями инерціи.*

По даннымъ моментамъ инерціи A и B относительно главныхъ осей инерціи для какой либо точки O находится моментъ инерціи J для оси, составляющей съ осью x уголъ φ, по формулѣ

$$J = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi \ldots\ldots\ldots (365)$$

вытекающій изъ (360) при $C = o$.

Итакъ: *законъ распредѣленія моментовъ инерціи площади относительно осей, проходящихъ чрезъ какую либо точку O ея плоскости, выражается эллипсомъ инерціи, именно: моментъ инерціи относительно какой либо оси L, проходящей чрезъ O обратно прапорціоналенъ квадрату разстоянія точки O до точки пересѣченія L съ этимъ эллипсомъ*, такъ какъ изъ (361) слѣдуетъ:

$$J = \frac{k}{\rho^2} \ldots\ldots\ldots (366)$$

Зная моменты инерціи A и B относительно главныхъ центральныхъ осей, можно найти моментъ инерціи относительно какой угодно оси; а именно: (по 365) опредѣлимъ моментъ инерціи для оси, проходящей чрезъ центръ тяжести и параллельной данной оси; затѣмъ по (359) опредѣлимъ моментъ инерціи относительно данной оси.

Перейдемъ къ примѣрамъ.

§ 161. Моментъ инерціи прямолинейнаго отрѣзка относительно оси, проведенной чрезъ конецъ его перпендикулярно отрѣзку. Обозначимъ чрезъ h длину отрѣзка. Если плотность отрѣзка $= 1$, то масса его элемента $= dx$. Вычисляемъ:

$$J = \Sigma x^2 dx = \int_0^h x^2 dx = \frac{h^3}{3}.$$

Итакъ:

$$J = \frac{h^3}{3} \ldots\ldots\ldots (367)$$

§ 162. Моментъ инерціи прямолинейнаго отрѣзка относительно оси перпендикулярной къ нему проходящей чрезъ его центръ тяжести. По (359) получимъ:

$$J = J_0 + \frac{h^2}{4} \cdot h.$$

Сравнивая (съ 367) получимъ:

$$J_0 = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}.$$

Отсюда:

$$J_0 = \frac{h^3}{12} \ldots\ldots\ldots (368)$$

§ 163. Моментъ инерціи прямолинейнаго отрѣзка относительно какой либо оси, лежащей въ плоскости отрѣзка. Опредѣлимъ (фиг. 51) моментъ инерціи прямолинейнаго отрѣзка относительно оси L ссставляющей съ нимъ уголъ φ и отстоящей отъ его центра тяжести на разстояніи a.

Замѣтимъ, что для такого отрѣзка, принятаго за ось x

$$A = \Sigma y^2 ds = o$$
$$C = \Sigma xy\, ds = o.$$

Получимъ (по 365) моментъ инерціи J_0 относительно оси, проходящей чрезъ центръ тяжести подъ угломъ φ къ отрѣзку:

$$J_0 = B \sin^2 \varphi.$$

Или, согласно (368)

$$J_0 = \frac{h^3}{12} \sin^2 \varphi.$$

Фиг. 51.

Затѣмъ (по 359) получимъ искомый

$$J = J_0 + a^2 h = \frac{h^3}{12} \sin^2 \varphi + a^2 h.$$

§ 164. Моментъ инерціи прямоугольника относительно его основанія. Обозначимъ высоту прямоугольника чрезъ h, основаніе чрезъ b, искомый моментъ инерціи чрезъ J.

$$J = \Sigma x^2 ds = \int_0^h x^2\, dx \int_0^h dy = b \int_0^h x^2\, dx = \frac{bh^3}{3}.$$

Итакъ:

$$J = \frac{bh^3}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (369)$$

Параллелограммъ превращается въ равновеликій прямоугольникъ прибавкою и отнятіемъ равныхъ треугольниковъ. Слѣдовательно и моментъ инерціи параллелограмма относительно его основанія b выражается формулою (369):

§ 165. Моментъ инерціи прямоугольника относительно оси, проходящей чрезъ его центръ тяжести параллельно одной изъ его сторонъ. Обозначимъ искомый моментъ инерціи чрезъ J_0. По (359):

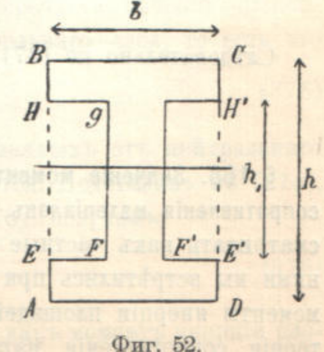
$$J_0 = J - \frac{h^2}{4} . bh.$$

По (369):

$$J_0 = \frac{bh^3}{3} - \frac{h^2}{4} . bh.$$

Слѣдовательно:

$$J_0 = \frac{bh^3}{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (370)$$



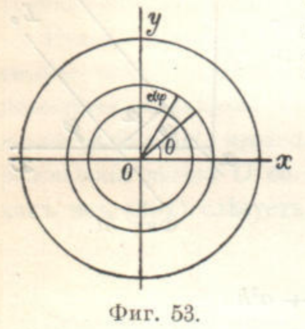
Фиг. 52.

§ 166. Моментъ инерціи двутавроваго сѣченія относительно оси, проходящей чрезъ его центръ тяжести параллельно его основанію. Моментъ инерціи J_0 такого сѣченія (фиг. 52), благодаря выраженію моментовъ инерціи суммами, равенъ разности мо-

мента инерціи прямоугольника $ABCD$ и частей $EFGH$ и $E'F'G'H'$. Слѣдовательно:

$$J_0 = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b - b_1) h^3_1}{12}.$$

§ 167. **Моментъ инерціи круга относительно діаметра** (фиг. 23). За элементъ площади примемъ часть, ограниченную двумя безконечно близкими окружностями и двумя радіусами, составляющими уголъ $d\theta$. Площадь такого элемента равна $ds = \rho d\rho \,.\, d\theta$



Фиг. 53.

$$J_0 = \Sigma y^2 \, ds = \Sigma \rho^2 \sin^2 \theta \,.\, \rho \;\; d\rho \,.\, d\theta =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \theta \,.\, d\rho \,.\, d\theta =$$

$$= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \,.\, d\theta \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (371)$$

$\sin^2 \theta$ въ послѣднемъ интегралѣ проходитъ всѣ тѣ значенія, какъ $\cos^2 \theta$, только въ другомъ порядкѣ. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \,.\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \,.\, d\theta.$$

Слѣдовательно:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \,.\, d\theta.$$

Итакъ:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \,.\, d\theta = \pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (372)$$

Слѣдовательно по (371):

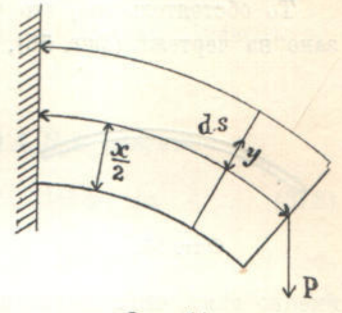
$$J_0 = \frac{\pi R^4}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (373)$$

§ 168. **Значеніе момента инерціи площади относительно оси въ теоріи сопротивленія матеріаловъ.** Мы могли бы моменты инерціи площадей разсматривать какъ частные случаи моментовъ инерціи тѣлъ, а съ послѣдними мы встрѣтились при вычисленіи живой силы вращенія (§ 148). Но моменты инерціи площадей играютъ, кромѣ того, весьма важную роль въ теоріи сопротивленія матеріаловъ. Изслѣдуемъ, напримѣръ, равновѣсіе бруса, задѣланнаго однимъ концомъ въ стѣну, имѣющаго форму парал-

лелепипеда и сгибаемаго грузомъ P, приложеннымъ къ его свободному концу (фиг. 54). Изъ теоріи упругости извѣстно, что нѣкоторый слой MN останется нерастянутымъ и несжатымъ. Онъ называется *нейтральнымъ слоемъ.* Слои, лежащіе выше его, растягиваются при сгибаніи бруса; слои лежащіе ниже сжимаются.

Обозначимъ внутреннюю упругую силу, сопротивляющуюся деформаціи бруса и отнесенную къ единицѣ площади сѣченія, чрезъ σ; эта величина называется *напряженіемъ.* Эта величина перемѣнная, различная для различныхъ мѣстъ поперечнаго сѣченія бруса. Пусть σ_0 есть напряженіе крайнихъ волоконъ. Напряженіе на поверхности отстоящаго отъ нейтральнаго слоя на разстояніи y элемента ds поперечнаго сѣченія будетъ σds; оно дастъ разгибающій статическій моментъ:

$$y \sigma ds.$$



Фиг. 54.

Все поперечное сѣченіе дастъ разгибающій статическій моментъ:

$$\int y \sigma ds$$

распространенный на все поперечное сѣченіе. Грузъ P дастъ наибольшій (и потому опаснѣйшій въ смыслѣ перелома) статическій моментъ для сѣченія, находящагося у стѣны на разстояніи h отъ конца. Этотъ сгибающій моментъ будетъ Ph. Если чрезъ σ будемъ обозначать *наибольшее допускаемое* для даннаго матеріала *напряженіе*, то для него можемъ составить уравненіе, показывающее равенство сгибающаго и разгибающаго статическихъ моментовъ:

$$\int y \sigma ds = Ph \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (374)$$

Это уравненіе называется *уравненіемъ крѣпости.* Оно служитъ для вычисленія прочныхъ размѣровъ частей построекъ и машинъ. Его обыкновенно еще преобразовываютъ, выходя изъ оправдываемаго на опытѣ предположенія, что напряженія въ элементахъ поперечнаго сѣченія пропорціональны разстояніямъ элементовъ отъ нейтральнаго слоя, то есть что

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (375)$$

За σ_0 примемъ напряженіе наиболѣе удаленныхъ отъ нейтральнаго слоя волоконъ, которыя наиболѣе деформируются. Подставивъ въ (374), вмѣсто σ, ея величину, опредѣляемую изъ (375), получимъ:

$$\frac{\sigma_0}{y_0} \int y^2 ds = Ph \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (376)$$

Но $\int y^2 ds$ есть не что иное (см. § 157), какъ моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія относительно оси, направленной по его пере-

сѣченію съ нейтральнымъ слоемъ. Слѣдовательно уравненіе крѣпости приметъ видъ:

$$\frac{\sigma_0}{y_0} J = Ph \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (377)$$

Вотъ какимъ образомъ моментъ инерціи появляется въ уравненіи крѣпости и играетъ, слѣдовательно, первостепенную роль въ теоріи сопротивленія матеріаловъ.

Приведемъ еще слѣдующій примѣръ, иллюстрирующій дѣло.

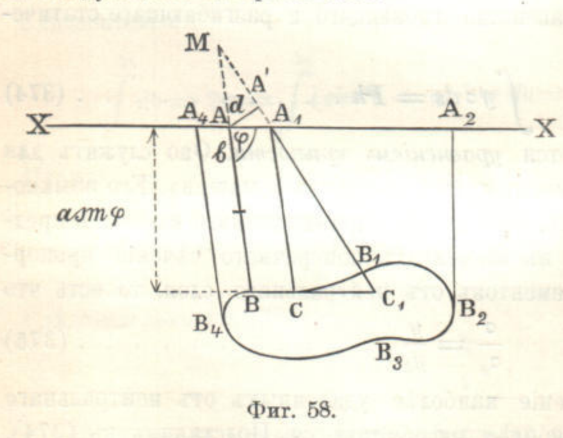
То обстоятельство, что чертежную линейку легче согнуть какъ показано на чертежѣ (фиг. 55), чѣмъ какъ показано на (фиг. 56) объясняется



Фиг. 55. Фиг. 56. Фиг. 57.

именно тѣмъ, что моменты инерціи поперечнаго сѣченія линейки (фиг. 57) относительно осей AB и CD не одинаковы и потому согласно *уравненію крѣпости* (337), требуется большій сгибающій моментъ Ph для большаго момента инерціи J.

§ 169. Снарядъ Амслера для опредѣленія моментовъ инерціи площадей. Въ виду такой технической важности моментовъ инерціи площадей Амслеръ устроилъ снарядъ для непосредственнаго ихъ опредѣленія, основанный на слѣдующихъ соображеніяхъ.



Фиг. 58.

Представимъ себѣ, что стержень AB, длина котораго равна a, переходитъ изъ положенія AB въ сосѣднее A_1B_1, при чемъ A скользитъ по прямой X, конецъ-же B скользитъ по дугѣ BB_1 замкнутаго контура $BB_1\,B_3\,B_4\,B$. Опредѣлимъ моментъ инерціи площади AA_1BB_1 описанной стержнемъ. Эта площадь разбивается на площади параллелограмма AA_1CB и треугольника A_1B_1C. Если

$$AA_1 = dx; \quad \angle A_1AB = \varphi; \quad \angle CA_1B_1 = d\varphi,$$

то

$$AA_1CB = a \,.\, \sin\varphi \,.\, dx; \quad CA_1B_1 = a^2 \frac{d\varphi}{2}$$

Моментъ инерціи параллелограмма, согласно § 164, равенъ

$$\frac{1}{3}\, a^3 \,.\, sin^3 \varphi\; dx.$$

Моментъ инерціи треугольника CA_1B_1, пренебрегая безконечно малыми 2-го порядка можно считать равнымъ моменту инерціи треугольника CA_1C_1 въ которомъ CC_1 параллельна оси X. По общей формулѣ

$$\int y^2\, ds,$$

или по формулѣ (411) моментъ инерціи такого треугольника равенъ

$$\frac{1}{4}\, a^4 \,.\, sin^2 \varphi \,.\, d\varphi.$$

Итакъ, моментъ инерціи dJ всей площади AA_1B_1B равенъ:

$$dJ = \frac{1}{3}\, a^3 \,.\, sin \varphi \quad dx + \frac{1}{4}\, a^4 \,.\, sin^2 \varphi \,.\, d\varphi \;.\;\;.\;\;.\;\;. \quad (378)$$

Интегрируя это выраженіе въ предѣлахъ обхода точкою B контура $BB_2B_4B = L$, получимъ разность моментовъ инерціи площадей $A_4A_2B_2B_3B_4$ и $A_4A_2B_2BB_4$ равную моменту инерціи J площади контура L. Но

$$\int_0^L sin\, \varphi \,.\, d\varphi = 0;$$

$$\int_0^L sin^2\, \varphi\; d\varphi = 0,$$

такъ какъ φ возвращается къ своей первоначальной величинѣ. Итакъ:

$$J = \frac{1}{3}\, a^3 \int_0^L sin^3 \varphi \,.\, dx = \frac{1}{3}\, a^3 \int_0^L \frac{3\, sin\, \varphi - sin\,(3\varphi)}{4}\, dx;$$

$$J = \frac{1}{4}\, a^3 \int_0^L sin\, \varphi \,.\, dx - \frac{1}{12}\, a^3 \int_0^L sin\,(3\varphi) \,.\, dx \;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \quad (379)$$

Обозначимъ чрезъ M точку пересѣченія продолженій прямыхъ BA и B_1A_1. Если прикрѣпимъ къ стержню AB, на разстояніи b отъ A, каточекъ на оси параллельной съ AB, то дуга dU, описанная каточкомъ по бумагѣ при переходѣ стержня изъ AB въ A_1B_1 равна

$$dU = (MA + b)\, d\varphi.$$

Пренебрегая безконечно малыми 2-го порядка, имѣемъ

$$MA_1\, d\varphi = AA' = dx\, sin\, \varphi.$$

Потому что

$$AA' = dx \,.\, sin\, (\varphi - d\varphi).$$

Слѣдовательно

$$dU = \sin\varphi\, dx + b\, d\varphi.$$

При обходѣ контура L концомъ B полная дуга S, описанная на бумагѣ каточкомъ, равна

$$S = \int_0^L \sin\varphi\, dx + b\int_0^L d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (380)$$

Но $\int_0^L d\varphi = 0$. Слѣдовательно:

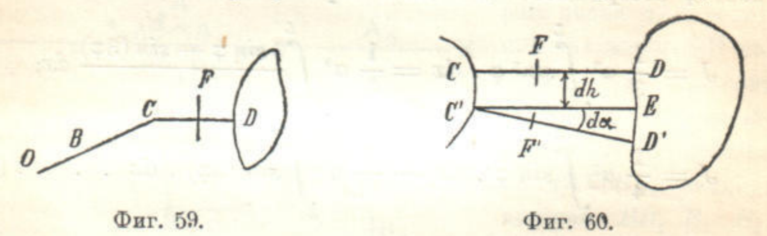
$$S = \int_0^L \sin\varphi \, . \, dx$$

Итакъ, необходимый для формулы (379) интегралъ $\int_0^L \sin\varphi \, . \, dx$ отсчитывается на дѣленіяхъ каточка. На снарядѣ находится еще другой каточекъ, соединенный съ первымъ зубчатыми колесами такъ, что, ось его образуетъ съ осью x уголъ 3φ. На дѣленіяхъ втораго каточка отсчитываемъ входящій въ формулу (379) интегралъ

$$\int_0^L \sin(3\varphi)\, dx.$$

§ **170. Планиметръ Амслера.** Здѣсь мнѣ кажется умѣстнымъ изложить, кстати, теорію другого весьма употребительнаго въ техникѣ снаряда Амслера, служащаго для опредѣленія площадей, ограниченныхъ данными замкнутыми контурами.

Этотъ *планиметръ* состоитъ изъ двухъ стержней OB и CD (фиг. 59) соединенныхъ въ C шарниромъ. Въ O находится острый штифтъ, закрѣ-



Фиг. 59. Фиг. 60.

пляемый въ какой либо точкѣ чертежа. Въ D находится штифтъ, который обводится по контуру измѣряемой площади. На стержнѣ CD находится колесо F, катящееся по бумагѣ.

Представимъ себѣ стержень CD (фиг. 60), длину котораго обозначимъ чрезъ L. Заставимъ конецъ его D идти по контуру измѣряемой площади; конецъ же C поведемъ по нѣкоторой линіи CC'. Пусть стержень пришелъ изъ положенія CD въ положеніе $C'D'$. Можно разсматривать это перемѣщеніе состоящимъ изъ: 1) перемѣщенія стержня CD въ положеніе параллельное C_1E_1 и 2) поворота около C_1 на уголъ $d\alpha$.

Во время такого перемѣщенія стержень проходитъ площадь:

$$CC'D'D = d\omega.$$

Обозначимъ: разстояніе между CD и $C'E$ чрезъ dh, радіусъ колеса F чрезъ R, разстояніе колеса отъ C чрезъ λ, различныя положенія колеса чрезъ F, F', F'' . . . такъ, что:

$$CF = C'F' = \lambda.$$

Имѣемъ:

$$d\omega = CDC'E + EC'D' = L \,.\, dh + \frac{L^2 d\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; (381)$$

Обозначимъ чрезъ $d\theta$ уголъ, на который повертывается колесо F при переходѣ изъ F въ F'. Имѣемъ:

$$R d\theta = dh + \lambda \,.\, d\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (382)$$

Исключая h изъ (381) и (382), получимъ:

$$d\omega - R \,.\, L \,.\, d\theta = \left(\frac{L^2}{2} - \lambda L\right) d\alpha.$$

Интегрируя, получимъ величину

$$\omega = R \,.\, L \,.\, \theta + \int \left(\frac{L^2}{2} - \lambda L\right) d\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; (383)$$

Элементы $d\omega$ положительны, когда они увеличиваютъ проходимую стержнемъ площадь и отрицательны когда они ее уменьшаютъ. Поэтому $\omega = \int d\omega$ представляетъ собою разность положительныхъ и отрицательныхъ элементовъ и равна измѣряемой площади контура.

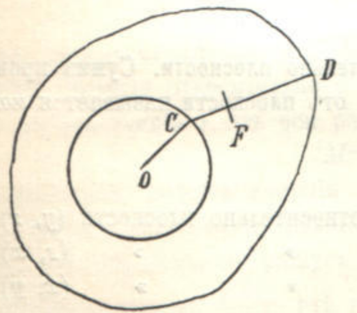
За линію CC' принимаютъ окружность. C описываетъ окружность около острія O. Могутъ быть два случая:

1) Точка O лежитъ внутри контура (фиг. 61). Въ этомъ случаѣ α измѣняется отъ 0 до 2π; формула (383) даетъ:

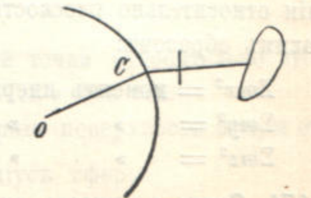
$$\omega = R \,.\, L \,.\, \theta + \left(\frac{L^2}{2} - \lambda L\right) 2\pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (384)$$

2) Точка O лежитъ внѣ контура (фиг. 62). Въ этомъ случаѣ α измѣняется отъ нуля до нуля, и формула (383) даетъ:

$$\omega = R \,.\, L \,.\, \theta \quad . \; . \; (385)$$



Фиг. 61.



Фиг. 62.

Въ обоихъ случаяхъ площадь легко опредѣляется по R, L и по углу θ читаемому на дѣленіяхъ колесика.

ГЛАВА III.

Общія свойства моментовъ инерціи и нахожденіе ихъ облегченными способами.

§ 171. Изъ отрѣзковъ пропорціональныхъ моментовъ инерціи A, B, C тѣла относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей всегда можно составить треугольникъ. Дѣйствительно, изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= \Sigma m\,(y^2 + z^2) \\ B &= \Sigma m\,(z^2 + x^2) \\ C &= \Sigma m\,(x^2 + y^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (386)$$

слѣдуетъ

$$A + B - C = 2\Sigma mz^2$$

Но Σmz^2 есть величина всегда положительная. Слѣдовательно:

$$A + B > C.$$

Точно такъ же:

$$B + C > A$$

$$C + A > B$$

при этихъ условіяхъ всегда возможенъ треугольникъ изъ отрѣзковъ пропорціональныхъ A, B и C (сумма двухъ сторонъ больше третьей).

§ 172. Моментъ инерціи относительно точки. Сумма произведеній массъ на квадраты ихъ разстояній отъ данной точки O называется моментомъ инерціи относительно *точки* O или *полярнымъ моментомъ инерціи* при полюсѣ O. Онъ, слѣдовательно, равенъ

$$\Sigma mr^2$$

гдѣ r разстояніе массы m отъ полюса.

§ 173. Моментъ инерціи относительно плоскости. Сумма произведеній массъ на квадраты разстояній ихъ отъ плоскости называется *моментомъ* инерціи относительно плоскости.

Такимъ образомъ:

$\Sigma mx^2 =$ моментъ инерціи относительно плоскости (y, z)
$\Sigma my^2 =$ » » » » (z, x)
$\Sigma mz^2 =$ » » » » (x, y)

§ 174. Сумма моментовъ инерціи относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ, равна двойному полярному моменту инерціи относительно этой точки. Изъ (336) слѣдуетъ:

$$A + B + C = 2\Sigma m\,(x^2 + y^2 + z^2) \quad \ldots\ldots \quad (387)$$

§ **175. Моментъ инерціи J поверхности сферы относительно діаметра.** Если радіусъ сферы равенъ r, то полярный моментъ относительно ея центра равенъ Σmr^2. Отсюда, согласно § 174, слѣдуетъ:

$$J = \frac{2}{3} Mr^2.$$

§ **176. Моментъ инерціи плоской пластинки относительно оси перпендикулярной къ ея плоскости равенъ суммѣ моментовъ инерціи пластинки относительно двухъ взаимно перпендикулярныхъ осей, лежащихъ въ ея плоскости.** Дѣйствительно принимая ось перпендикулярную къ пластинкѣ за ось z получимъ по (386):

$$A = \Sigma my^2; \qquad B = \Sigma mx^2; \qquad C = \Sigma m (x^2 + y^2).$$

Отсюда

$$C = A + B.$$

§ **177. Моментъ инерціи J окружности относительно діаметра.** Если радіусъ окружности r, то моментъ инерціи ея относительно перпендикуляра къ ея плоскости, проходящаго чрезъ ея центръ, равенъ

$$\Sigma mr^2 = r^2 \Sigma m = Mr^2 \quad \text{. . . . . (388)}$$

Слѣдовательно моментъ инерціи J относительно діаметра будетъ, согласно § 177, равенъ

$$J = \frac{1}{2} Mr^2 \quad \text{. . . . . (389)}$$

§ **178. Радіусъ инерціи.** Мы знаемъ, что моментъ инерціи J относительно оси равенъ Σmr^2, гдѣ r разстояніе каждой точки тѣла отъ оси.

Величина ρ опредѣляемая изъ уравненія

$$\Sigma mr^2 = M\rho^2 \quad \text{. . . . . (390)}$$

и слѣдовательно равная

$$\rho = \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{M}} \quad \text{. . . . . (391)}$$

называется *радіусомъ инерціи* или *гираціоннымъ радіусомъ*.

Моментъ инерціи относительно оси точки, имѣющей массу M и находящейся въ разстояніи r отъ оси равенъ

$$Mr^2.$$

Слѣдовательно, радіусъ инерціи такой точки относительно этой оси равенъ согласно (391) самому разстоянію ея r отъ оси.

Изъ § 175 слѣдуетъ, что радіусъ инерціи поверхности сферы относительно діаметра равенъ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r$, гдѣ r радіусъ сферы.

Изъ § 177 слѣдуетъ, что радіусъ инерціи окружности относительно перпендикуляра къ ея плоскости, проходящаго чрезъ ея центръ, равенъ $\frac{r}{\sqrt{2}}$, гдѣ r радіусъ окружности.

§ 179. Моментъ инерціи эллиптической пластинки. Пусть уравненіе эллипса, ограничивающаго пластинку таково

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

такъ что:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (392)$$

Моментъ инерціи квадранта эллипса относительно оси y будетъ:

$$\int_0^a x^2 y\, dx=\frac{b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx.$$

Полагая здѣсь

$$x=a\sin\varphi,$$

получимъ

$$\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^2\varphi \, . \, \sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Моментъ инерціи площади всего эллипса будетъ слѣдовательно:

$$J_1=ba^3\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi \, . \, \sin^2\varphi\, d\varphi=\frac{ba^3}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\varphi)\, d\varphi=$$

$$=\frac{ba^3}{8}\int_0^{4\pi}\sin^2(2\varphi)\, d(2\varphi)=\frac{ba^3}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\varphi)\, d(2\varphi).$$

Отсюда по (372) получимъ:

$$J_1=\pi ab\,\frac{a^2}{4}.$$

Но $\pi ab=M=$ массѣ пластинки. Слѣдовательно

$$J_1=M\, . \,\frac{a^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (393)$$

Точно такъ же найдемъ моментъ инерціи J^2 эллиптической пластинки относительно оси x

$$J^2=M\, . \,\frac{b^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (394)$$

Слѣдовательно моментъ инерціи J относительно оси перпендикулярной къ эллиптической пластинкѣ и проходящей чрезъ ея центръ будетъ:

$$J=M\, . \,\frac{a^2+b^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (395($$

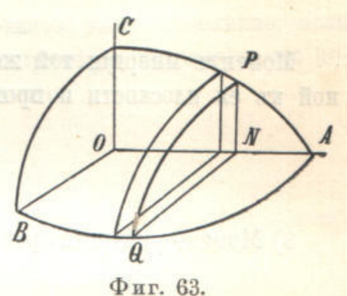
§ 180. Моментъ инерціи трехоснаго эллипсоида относительно одной изъ осей симметріи. Пусть уравненіе эллипсоида (фиг. 63) таково:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (396)$$

Разсмотримъ слой PNQ параллельный плоскости (y, z). Площадь его *) равна $\pi \,.\, PN \,.\, QN$. Но PN есть значеніе, принимаемое координатою z при $y=0$; тогда какъ QN есть значеніе, принимаемое координатою y при $z=0$. Слѣдовательно, согласно съ (396)

$$PN=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \ldots (397)$$

$$QN=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \ldots (398)$$



Фиг. 63.

Поэтому площадь слоя равна

$$\frac{\pi \,.\, b \,.\, c}{a^2}\,(a^2-x^2).$$

Слѣдовательно моментъ инерціи J относительно оси x, согласно съ §§ 176 и 179 будетъ:

$$J=\int_{-a}^{+a}\frac{\pi \,.\, b \,.\, c}{a^2}\,.\,(a^2-x^2)\,\frac{(\overline{PN}^2+\overline{QN}^2)}{4}\,.\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\,.\,\frac{bc}{a^2}\,.\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\,\frac{(b^2+c^2)}{a}\,(a^2-x^2)\,.\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\,.\,\pi abc\,\frac{(b^2+c^2)}{5}.$$

Но . $\frac{4}{3}\,\pi abc=M$. Слѣдовательно:

$$J=M\,\frac{b^2+c^2}{5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (399)$$

§ 181. Формулы моментовъ инерціи, особенно часто встрѣчающихся въ практикѣ. Моментъ инерціи

1) Площади прямоугольника, имѣющаго стороны $2a$ и $2b$, относительно оси лежащей въ его плоскости, проходящей чрезъ его центръ и перпендикулярной къ сторонѣ $2a$ равенъ

$$M\frac{a^2}{3}.$$

*) Нарисованъ только одинъ октантъ эллипсоида, а разсужденія относятся ко всему эллипсоиду.

Моментъ инерціи той же площади относительно оси перпендикулярной плоскости прямоугольника и проходящей чрезъ его центръ равенъ

$$M\frac{a^2+b^2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (400)$$

2) Моментъ инерціи эллиптической пластинки относительно оси $2a$ равенъ

$$M\frac{b^2}{4}.$$

Моментъ инерціи той же пластинки относительно оси перпендикулярной къ ея плоскости и проходящей чрезъ ея центръ равенъ:

$$M\frac{a^2+b^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (401)$$

3) Моментъ инерціи трехоснаго эллипсоида относительно оси $2a$ равенъ:

$$M\frac{b^2+c^2}{5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (402)$$

Слѣдовательно моментъ инерціи объема сферы относительно діаметра равенъ

$$M\,.\,\frac{2}{5}r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (403)$$

гдѣ r радіусъ сферы.

4) Моментъ инерціи прямоугольнаго параллелепипеда, имѣющаго ребра $2a$, $2b$, $2c$, относительно оси симметріи параллельной ребру $2a$ равенъ (сравн. § 151):

$$M\frac{b^2+c^2}{3}.$$

Для запоминанія этихъ формулъ замѣтимъ: моментъ инерціи этихъ тѣлъ относительно оси симметріи равенъ

$$M\,.\,\frac{\text{сумма квадратовъ полуосей перпендикулярныхъ къ оси}}{\text{3, или 4, или 5}}.$$

Здѣсь въ знаменателѣ

3 для прямоугольнаго тѣла,

4 » эллиптическаго »

5 » эллипсоидальнаго »

§ 182. Моменты инерціи, находимые дифференцированіемъ. Моменты инерціи всякаго тѣла могутъ быть находимы при помощи формулъ (386) и теоремъ §§ 149 и 150. Но иногда удобнѣе бываетъ вычислять ихъ дифференцированіемъ изъ извѣстныхъ моментовъ инерціи другихъ тѣлъ.

Зная, напримѣръ, что моментъ инерціи эллипсоида относительно оси $2a$ равенъ

$$\frac{4}{3}\pi\mu\,.\,abc\,\frac{b^2+c^2}{5},$$

заключаемъ, что при безконечно маломъ увеличеніи этого эллипсоида, моментъ инерціи слоя, на который эллипсоидъ увеличился равенъ

$$d\left[\frac{4}{3}\pi\,.\,\mu\,.\,abc\,\frac{b^2+c^2}{5}\right].$$

Указанное здѣсь дифференцированіе можетъ быть исполнено, если данъ законъ измѣненія эллипсоида. Если, напримѣръ, положимъ, что поверхности, ограничивающія слой, подобны и что

$$b = pa$$

$$c = qa,$$

то моментъ инерціи эллипсоида равенъ

$$\frac{4}{3}\pi\mu\,.\,pq\,\frac{(p^2+q^2)\,a^5}{5},$$

моментъ инерціи слоя равенъ

$$\frac{4}{3}\pi\mu\,.\,pq\,(p^2+q^2)\,a^4\,.\,da \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (404)$$

Масса эллипсоида равна

$$\frac{4}{3}\pi\mu\,.\,pqa^3.$$

Слѣдовательно масса слоя равна

$$4\pi\mu\,.\,pq\,.\,a^2da = M.$$

Поэтому опредѣленный формулою (404) моментъ инерціи слоя равенъ

$$\frac{1}{3}\,M\,(b^2+c^2)$$

§ 183. **Гираціонный эллипсоидъ.** Разсмотримъ эллипсоидъ, оси котораго расположены по главнымъ осямъ инерціи для точки O и полуоси котораго равны гираціоннымъ радіусамъ, идущимъ по этимъ осямъ. Такой эллипсоидъ называется гираціоннымъ. Пусть эти гираціонные радіусы суть α, β, γ. Они, согласно § 176, опредѣляются изъ формулъ:

$$\left.\begin{aligned} M\alpha^2 &= A \\ M\beta^2 &= B \\ M\gamma^2 &= C \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (405)$$

Уравненіе гираціоннаго эллипсоида будетъ слѣдовательно:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (406)$$

или, согласно (405)

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M} \quad \ldots\ldots\ldots (407)$$

Если ρ_1 есть такой перпендикуляръ опущенный изъ начала координатъ на плоскость касательную къ эллипсоиду (407), который составляетъ съ осями координатъ углы λ, μ, ν, то

$$M\rho_1{}^2 = A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu \quad \ldots\ldots (408)$$

Съ другой стороны радіусъ-векторъ ρ эллипсоида инерціи:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k$$

составляющій съ осями координатъ тѣ же углы λ, μ, ν, опредѣляется изъ:

$$\rho = \frac{k}{A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu}.$$

Слѣдовательно, согласно съ (344):

$$J = \frac{k}{\rho^2} = (A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu).$$

Слѣдовательно согласно (408):

$$J = M\rho_1{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (409)$$

Изъ (409) видно, что моментъ инерціи относительно перпендикуляра, опущеннаго на касательную плоскость гираціоннаго эллипсоида изъ центра, пропорціоналенъ квадрату этого перпендикуляра.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ гираціоннымъ эллипсоидомъ удобнѣе пользоваться, чѣмъ эллипсоидомъ инерціи.

§ **184. Эллипсоидъ Лежандра.** Если моменты инерціи какого-нибудь даннаго тѣла относительно плоскости координатъ суть Σmx^2, Σmy^2, Σmz^2 и масса M, то эллипсоидъ

$$\frac{x^2}{\Sigma mx^2} + \frac{y^2}{\Sigma my^2} + \frac{z^2}{\Sigma mz^2} = \frac{5}{M} \quad \ldots\ldots (410)$$

называемый эллипсоидомъ Лежандра, имѣетъ тѣ же самые моменты инерціи A, B, C относительно осей координатъ, какіе имѣетъ данное тѣло. Дѣйствительно, согласно (399):

$$A = \frac{M\left(\frac{5\,\Sigma my^2}{M} + \frac{5\,\Sigma mz^2}{M}\right)}{5} = \Sigma m\,(y^2 + z^2).$$

Точно такъ же получимъ:

$$B = \Sigma m\,(x^2 + y^2)$$
$$C = \Sigma m\,(x^2 + y^2)$$

Но изъ равенства моментовъ инерціи относительно осей координатъ слѣдуетъ, согласно §§ 149 и 150, равенство моментовъ инерціи относительно любой оси. Итакъ, эллипсоидъ Лежандра есть *тѣло равныхъ моментовъ инерціи* по отношенію къ данному тѣлу.

§ 185. Тѣла (или системы) равныхъ моментовъ инерціи. Два тѣла (или двѣ системы) называются тѣлами (или системами) равныхъ моментовъ инерціи, если моменты инерціи относительно любой оси одной системы соотвѣтственно равны моментамъ инерціи относительно тѣхъ же осей другой системы.

Примѣръ такихъ тѣлъ мы видѣли въ § 184: данное тѣло и соотвѣтственный ему эллипсоидъ Лежандра суть тѣла равныхъ моментовъ инерціи.

Для одной и той же системы можно найти множество системъ равныхъ моментовъ инерціи.

Теорема. *Если двѣ системы имѣютъ общій центръ тяжести, одинаковую массу, одни и тѣ же главныя центральныя оси инерціи и соотвѣтственно равные главные центральные моменты инерціи, то онѣ суть системы равныхъ моментовъ инерціи.*

Справедливость этой теоремы вытекаетъ изъ основныхъ теоремъ §§ 149 и 150.

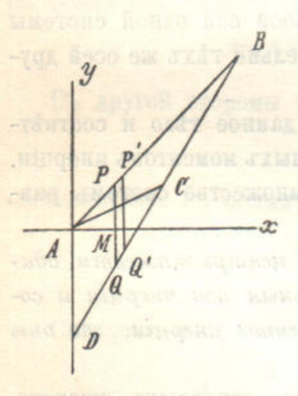
Обратная теорема. *Двѣ системы равныхъ моментовъ инерціи имѣютъ общій центръ тяжести, общія главныя центральныя оси инерціи, равные главные центральные моменты инерціи и равныя массы.*

Доказательство обратной теоремы. Если двѣ системы суть системы равныхъ моментовъ инерціи, то онѣ должны имѣть общія оси максимальныхъ и минимальныхъ моментовъ инерціи. Изо всѣхъ взаимно параллельныхъ осей прямая, проходящая чрезъ центръ тяжести служитъ осью наименьшаго момента инерціи (см. § 149). Разсмотримъ взаимно параллельныя прямыя перпендикулярныя къ прямой, соединяющей центры тяжести g и g' данныхъ системъ. Изъ этихъ прямыхъ минимальный моментъ инерціи 1-ой системы относится къ той, которая проходитъ чрезъ g, минимальный моментъ инерціи 2-ой системы относится къ той, которая проходитъ чрезъ g'. Прямыя эти, согласно сказанному въ началѣ доказательства, должны совпадать, а это можетъ быть только тогда, когда совпадаютъ g и g'.

Разсмотримъ прямыя, проходящія чрезъ общій центръ тяжести. Оси минимальнаго и максимальнаго момента инерцій въ той и другой системѣ суть оси главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи. Слѣдовательно, двѣ такія оси одной системы должны совпадать съ двумя такими осями другой системы. Слѣдовательно, и третьи главныя центральныя оси совпадутъ.

Разсмотримъ, наконецъ, двѣ взаимно-параллельныя оси, находящіяся одна отъ другой на разстояніи p, и такія, что одна изъ нихъ проходитъ чрезъ общій центръ тяжести нашихъ системъ. Согласно § 149 разность относящихся къ нимъ моментовъ инерціи для одной системы равна Mp^2; для другой $M'p^2$ и эти величины равны. Слѣдовательно и массы M и M' системъ равны между собою.

§ 186. Моментъ инерціи треугольной пластинки относительно прямой, проходящей чрезъ вершину. Пусть ABC есть данный треугольникъ. Найдемъ его моментъ инерціи относительно оси Ay (фиг. 64). Продолжимъ сторону BC до пересѣченія въ D съ осью Ay и проведемъ Ax перпендикулярно Ay. Данный треугольникъ ABC можно разсматривать, какъ разность треугольниковъ ABD и ACD. Найдемъ сначала моментъ инерціи треугольника ABD. Пусть $PQP'Q'$ есть элементарная площадь параллельная оси Ay; пусть M есть точка пересѣченія прямыхъ PQ и Ax; обозначимъ разстояніе вершины B отъ оси Ay чрезъ β. Положимъ:



Фиг. 64.

$$AM = x$$
$$AD = q$$
$$PQP'Q' = q\frac{\beta - x}{\beta}\,dx.$$

Моментъ инерціи элемента $PQP'Q'$ относительно оси Ay равенъ:

$$\mu q\frac{\beta - x}{\beta}\,x^2\,.\,dx,$$

гдѣ μ плотность. Моментъ инерціи треугольника ABD равенъ:

$$\mu\int_0^\beta q\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)x^2\,.\,dx = \frac{1}{12}\,\mu q\beta^3.$$

Точно такъ же, обозначая чрезъ γ разстояніе вершины C отъ оси Ay, найдемъ, что моментъ инерціи треугольника ACD равенъ:

$$\frac{1}{12}\,\mu q\gamma^3.$$

Слѣдовательно моментъ инерціи треугольника ABC равенъ:

$$\frac{1}{12}\,\mu q\,(\beta^3 - \gamma^3).$$

Но $\frac{1}{2}\,q\beta$ и $\frac{1}{2}\,q\gamma$ суть площади треугольниковъ ABD и ACD. Площадь треугольника ABC равна слѣдовательно:

$$\frac{1}{2}\,q\,(\beta - \gamma).$$

Поэтому, если M есть масса треугольника ABC, то его моментъ инерціи относительно оси Ay равенъ:

$$J = \frac{1}{6} M (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (411)$$

Помѣстимъ въ срединѣ сторонъ треугольника ABC по точкѣ имѣющей массу $\frac{M}{3}$. Моментъ инерціи системы этихъ трехъ точекъ относительно оси Ay равенъ:

$$\frac{M}{3}\left[\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right]$$

или:

$$\frac{1}{6} M [\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2]$$

то есть, согласно (411) равенъ моменту инерціи данной треугольной пластинки ABC.

Центры тяжести системы трехъ упомянутыхъ точекъ и треугольника совпадаютъ. Обозначимъ ихъ общій центръ тяжести чрезъ O. Проведемъ Oy' параллельно Oy. Согласно § 149 моменты инерціи пластинки и системы трехъ упомянутыхъ точекъ относительно Oy' равны между собою. Точно также будутъ равны моменты инерціи треугольника и системы трехъ точекъ относительно оси Ox' перпендикулярной къ Oy'. Слѣдовательно, согласно § 176, будутъ равны между собою и моменты инерціи трехъ точекъ и треугольника относительно оси Oz' перпендикулярной къ осямъ Ox' и Oy'.

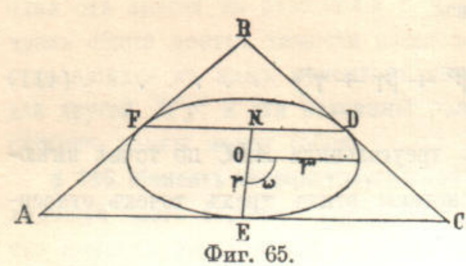
Одна изъ главныхъ центральныхъ осей перпендикулярна плоскости треугольника, и она общая для него и для трехъ точекъ; это и будетъ Oz'. Двѣ другія центральныя главныя оси лежатъ въ плоскости треугольника и моменты инерціи относительно ихъ суть наибольшій и наименьшій. Поэтому эти оси тоже общія для треугольника и для системы трехъ точекъ.

Итакъ главные центральные моменты инерціи системы трехъ точекъ соотвѣтственно равны главнымъ центральнымъ моментамъ инерціи треугольной пластинки и относятся къ тѣмъ же главнымъ центральнымъ осямъ.

Слѣдовательно, согласно § 185: *треугольная плоская пластинка и система трехъ точекъ, размѣщенныхъ въ срединахъ сторонъ этого треугольника и имѣющихъ каждая массу равную $\frac{1}{3}$ массы пластинки, суть системы равныхъ моментовъ инерціи.*

§ 187. Центральный эллипсъ инерціи треугольной пластинки. Представимъ себѣ эллипсъ, который касался бы сторонъ AB и BC треугольника

ABC въ ихъ срединахъ *F* и *D*; тогда, по теоремѣ *Carnot*, онъ коснется стороны *AC* въ ея срединѣ *E*. Но *DF* параллельна касательной *CA*, имѣющей точку касанія въ *E*. Поэтому прямая, соединяющая *E* съ срединою *N* прямой *DF*, проходитъ чрезъ центръ *O* эллипса. Слѣдовательно, центръ *O* эллипса совпадаетъ съ центромъ тяжести треугольника.



Фиг. 65.

Докажемъ, что этотъ эллипсъ и есть центральный эллипсъ инерціи треугольной пластинки. Положимъ:

$\overline{OE} = r$

$r' =$ половинѣ діаметра сопряженнаго съ r

$\omega =$ уголъ составляемый r и r'.

Слѣдовательно:

$$\overline{ON} = \frac{1}{2} r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (412)$$

Уравненіе эллипса отнесеннаго къ сопряженнымъ осямъ r и r' будетъ:

$$\frac{\overline{ON}^2}{r^2} + \frac{\overline{FN}^2}{r'^2} = 1$$

или, согласно (412):

$$\frac{r^2}{4r^2} + \frac{\overline{FN}^2}{r'^2} = 1.$$

Отсюда:

$$\overline{FN}^2 = \frac{3}{4} r'^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (413)$$

Но моментъ инерціи треугольника относительно оси *OE* равенъ моменту инерціи трехъ точекъ *E*, *F*, *D*, изъ коихъ каждая имѣетъ массу $\frac{1}{3} M$. Этотъ моментъ инерціи равенъ:

$$\frac{2}{3} M \,.\, [\overline{FN} \,.\, sin\,\omega]^2$$

или, благодаря (413):

$$\frac{2}{3} M \,.\, \frac{3}{4} r_1{}^2 \,.\, sin^2\,\omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (414)$$

Но по теоремѣ Аполлонія:

$$rr' \,.\, sin\,\omega = ab$$

гдѣ a и b суть главныя полуоси эллипса; площадь эллипса равна:

$$\pi ab = \pi \,.\, rr' \,.\, sin\,\omega = \Delta.$$

Слѣдовательно, величина, обозначенная номеромъ (414), равна:

$$\frac{M}{2}\cdot\frac{\Delta^2}{\pi^2 r^2} = \text{моменту инерціи относительно } \overline{OE}.$$

Слѣдовательно моменты инерціи относительно осей $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OD}$ обратно пропорціональны квадратамъ: $\overline{OE}^2$, $\overline{OF}^2$, $\overline{OD}^2$. Если изъ всѣхъ взаимно подобныхъ эллипсовъ инерціи выберемъ такой, который проходитъ чрезъ точки E, F, D (а это, согласно сказанному, возможно) и слѣдовательно еще чрезъ три противуположные имъ конца діаметровъ вписаннаго эллипса, то замѣтимъ, что два эллипса только тогда могутъ имѣть 6 общихъ точекъ, когда они совпадаютъ, и заключимъ, что вписанный нами эллипсъ и есть центральный эллипсъ инерціи треугольной пластинки.

§ 188. **Эллипсоидъ инерціи треугольной пластинки.** Перпендикуляръ къ плоскости пластинки, проведенный чрезъ ея центръ тяжести, есть одна изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи пластинки, такъ какъ плоскость ея есть главная центральная плоскость. Слѣдовательно, вписанный эллипсъ предыдущаго параграфа есть одно изъ главныхъ сѣченій эллипсоида инерціи пластинки. Поэтому, если $2a$ и $2b$ суть главныя оси этого сѣченія, то, согласно § 176, третья ось $2c$ эллипсоида инерціи опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

и уравненіе эллипсоида инерціи, отнесенное къ его главнымъ осямъ, будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

§ 189. **Аффино-преобразованіе.** Если увеличимъ, или уменьшимъ въ одинаковое число разъ разстоянія всѣхъ точекъ системы отъ данной *плоскости*, то получимъ другую систему точекъ, которая называется *аффино-преобразованіемъ* первой системы относительно данной плоскости.

Теорема. *Аффино-преобразованія двухъ системъ равныхъ моментовъ инерціи суть системы тоже равныхъ моментовъ инерціи.* Если начало координатъ находится въ общемъ центрѣ тяжести двухъ данныхъ системъ равныхъ моментовъ инерціи и если условимся обозначать значками величины, относящіяся къ одной изъ этихъ системъ, то:

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma m = \Sigma m';\ \Sigma mx = 0;\ \Sigma m'x' = 0\ \ldots\\&\Sigma mx^2 = \Sigma m'x'^2;\ \Sigma myz = \Sigma m'y'z\ \ldots\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (415)$$

Послѣ аффино-преобразованія этихъ системъ въ отношеніи $1:n$ относительно плоскости (x, y). Точка (x, y, z) перейдетъ въ точку (x, y, nz); точка $(x'. y', z')$ перейдетъ въ точку (x', y', nz'); массы m и m' перейдутъ (вслѣдствіе удлинненія элементовъ) въ массы nm и nm'. Ясно, что

тождества (415) послѣ такого преобразованія останутся тождествами, и потому новыя системы будутъ опять системами равныхъ моментовъ инерціи.

§ 190. Эллипсъ инерціи аффино-преобразованной системы есть аффино-преобразованіе эллипса инерціи данной системы. Произведемъ такое аффино-преобразованіе относительно оси x данной плоской системы, при которомъ точка (x, y) переходитъ въ точку (x, y'), гдѣ $y' = ny$; масса m переходитъ въ массу m', гдѣ $m' = nm$.

Получимъ:

$$\left.\begin{array}{c}\sum mx^2 = \frac{1}{n}\sum m'x^2;\ \sum my^2 = \frac{1}{n^3}\sum m'y'^2 \\ \sum mxy = \frac{1}{n^2}\sum m'xy'\end{array}\right\} \ldots (416)$$

Эллипсъ инерціи данной системы выражается уравненіемъ:

$$X^2 \Sigma my^2 - 2XY \Sigma mxy + Y^2 \Sigma mx^2 = kM \quad \ldots . (417)$$

Эллипсъ инерціи преобразованной системы выражается уравненіемъ:

$$X'^2 \Sigma m'y'^2 - 2X'Y' \Sigma m'xy' + Y'^2 \Sigma m'x^2 = k'M' \quad \ldots (418)$$

Произведя надъ (417) аффино-преобразованіе, выражаемое равенствами

$$X' = X; \quad Y' = nY;$$

и выбирая k' такъ, чтобы $k' = n^3k$, получимъ (418). Итакъ: эллипсъ инерціи аффино-преобразованной системы есть аффино-преобразованіе эллипса инерціи данной системы.

§ 191. Центральный эллипсъ инерціи параллелограмма. Теорема предыдущаго параграфа позволяетъ опредѣлять видъ эллипсовъ инерціи менѣе правильныхъ фигуръ по извѣстному виду эллипса инерціи фигуры болѣе правильной. Напримѣръ: Эллипсъ инерціи квадрата есть вписанный въ него кругъ. Произведемъ два подрядъ аффино-преобразованія, первое относительно стороны квадрата, переводящее его въ прямоугольникъ, второе относительно діагонали этого прямоугольника, переводящее его въ параллелограммъ. При этомъ круговой эллипсъ инерціи квадрата обратится въ эллипсъ, вписанный въ параллелограммъ и касающійся его сторонъ въ ихъ срединахъ. Поэтому, согласно § 190, получимъ, что: Эллипсъ инерціи параллелограмма есть эллипсъ вписанный въ параллелограммъ и касающійся его сторонъ въ ихъ срединахъ.

§ 192. Найти систему 4-хъ точекъ, которая была бы системою равныхъ моментовъ инерціи по отношенію данной системы. Пользуясь аффино-преобразованіемъ можно доказать (см. *Routh*: Die Dynamik der Systeme

starrer Körper. t. I, § 44), что рѣшеніе задачи, обозначенной въ заглавіи этого параграфа, всегда возможно и что существуетъ безконечное множество ея рѣшеній для каждой данной системы. Требуя болѣе симметричнаго расположенія искомыхъ точекъ, мы упростимъ задачу и получимъ одно рѣшеніе.

Найдемъ главные центральные моменты слѣдующихъ четырехъ точекъ (фиг. 66): (o, b, c); $(o, -b, c)$; $(a, o, -c)$; $(-a, o, -c)$, предполагая, что масса каждой точки равна m.

Не трудно убѣдиться, что для такой системы:

$$\Sigma mx = 0$$
$$\Sigma my = 0$$
$$\Sigma mz = 0$$

и что, слѣдовательно, центръ тяжести системы находится въ началѣ координатъ. Не трудно видѣть также, что плоскости (y, z) и (z, x) суть плоскости симметріи системы. Слѣдовательно оси координатъ суть главныя центральныя оси инерціи. Моменты инерціи относительно этихъ осей будутъ:

Фиг. 66.

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2) = m(b^2 + c^2) + m(b^2 + c^2) + mc^2 + mc^2$$
$$B = \Sigma m(z^2 + x^2) = mc^2 + mc^2 + m(a^2 + c^2) + m(a^2 + c^2)$$
$$C = \Sigma m(x^2 + y^2) = mb^2 + mb^2 + ma^2 + ma^2$$

или:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2m(b^2 + 2c^2) \\ B &= 2m(a^2 + 2c^2) \\ C &= 2m(a^2 + b^2) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (419)$$

Если главные центральные моменты инерціи какой нибудь данной системы точекъ равны A', B', C', то для того, чтобы выбранная нами система 4-хъ точекъ имѣла такіе же моменты инерціи, необходимо и достаточно, чтобы, согласно (419).

$$\left.\begin{aligned} b^2 + 2c^2 &= \frac{A'}{2m} \\ a^2 + 2c^2 &= \frac{B'}{2m} \\ a^2 + b^2 &= \frac{C'}{2m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (420)$$

Называя массу данной системы M, полагая $M = 4m$ и опредѣляя a^2, b^2, c^2 изъ (420), получимъ:

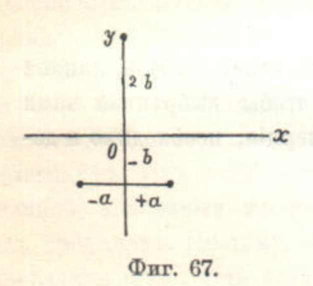
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{M}(A' + C' - B') \\ b^2 &= \frac{1}{M}(C' + B' - A') \\ 2c^2 &= \frac{1}{M}(B' + A' - C') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (421)$$

Правыя части этихъ уравненій всегда положительны, потому что моменты инерціи всякой системы таковы, что изъ нихъ можно составить треугольникъ (см. § 171) и слѣдовательно величины, стоящія въ скобкахъ правыхъ частей уравненій (421), всегда положительны. Поэтому всегда можно подыскать такія a, b, c, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (421) если A', B', C' суть моменты инерціи.

Итакъ, всегда можно расположить по указанному способу четыре точки такъ, чтобы главные центральные моменты инерціи системы этихъ точекъ были равны главнымъ центральнымъ моментамъ инерціи данной системы. Но въ такомъ случаѣ, согласно § 185, моментъ инерціи системы четырехъ точекъ относительно какой бы то ни было оси будетъ равенъ моменту инерціи, относительно той же оси, данной системы.

Найденныя способомъ, указаннымъ въ настояшемъ параграфѣ, по формуламъ (421) четыре точки можно назвать точками, характеризующими моменты инерціи данной системы, въ которой главные центральные моменты инерціи равны A', B', C'.

§ 193. Найти систему трехъ точекъ, характеризующую моменты инерціи данной площади. Это значитъ найти такую систему трехъ точекъ, моментъ инерціи которой относительно любой оси былъ бы равенъ моменту инерціи данной системы относительно той же оси.



Фиг. 67.

Задача эта тоже допускаетъ множество рѣшеній, но мы, требуя нѣкоторой симметріи, найдемъ одно рѣшеніе.

Опредѣдимъ главные центральные моменты инерціи системы, состоящей изъ точекъ $(a, -b)$; $(-a, -b)$; $(o, 2b)$ фиг. 67). Центръ тяжести ея находится въ началѣ координатъ и ось y есть ось симметріи. Слѣдовательно, оси координатъ суть главныя центральныя оси. Опредѣляемъ (полагая, что масса каждой точки $= m$):

$$A = \Sigma my^2 = 6mb^2$$
$$B = \Sigma mx^2 = 2ma^2$$

Если главные центральные моменты инерціи данной площади суть A', B', то a и b опредѣлятся изъ уравненій:

$$a^2 = \frac{B'}{2m}$$

$$b^2 = \frac{A'}{6m}.$$

Если масса данной площади $= M$ и $M = 3m$, то:

$$a^2 = \frac{3}{2}\frac{B'}{M}$$

$$b^2 = \frac{1}{2}\frac{A'}{M}$$

§ 194. Условіе, чтобы данная прямая была одною изъ главныхъ осей для какой-нибудь точки. Мы видѣли, что для каждой точки пространства существуетъ, для данной системы, свой эллипсоидъ инерціи и свои главныя оси. Рѣшимъ слѣдующую задачу: дана неизмѣняемая система матеріальныхъ точекъ и дана прямая. Опредѣлить ту точку этой прямой, для которой она есть одна изъ главныхъ осей инерціи и, если такая точка существуетъ, опредѣлить двѣ другія относящіяся къ ней главныя оси инерціи.

Примемъ данную прямую за ось z и какую-нибудь ея точку за начало прямоугольныхъ координатъ. Пусть C есть та точка, лежащая на оси z, для которой ось z есть одна изъ главныхъ осей инерціи. Положимъ, что двѣ другія главныя оси для точки C суть Cx' и Cy'. Обозначимъ чрезъ h разстояніе oc и чрезъ θ уголъ между Cx и Cx'. Формулы преобразованія координатъ будутъ таковы:

$$x' = x \,.\, \cos\theta + y \sin\theta$$

$$y' = -x \,.\, \sin\theta + y \,.\, \cos\theta$$

$$z' = z - h.$$

Слѣдовательно, если Cx', Cy', Cz' суть главныя оси инерціи, то:

$$\Sigma mx'z' = \cos\theta \,.\, \Sigma mxz + \sin\theta \,.\, \Sigma myz -$$

$$- h\,(\cos\theta \,.\, \Sigma mx + \sin\theta \,.\, \Sigma my) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (422)$$

$$\Sigma my'z' = -\sin\theta \,.\, \Sigma mxz + \cos\theta \,.\, \Sigma myz -$$

$$- h\,(-\sin\theta \,.\, \Sigma mx + \cos\theta \,.\, \Sigma my) = 0 \,.\, . \quad . \quad . \quad (423)$$

$$\Sigma mx'y' = \Sigma m\,(y^2 - x^2)\frac{\sin(2\theta)}{2} + \Sigma mxy \quad \cos(2\theta) = 0 \quad . \quad . \quad (424)$$

Изъ (424) слѣдуетъ:

$$tg\,(2\theta) = \frac{2\Sigma mxy}{\Sigma m\,(x^2 - y^2)} = \frac{2F}{B - A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (425)$$

Исключая h изъ уравненій (422) и (423), получимъ:

$$\frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx} = \frac{\Sigma myz}{\Sigma my} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (426)$$

Уравненіе (426) и представляетъ собою условіе, выполненіе котораго необходимо для того, чтобы ось z могла быть одною изъ главныхъ осей инерціи для какой либо лежащей на ней точки.

Изъ (422) и (426) имѣемъ:

$$h = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx} = \frac{\Sigma myz}{\Sigma mx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (427)$$

Эта формула (427) опредѣляетъ положеніе на оси z искомой точки. Формула (425) опредѣляетъ положеніе двухъ другихъ главныхъ осей.

§ 195. Слѣдствія, вытекающія изъ уравненій предыдущаго параграфа.

1) Если:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma mxz &= 0 \\ \Sigma myz &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (428)$$

то уравненія (427) удовлетворяются при $h = 0$. Слѣдовательно, уравненія (428) представляютъ собою условія достаточныя для того, чтобы ось z была одною изъ главныхъ осей инерціи *для начала координатъ*.

2) Если система представляетъ собою плоскую *пластинку* и ось z перпендикулярна къ ней, проходя чрезъ какую бы то ни было точку ея плоскости, то условія (428) соблюдены. Слѣдовательно одна изъ главныхъ осей пластинки для какой либо точки O ея плоскости есть перпендикуляръ возстановленный къ этой плоскости изъ точки O.

3) Уравненіе (425) не содержитъ величины h. Слѣдовательно, если ось z служитъ одною изъ главныхъ осей инерціи для нѣсколькихъ лежащихъ на ней точекъ, то остальныя главныя оси инерціи этихъ точекъ соотвѣтственно параллельны другъ другу. Въ этомъ случаѣ уравненіе (427) должно давать нѣсколько рѣшеній для h. Но такъ какъ h входитъ въ (427) только въ первой степени, то такое множество рѣшеній можетъ существовать только при выполненіи условій.

$$\Sigma mx = 0; \quad \Sigma my = \Sigma mxz = 0; \quad \Sigma myz = 0,$$

то есть, ось z должна проходить чрезъ центръ тяжести и быть главною осью уже для каждой изъ лежащихъ на ней точекъ, такъ какъ начало координатъ O можетъ быть взято на ней произвольно (въ любой ея точкѣ).

4) Если за оси x, y, z приняты главныя *центральныя* оси инерціи, то (422) и (423) удовлетворяются всякими значеніями h. Слѣдовательно *главная центральная ось инерціи* служитъ *главною* осью инерціи для каждой изъ лежащихъ на ней точекъ.

§ 196. Распредѣленіе главныхъ осей инерціи въ плоскости. Рѣшимъ задачу:

По данному положенію главныхъ центральныхъ осей ох, оу, оz и по даннымъ величинамъ главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи найти положеніе главныхъ осей и величины главныхъ моментовъ инерціи для какой либо точки P, лежащей въ плоскости (x, y). Такимъ образомъ примемъ обозначеніе: A, B моменты инерціи относительно осей x и y; M масса системы. Положимъ $A > B$. Пусть H и S двѣ точки лежащія на оси x по обѣ стороны O такъ что:

$$OH = OS = \sqrt{\frac{A - B}{M}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (429)$$

Эти точки называются *фокусами инерціи* плоскости (x, y).

Такъ какъ фокусы инерціи лежатъ на одной изъ главныхъ центральныхъ осей, то, согласно (№ 3) предыдущаго параграфа, главныя оси для точекъ H и S параллельны главнымъ центральнымъ осямъ. Моменты инерціи относительно тѣхъ главныхъ осей для точекъ H и S, которыя лежатъ въ плоскости (x, y) соотвѣтственно равны:

$$A$$

$$B + M \cdot \overline{OS}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (430)$$

Но согласно (429) второй изъ этихъ моментовъ, опредѣляемый формулою (430) тоже равенъ A. Слѣдовательно, оси лежащихъ въ плоскости (x, y) главныхъ сѣченій эллипсоидовъ инерціи построенныхъ для H и S равны между собою. Поэтому каждое такое сѣченіе есть кругъ. Итакъ всякая прямая, проходящая въ плоскости (x, y) чрезъ фокусъ инерціи этой плоскости, есть главная ось для этого фокуса, и моментъ инерціи относительно всякой такой прямой равенъ A.

Одна изъ главныхъ осей для точки P, лежащей въ плоскости (x, y), есть перпендикуляръ къ этой плоскости. Дѣйствительно если p и q суть координаты точки P, то такой перпендикуляръ будетъ главною осью при условіяхъ:

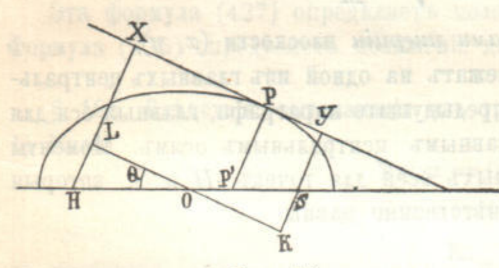
$$\Sigma m\,(x - p)\,z = 0$$
$$\Sigma m\,(y - q)\,z = 0.$$

Но условія эти выполняются, такъ какъ начало координатъ въ центрѣ тяжести и оси координатъ суть главныя центральныя оси инерціи.

Положеніе двухъ другихъ, лежащихъ въ плоскости (x, y), главныхъ осей для P опредѣляется при помощи слѣдующихъ соображеній. Соединимъ P съ фокусами H и S прямыми PH и PS. Моменты инерціи относительно этихъ осей PH и PS равны между собою и равны порознь A по изложенному выше свойству фокусовъ инерціи. Но оси построеннаго для P эллипса инерціи дѣлятъ пополамъ смежные углы, образованные равными діаметрами. Слѣдовательно искомыя главныя оси для P суть

биссектрисы смежныхъ угловъ, составленнныхъ прямыми PH и PS. Это приводитъ насъ къ слѣдующему заключенію: *нормаль и касательная въ любой точкѣ P любого эллипса или гиперболы. имѣющихъ фокусы въ H* и *S и суть главныя оси инерціи для точки P* *).

Итакъ, для нахожденія главныхъ осей инерціи для точки P, лежащей въ главной центральной плоскости (x, y) поступаемъ слѣдующимъ образомъ (фиг. 68). Откладываемъ на оси x наибольшаго момента по обѣ стороны центра тяжести длины $\sqrt{\frac{A-B}{M}}$. Получимъ такимъ образомъ *фокусы инерціи* H и S. Проводимъ эллипсъ, проходящій чрезъ P и имѣющій фокусы въ H и S. Нормаль и касательная въ P къ этому эллипсу и будутъ главными осями для точки P. Третья главная ось перпендикулярна къ этимъ двумъ.



Фиг. 68.

Намъ еще остается опредѣлить моменты инерціи относительно найденныхъ главныхъ осей.

Проведемъ произвольную прямую KL чрезъ центръ тяжести O (фиг, 68). Положимъ, что она составляетъ съ осью x уголъ θ. Опустимъ на эту прямую перпендикуляры $\overline{SK}$ и $\overline{HL}$. Моментъ инерціи J_0 относительно $\overline{KL}$ будетъ

$$J_0 = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta = A - (A - B)\sin^2\theta$$

или согласно (429):

$$J_0 = A - M\,.\,(OS\,.\,\sin\theta)^2 = A - M\,.\,\overline{SK}^2$$

Проведемъ чрезъ P прямую PT параллельную къ KL и опустимъ на нее перпендикуляры SY и HX. Моментъ инерціи относительно PT будетъ:

$$J_0 + M\,.\,\overline{KY}^2 = A + M(KY - SK)(KY + SK) = A + \overline{SY}\,.\,\overline{HXM} \quad (431)$$

Пусть PT будетъ касательная, PP' нормаль того эллипса, который, имѣя фокусы въ H и S, проходитъ чрезъ P, уравненіе его будетъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда:

$$a^2 - b^2 = \overline{OS}^2 = \frac{A - B}{M} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (432)$$

Поэтому

$$A + \overline{SY}\,.\,\overline{HXM} = A + Mb^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (433)$$

ибо произведеніе $SY\,.\,HX$ есть величина постоянная равная b. На основаніи (432) имѣемъ:

$$A + Mb^2 = B + Ma^2 = B + M\left(\frac{SH + HP}{2}\right)^2.$$

*) Отсюда выясняется и названіе „фокусы инерціи".

Пользуясь гиперболою и прямою PP', найдемъ что моментъ инерціи около PP' равенъ $B + M\left(\frac{SP - HP}{2}\right)^2$. Итакъ, искомые главные моменты опредѣляются формулою:

$$B + M \cdot \left(\frac{SP \pm HP}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (434)$$

§ 197. Распредѣленіе главныхъ осей инерціи въ пространствѣ.

Теорема: *Сумма момента инерціи C' относительно плоскости, проходящей черезъ данную точку и момента инерціи C относительно нормали къ этой плоскости въ той же точкѣ равна моменту инерціи Σmr^2 относительно этой точки.*

Доказательство: Изъ условій:

$$C = \Sigma m (x^2 + y^2)$$
$$C' = \Sigma m z^2$$

слѣдуетъ:

$$C + C' = \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2)$$

или

$$C + C' = \Sigma mr^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (435)$$

что и требовалось доказать.

Пусть A B, C суть главные центральные моменты инерціи данной системы, массу которой примемъ за единицу.

Построимъ поверхность 2-го порядка однофокусную съ центральнымъ гираціоннымъ эллипсоидомъ. Положимъ, что полуоси a, b, c построенной поверхности опредѣляются уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= A + \lambda \\ b^2 &= B + \lambda \\ c^2 &= C + \lambda \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (436)$$

Найдемъ моментъ инерціи данной системы относительно плоскости касательной къ посторонней поверхности. Пусть α, β, γ, суть углы составляемые нормалью этой плоскости съ оссми координатъ.

Моментъ инерціи системы относительно центра тяжести (начала координатъ) согласно § 174 равенъ $\frac{1}{2}(A + B + C)$. Моментъ инерціи относительно нормали, составляющей съ осями координатъ углы α, β, γ, согласно (346) равенъ $A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C co^2 \gamma$. Слѣдовательно, по теоремѣ, доказанной въ началѣ настоящаго параграфа, моментъ инерціи относительно плоскости, параллельной разсматриваемой касательной плоскости, но проходящей чрезъ O, равенъ

$$\frac{1}{2}(A + B + C) - (A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma) \quad . \quad . \quad . \quad (437)$$

Моментъ инерціи относительно самой касательной плоскости получится, согласно (337), если къ (437) придадимъ квадратъ разстоянія между па-

раллельными плоскостями, равный

$$(A + \lambda) \cos^2 \alpha + (B + \lambda) \cos^2 \beta + (C + \lambda) \cos^2 \gamma.$$

Слѣдовательно искомый моментъ инерціи относительно касательной плоскости равенъ:

$$\frac{1}{2}(A + B + C) + \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (438)$$

или, на основаніи (436):

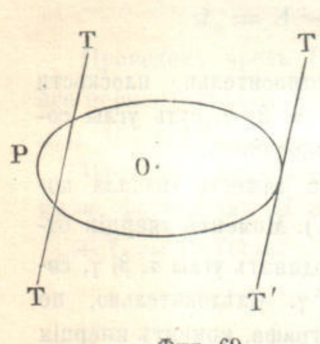
$$\frac{1}{2}(B + C - A) + a^2 + const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (439)$$

Итакъ: *моменты инерціи данной системы, относительно плоскостей касательныхъ къ поверхности конфокальной съ центральнымъ гираціоннымъ эллипсоидомъ, равны между собою.*

Извѣстно, что чрезъ каждую точку пространства проходятъ двѣ поверхности конфокальныя съ эллипсоидомъ, на которомъ лежитъ эта точка, такъ что чрезъ эту точку проходятъ три конфокальныя поверхности: трехъосный эллипсоидъ, двуполый гиперболоидъ и однополый гиперболоидъ.

Докажемъ, что *плоскости, касательныя въ данной точкѣ къ тремъ проходящимъ чрезъ нее конфокальнымъ поверхностямъ, одна изъ коихъ есть эллипсоидъ конфокальный съ центральнымъ гираціоннымъ эллипсоидомъ, суть три главныя плоскости инерціи для данной точки и что, слѣдовательно, три прямыя касательныя къ взаимнымъ пересѣченіямъ этихъ плоскостей суть главныя оси инерціи для данной точки.*

Доказательство: Всякая касательная плоскость $T'T'$ (фиг. 69) проведенная къ эллипсоиду параллельно любой касательной плоскости TT проходящей чрезъ точку P, дальше отстоитъ отъ центра, чѣмъ плоскость TT. Поэтому моментъ инерціи относительно плоскости TT менѣе момента инерціи относительно плоскости $T'T'$. Но согласно сказанному по поводу формулы (439) моментъ инерціи относительно $T'T'$ равенъ моменту инерціи относительно касательной плоскости проведенной чрезъ P. Слѣдовательно моментъ инерціи относительно плоскости, проведенной чрезъ P касательно къ проходящему чрезъ P гомофокальному эллипсоиду больше моментовъ относительно другихъ плоскостей, проходящихъ чрезъ P. Слѣдовательно, эта касательная плоскость есть одна изъ главныхъ плоскостей инерціи, именно та, которая соотвѣтствуетъ наибольшему моменту инерціи. Точно также можно доказать, что проходящая чрезъ P плоскость касательная къ двуполому гиперболоиду есть главная плоскость соотвѣтствующая наименьшему мо-



Фиг. 69.

менту инерцію. Поэтому, благодаря взаимной ортогональности гомофокальныхъ поверхностей, плоскость касательная однополому гиперболоиду будетъ тоже одною изъ главныхъ плоскостей инерціи для точки P, именно тою, которая соотвѣтствуетъ среднему главному моменту. Пересѣченія этихъ трехъ плоскостей будутъ главными осями инерціи для точки P Что и требовалось доказать.

Найдемъ величины этихъ главныхъ моментовъ инерціи.

Пользуясь сказаннымъ въ §§ 174 и 149 не трудно доказать, что полярный моментъ инерціи относительно точки P равенъ:

$$\frac{1}{2}(A+B+C)+\overline{OP}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (440)$$

если $M=1$.

Изъ (435) и (438) слѣдуетъ, что главные моменты инерція для точки P будутъ:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OP}^2-\lambda_1 &= J_1 \\ \overline{OP}^2-\lambda_2 &= J_2 \\ \overline{OP}^2-\lambda_2 &= J_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (441)$$

гдѣ λ_1, λ_2, λ_3 суть параметры конфокальныхъ поверхностей. Замѣтимъ, что общій видъ уравненій этихъ поверхностей таковъ:

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}+\frac{z^2}{C+\lambda}=1 \quad \ldots\ldots (442)$$

§ 198. Поверхность равныхъ главныхъ моментовъ инерціи. Посмотримъ, какъ расположены въ пространствѣ тѣ точки, для которыхъ одинъ изъ главныхъ моментовъ инерціи имѣетъ одну и ту же величину J.

Для этого достаточно положить J постояннымъ и, опредѣливъ λ изъ уравненія

$$r^2-\lambda=J$$

представляющаго собою одно изъ уравненій системы (441), подставить ея величину въ уравненіе (442) одной изъ конфокальныхъ поверхностей. Получимъ:

$$\frac{x^2}{A+r^2-J}+\frac{y^2}{B+r^2-J}+\frac{z^2}{C+r^2-J}=1.$$

Но:

$$r^2=x^2+y^2+z^2.$$

Слѣдовательно точки, для которыхъ одинъ изъ главныхъ моментовъ равенъ J, расположены на поверхности:

$$\frac{x^2}{A+x^2+y^2+z^2-J}+\frac{y^2}{B+x^2+y^2+y^2-J}+$$
$$+\frac{z^2}{C+x^2+y^2+z^2-J}=1 \quad \ldots\ldots (443)$$

Это есть знаменитая въ оптикѣ и кристаллографіи Френелева поверхность свѣтовой волны двухоснаго кристалла. Какъ извѣстно, сѣченія ея плоскостями координатъ представляютъ собою: кругъ въ эллипсѣ, эллипсъ въ кругѣ и эллипсъ пересѣкающійся съ окружностью. Точки пересѣченія этого эллипса съ окружностью суть *особыя* точки, въ которыхъ внѣшняя полость переходитъ во внутреннюю.

Въ аналитической геометріи доказывается, что поверхность (443) можетъ быть получена слѣдующимъ образомъ: пересѣчемъ трехосный эллипсоидъ плоскостью, проходящею чрезъ его центръ; въ сѣченіи получимъ эллипсъ, повернемъ его въ его плоскости на 90°. Если со всѣми эллипсами получаемыми въ плоскихъ центральныхъ сѣченіяхъ поступимъ также, то-есть повернемъ каждый изъ нихъ на 90° въ его плоскости, то совокупность повернутыхъ эллипсовъ составитъ поверхность (443).

ГЛАВА V.

Вращеніе твердаго тѣла около оси.

§ 199. Общее дифференціальное уравненіе вращенія твердаго тѣла около оси. Примемъ ось вращенія за ось иксовъ. Такая неизмѣняемая система способная вращаться около оси x подчиняется (см. § 142) закону площадей:

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\sum(yZ-zY)\quad\ldots\ldots(444)$$

Это уравненіе (444) и есть общее уравненіе вращенія неизмѣняемой системы (абсолютно твердаго тѣла) около оси подъ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ.

Въ теченіи времени dt радіусы (перпендикуляры опущенные на ось) всѣхъ точекъ твердаго тѣла повертываются на одинъ и тотъ же уголъ $d\varphi$. Но согласно (135)

$$ydz-zdy=r^2d\varphi\quad\ldots\ldots\ldots(445)$$

гдѣ r есть радіусъ каждой точки m тѣла Слѣдовательно:

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=mr^2\frac{d\varphi}{dt^2}\quad\ldots\ldots\ldots(446)$$

Суммируя (446) на всѣ точки тѣла, получимъ:

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d\varphi}{dt}\sum mr^2\quad\ldots\ldots(447)$$

Здѣсь $\frac{d\varphi}{dt}$ можно было вывести за знакъ суммы, потому что $d\varphi$ для всѣхъ точекъ тѣла одинаково. Согласно съ § 147-мъ.

$$\varphi = \omega t$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (448)$$

Слѣдовательно $\frac{d\varphi}{dt}$ есть *угловая* (или *вращательная*) скорость тѣла. Поэтому (447) принимаетъ видъ:

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \omega J = \frac{d\varphi}{dt} . J \quad . \quad . \quad . \quad (449)$$

Линейная скорость v точки m тѣла, согласно съ (331) равна ωr. Слѣдовательно *количество движенія* mv точки m тѣла равно $m\omega r$. Произведеніе $m\omega r^2$ этого количества движенія на разстояніе r точки m отъ оси называется *моментомъ количества движенія точки* m. Величина же $\Sigma m\omega r^2$ называется моментомъ *количества движенія всего тѣла*. Изъ (446) и (448) видимъ, что моментъ количества движенія точки m равенъ

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = mr^2\omega = mr^2\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Изъ (449) видимъ, что моментъ количества движенія тѣла равенъ:

$$\text{мом. колич. движ.} = \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \omega \,.\, J = \frac{d\varphi}{dt} \,.\, J \quad . \quad . \quad (450)$$

Диференцируя (450) получимъ:

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} . J,$$

или, согласно съ (444)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} . J = \Sigma\,(yZ - zY).$$

Но согласно съ (249) правая часть этого уравненія есть моментъ L пары направленный по оси вращенія x. Итакъ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} . J = L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (451)$$

Это уравненіе аналогично уравненію

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = X.$$

Аналогія эта показываетъ, что моментомъ инерціи измѣряется инерція вращенія.

Начало сохраненія площадей (444) приняло видъ уравненія (451), которое можетъ быть выражено такъ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\text{моменту силы относит. оси вращенія}}{\text{моментъ инерц. относит. оси вращен.}} \quad . \; . \; (452)$$

Для мгновенныхъ силъ, напримѣръ для удара, измѣняющаго угловую скорость ω въ ω', получимъ уравненіе:

$$\omega' - \omega = \frac{\text{моментъ удара относит. оси вращен.}}{\text{моментъ инерц. относит. оси вращен.}} \quad . \; . \; . \; (453)$$

§ 200. Общее дифференціальное уравненіе движенія тяжелаго твердаго тѣла около горизонтальной оси. Если ось вращенія горизонтальна, ось z взята по вертикали внизъ, то обозначая чрезъ g ускореніе земного тяготѣнія, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= 0 \\ Z &= mg. \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (454)$$

Вслѣдствіе этого (444) приметъ видъ:

$$\sum m \left[y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right] = \sum mgy. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (455)$$

§ 201. Физическій маятникъ. Неизмѣняемая система движущаяся, подъ вліяніемъ собственной тяжести, около горизонтальной оси, совершая только качанія, а не полные обороты около оси, называется физическимъ маятникомъ. Изслѣдуемъ движеніе физическаго маятника, пользуясь уравненіемъ (451) и сводя дѣло къ сравненію движенія физическаго маятника съ извѣстнымъ намъ изъ § 77 движеніемъ маятника математическаго.

Фиг. 70.

Обозначимъ чрезъ α разстояніе отъ точки подвѣса C до центра O тяжести. Изъ (451) имѣемъ:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = - Mg\alpha \, . \, \sin\theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (456)$$

Вотъ каковъ окончательный видъ дифференціальнаго уравненія движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около горизонтальной оси.

Интегрируя его получимъ:

$$\frac{d\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = \frac{Mg\alpha}{J} \cdot \frac{d\,(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{Mg\alpha}{J\,dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} \cdot d\cos\theta$$

или

$$2\frac{d\theta}{dt}\cdot d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{2Mga}{J}\cdot d(\cos\theta).$$

Отсюда:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2Mga}{J}(\cos\theta-\cos\alpha)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(457)$$

гдѣ α начальный уголъ отклоненія прямой CO отъ вертикали.

Это уравненіе (457) весьма похоже на уравненіе (229) движенія математическаго маятника, которое можно представить въ видѣ:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\alpha)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(458)$$

Изъ сравненія уравненій (457) и (458) выводимъ: *физическій маятникъ движется какъ такой математическій, длина котораго равна*:

$$l=\frac{J}{Ma}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(459)$$

гдѣ: M = масса физическаго маятника;
a = разстояніе его центра тяжести отъ оси вращенія;
J = его моментъ инерціи относительно оси вращенія;
l = длина *изохроннаго* съ нимъ математическаго маятника.

Тотъ маятникъ математическій, который, согласно сказанному, движется какъ данный физическій, называется изохроннымъ съ этимъ физическимъ.

§ 202. Опредѣленіе величины ускоренія g земного тяготѣнія. Мы уже пользовались неоднократно величиною g, представляющею собою ускореніе, производимое притяженіемъ, оказываемымъ земнымъ шаромъ на тѣла находящіяся близъ его поверхности. Теперь мы можемъ показать, какъ эта величина g опредѣляется.

Ее можно было бы опредѣлить изъ формулы

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(234)$$

математическаго маятника зная его длину l и продолжительность колебанія T; но математическій маятникъ, состоящій изъ *невѣсомой* нити и тяжелой *точки* нельзя устроить: приходится пользоваться маятникомъ физическимъ и тѣми соотношеніями, которыя мы только что вывели.

Назовемъ L длину такого математическаго маятника, продолжительность колебанія котораго равна 1 секундѣ, такъ что

$$1=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(460)$$

Подвѣсимъ на такой же призмѣ, на которой подвѣшиваются чашки химическихъ вѣсовъ, металлическую линейку, которая и будетъ физическимъ маятникомъ, и заставимъ ее совершать столь малыя колебанія чтобы можно было пользоваться приближенною формулою (234).

Обозначимъ чрезъ n' число колебаній такого маятника, наблюдаемое въ теченіе t' секундъ. Такое же число колебаній, согласно изложенной теоріи, совершаетъ въ t' секундъ математическій маятникъ, имѣющій длину $\frac{J}{Ma}$, такъ что:

$$\frac{t'}{n'} = \pi \sqrt{\frac{J}{Mag}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (461)$$

Дѣля (460) на (461) получимъ:

$$\frac{t'}{n'} = \sqrt{\frac{J}{MLa}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (462)$$

Отсюда

$$L = \left(\frac{n'}{t'}\right)^2 \cdot \frac{J}{Ma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (463)$$

Изъ (460) имѣемъ:

$$L = \frac{g}{\pi^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (464)$$

Изъ (463) и (464) слѣдуетъ:

$$g = \pi^2 \left(\frac{n'}{t'}\right)^2 \cdot \frac{J}{Ma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (465)$$

По этой формулѣ (465) можно опредѣлить g, опредѣливъ величины, стоящія въ ея правой части.

Оказывается, что, благодаря неправильности формы земного сфероида, въ различныхъ точкахъ земной поверхности, g имѣетъ разныя величины; въ среднемъ въ Европѣ.

$$g = 981 \left[\frac{\text{сантим.}}{\text{секунда}^2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (466)$$

§ 203. Центръ качанія физическаго маятника. Пересѣчемъ мысленно физическій маятникъ плоскостью, проходящею чрезъ его центръ тяжести и перпендикулярною къ оси вращенія. Пересѣченіе этой плоскости съ осью вращенія называется *центромъ подвѣса.*

Точка C' (фиг. 71) лежащая на прямой соединяющей центръ подвѣса C съ центромъ тяжести O и находящаяся отъ центра подвѣса въ разстояніи

$$\overline{CC'} = l$$

равномъ длинѣ l математическаго маятника изохраннаго съ даннымъ физическимъ маятникомъ, называется *центромъ качанія* физическаго маятника.

Фиг. 71.

Пусть J_0 есть моментъ инерціи физическаго маятника относительно оси, проходящей чрезъ центръ тяжести и параллельной оси вращенія. Согласно (337) имѣемъ:

$$J = J_0 + Ma^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (467)$$

потому что

$$a = CO.$$

Изъ (459) и (467) имѣемъ

$$l = \frac{J_0}{Ma} + a = \frac{J_0}{M \cdot \overline{OC}} + \overline{OC} \quad \dots\dots \quad (468)$$

Изъ чертежа (фиг. 71) видимъ, что:

$$\overline{OC'} = l - a.$$

Слѣдовательно, согласно (468):

$$\overline{OC'} = \frac{J_0}{Ma} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (469)$$

Опредѣлимъ длину математическаго маятника l', который былъ бы изохроненъ съ физическимъ маятникомъ, получаемымъ изъ даннаго если его подвѣсить за центръ качанія C'. Для этого придется въ (468) замѣнить l чрезъ l', $\overline{OC}$ чрезъ $\overline{OC'}$. Получимъ:

$$l' = \frac{J_0}{M \cdot \overline{OC'}} + \overline{OC'} \quad \dots\dots\dots \quad (470)$$

Вставляя въ (470), вмѣсто OC', его величину изъ (469), получимъ:

$$l' = \frac{J_0 \cdot M\zeta}{M \cdot J_0} + \frac{J_0}{Ma}$$

или

$$l' = a + \frac{J_0}{Ma}.$$

Сравнивая это уравненіе съ (468), получимъ:

$$l = l'$$

значитъ, *если мы сдѣлаемъ центръ качанія центромъ подвѣса, то бывшій центръ подвѣса сдѣлается центромъ качанія*. Поэтому центръ качанія и центръ подвѣса называются точками *взаимными* или *сопряженными*.

§ 204. Продолжительность колебанія физическаго маятника въ зависимости отъ выбора центра подвѣса. Для упрощенія нашихъ формулъ назовемъ разстояніе центра подвѣса отъ центра тяжести h, такъ что:

$$OC = h$$

и положимъ

$$J_0 = Mk^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (471)$$

такъ что k есть центральный гирационный радiусъ. Тогда (468) приметъ видъ:

$$l = \frac{k^2}{h} + h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (472)$$

Если задана продолжительность колебанія T, то этимъ самымъ задана длина l изохроннаго математическаго маятника. Для даннаго тѣла, служащаго физическимъ маятникомъ, и для даннаго направленія оси вращенія гирацiонный радiусъ k есть опредѣленная величина. Слѣдовательно, при такихъ заданiяхъ, въ (472) перемѣннымъ остается только h. Уравненіе (472) по отношенію къ h квадратное, и потому изъ него получимъ для h два рѣшенія h_1 и h_2.

Опишемъ около оси, къ которой относится k, два цилиндра радiусами h_1 и h_2. Согласно съ изложенною теоріею физическаго маятника продолжительность колебанія будетъ одинакова, какую бы образующую этихъ двухъ цилиндровъ мы ие приняли за ось подвѣса. Эта продолжительность была бы приблизительно равна . $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Формулу (472) можно представить въ видѣ:

$$l = 2k + \frac{(h-k)^2}{h} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (473)$$

Если въ ней принять за перемѣнное и l, то изъ нея видно, что, съ уменьшеніемъ h отъ весьма большихъ его значеній, l уменьшается. Наименьшую величину $2k$ длина l пріобрѣтаетъ при $h = k$. Съ дальнѣйшимъ же уменьшеніемъ h длина l опять увеличивается. Слѣдовательно если среди взаимно параллельныхъ осей выбирать за оси подвѣса все болѣе и болѣе близкія оси къ центру тяжести, то сначала продолжительность колебаній будетъ уменьшаться, а затѣмъ начнетъ увеличиваться и когда ось подвѣса сдѣлается очень близкою къ центру тяжести, то продолжительность колебанія будетъ очень велика. Наименьшею же она будетъ въ томъ случаѣ, когда разстояніе ея отъ центра тяжести равно k и когда это k наименьшее, то есть когда ось подвѣса параллельна главной центральной оси наименьшаго момента инерции и когда разстояніе между ними равно гирацiонному радiусу, соотвѣтствующему этому наименьшему моменту инерции.

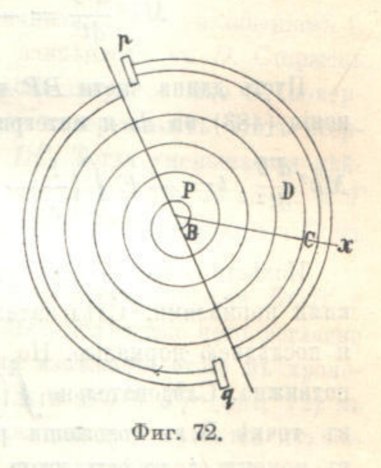
Такъ, напримѣръ, полагая, что въ параллелепипедѣ § 153-го $a > b > c$ найдемъ ось подвѣса, около которой колебанія параллелепипеда будутъ самыя короткія. Изъ (347) видимъ, что наименьшій главный центральный моментъ есть A и соотвѣтствующій ему гирацiонный радiусъ K опредѣляется изъ уравненія:

$$K^2 = \frac{b^2 + c^2}{12}$$

Слѣдовательно наиболѣе короткія колебанія этотъ параллелепипедъ будутъ совершать около любой изъ образующихъ цилиндра описаннаго около оси x радіусомъ

$$K = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{12}}.$$

§ 205. Маятникъ карманныхъ часовъ. Въ карманныхъ часахъ маятникъ устраивается слѣдующимъ образомъ (фиг. 72). Стержень BOB' можетъ свободно вращаться около оси O, проходящей чрезъ его центръ тяжести O. На него дѣйствуетъ упругая сила весьма тонкой спиральной пружины, называемый *волоскомъ*. Кромѣ того онъ подталкивается храповымъ колесомъ, приводимымъ во вращеніе заводною пружиною посредствомъ зубчатыхъ колесъ составляющихъ часовой механизмъ.



Фиг. 72.

Конецъ C волоска закрѣпленъ, такъ, что касательная къ нему, проходящая чрезъ C остается неподвижною. Конецъ B волоска закрѣпленъ такъ, что касательная къ нему, проходящая чрезъ B, составляетъ постоянный уголъ со стержнемъ BOB'. Опредѣлимъ продолжительность колебанія этого стержня (замѣняемаго иногда колесикомъ) совершаемаго имъ послѣ отклоненія его на нѣкоторый уголъ. Возьмемъ ось Ox по направленію принимаемому стержнемъ. когда онъ находится въ положеніи равновѣсія. условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

θ — уголъ, составляемый въ моментъ t стержнемъ съ осью x.
Mk^2 — моментъ инерціи стержня относительно оси O.
ρ — радіусъ кривизны волоска въ какой либо его точкѣ P.
ρ_0 — значеніе, принимаемое ρ въ положеніи равновѣсія.
x, y — координаты точки P волоска.

На стержень дѣйствуютъ проложенія X и Y дѣйствующей силы и считаемая въ обратную сторону (начало Даламбера § 75) ускорительная сила, которая, согласно (451) равна парѣ съ моментомъ

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

На волосокъ дѣйствуютъ ускорительная сила взятая въ противоположную сторону. Этою силою при малой массѣ волоска можно пренебречь. На него еще дѣйствуютъ упругія силы въ поперечномъ его сѣченіи, при точкѣ P, которыя могутъ быть приведены къ силѣ, приложенной въ P

и къ парѣ. Теорія упругости и практика показываютъ, что моментъ этой пары пропорціоналенъ измѣненію кривизны въ точкѣ P. Выразимъ его поэтому формулою

$$E\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right),$$

въ которой коэффиціентъ E зависитъ только отъ свойствъ матеріала волоска и отъ его поперечнагй сѣченія.

Имѣемъ равенство моментовъ:

$$Mk^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2}=-E\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)-Xy+Yx\;.\;.\;.\;.\;.\;(474)$$

Пусть длина части BP волоска равна s. Помноживъ обѣ части уравненія (483) на ds и интегрируя по всей длинѣ l волоска, получимъ:

$$Mk^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,.\,t=-E\int\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)ds+Y\int x\,ds-X\,.\int y\,ds\;.\;.\;(475)$$

Извѣстно, что $\frac{ds}{\rho}$ есть уголъ, составляемый двумя безконечно близкими нормалями. Слѣдовательно $\int\frac{ds}{\rho}$ есть уголъ, составляемый первою и послѣднею нормалью. Но, по условіе задачи, нормаль въ точкѣ C неподвижна. Слѣдовательно $\int\left(\frac{ds}{\rho}-\frac{ds}{\rho_0}\right)$ есть уголъ, составляемый нормалью въ точкѣ B въ положеніи равновѣсія съ нормалью въ той же точкѣ B въ моментъ t, то есть уголъ между положеніями этой нормали при $\theta=o$ в при $\theta=\theta$.

Но, по условію задачи, нормаль въ точкѣ B составляетъ постоянный уголъ со стержнемъ. Слѣдовательно $\int\left(\frac{ds}{\rho}-\frac{ds}{\rho_0}\right)$ есть именно уголъ θ, составляемый направленіемъ стержня въ моментъ t съ направленіемъ его при равновѣсіи.

Если обозначимъ чрезъ $\overline{x}$, $\overline{y}$ координаты центра тяжести волоска въ моментъ t, то, согласно (242):

$$\left.\begin{aligned}\int x\,ds&=\overline{x}\,.\,l\\ \int y\,.\,ds&=\overline{y}\,.\,l\end{aligned}\right|\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(476)$$

Такимъ ѳбразомъ (484) принимаетъ видъ:

$$Mk^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{E}{l}\,.\,\theta+Y\,.\,\overline{x}-X\,.\,\overline{y}\;.\;.\;.\;.\;.\;(477)$$

Маятникъ этотъ устраиваютъ такъ, что въ положеніи равновѣсія центръ тяжести волоска лежитъ на оси вращенія o; колебанія маятникъ дѣлаетъ весьма малыя. Поэтому въ теченіи движенія X и Y очень малы,

$\overline{x}$ и $\overline{y}$ тоже остаются малыми. Вслѣдствіе этого величинами $X . \overline{y}$ и $Y . \overline{x}$ какъ величинами малыми 2-го порядка можно пренебречь. Тогда (477) приметъ видъ:

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{E}{l} . \theta \quad \ldots\ldots\ldots (478)$$

Отсюда, интегрируя, найдемъ, что продолжительность T колебанія равна:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Mk^2 . l}{E}} \quad \ldots\ldots\ldots (479)$$

Изъ этой формулы видно, что T увеличивается съ увеличеніемъ l. Маятникъ устраивают такъ, что волосокъ закрѣпленъ въ D. Стержень Ox, въ которомъ сдѣлано направляющее касательную окошко C, повертывается около o. Если часы отстаютъ, то повертываютъ этотъ стержень Ox такъ, чтобы увеличить разстояніе DC. Тогда уменьшается дѣйствующая длина l волоска, считаемая по его длинѣ отъ B до C, и T дѣлается меньшимъ. Если часы уходятъ впередъ, то приближаютъ C къ D и увеличиваютъ этимъ l и T.

Съ возрастаніемъ температуры возрастаетъ длина стержня BOB' и поэтому возрастаетъ его моментъ инерціи Mk^2, вслѣдствіе чего, согласно (479) возрастаетъ T, и часы отстаютъ. Для избѣжанія этого въ хронометрахъ прикрѣпляютъ къ стержню BOB' дуги $B'q$ и Fp (фиг. 72) съ маленькими массами при p и q, при чемъ каждая дуга дѣлается изъ полосокъ двухъ металловъ, а именно внѣшняя полоска дѣлается изъ металла болѣе расширяющагося отъ увеличенія температуры. При увеличеніи температуры каждая такая дуга согнется немного; всѣ массы дугъ приблизятся къ O, моментъ инерціи уменьшится и это уменьшеніе момента инерціи, слагаясь съ тѣмъ его увеличеніемъ, къ избѣжанію котораго мы стремились, обусловитъ неизмѣняемость момента инерціи отъ измѣненія температуры. Но такъ какъ очень трудно достигнуть полной компенсаціи, то и самые лучшіе хронометры вѣрнѣе идутъ при постоянной температурѣ.

§ 206. Кинетическія формулы вращенія неизмѣняемой системы около неподвижной оси. Въ равномѣрномъ вращеніи около оси скорость опредѣляется по формулѣ (331)

$$v = \omega . r \quad \ldots\ldots\ldots (331)$$

Неравномѣрное вращеніе мы разсматриваемъ какъ рядъ безконечно малыхъ равномѣрныхъ вращеній. Если въ теченіи времени dt тѣло вращается на уголъ $d\theta$, то, продолжая вращаться равномѣрно, оно повернулось бы въ единицу времени на уголъ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots (480)$$

Эта величина и называется *угловою* (или вращательною) скоростью въ концѣ времени t.

Изъ (331) слѣдуетъ:

$$v = r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (481)$$

Изъ (105) заключаемъ, что тангецiальное ускоренiе точки вращающагося тѣла, отстоящей отъ оси на разстоянiи r, равно

$$\frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{тангенц. ускор.} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (482)$$

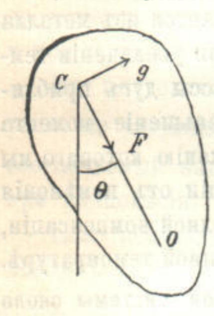
Изъ (106) заключаемъ, что центростремительное ускоренiе точки вращающагося тѣла равно:

$$\frac{v^2}{\rho} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \text{центростр. ускорен.} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (483)$$

Ускоренiемъ вращательнаго движенiя называется предѣлъ $\frac{d\omega}{dt}$ отношенiя измѣненiя скорости къ измѣненiю времени. Изъ (480) видимъ, что оно равно:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (484)$$

§ 207. Давленiе на неподвижную ось вращенiя, оказываемое тѣломъ симметричнымъ относительно плоскости, проходящей чрезъ центръ тяжести и перпендикулярной къ оси вращенiя. Пусть O центръ тяжести; G и F слагающiя реакцiи оси по осямъ x и y; X и Y проекцiи внѣшнихъ силъ, L ихъ моментъ относительно C; C центръ подвѣса. По (452) имѣемъ:



Фиг. 33.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\text{стат. мом. задан. силъ}}{\text{мом. инерц. отн. оси вращен.}} \cdot \cdot \quad (485)$$

Пусть Mk^2 есть моментъ инерцiи тѣла относительно оси, проходящей чрезъ центръ тяжести и параллельной оси вращенiя, M масса тѣла. По (337) моментъ инерцiи относительно оси вращенiя равенъ:

$$M\,(k^2 + h^2).$$

Формула (485) принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{L}{M\,(k^2 + h^2)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (486)$$

Центръ тяжести тѣла, которое, введя реакцiи оси, разсматриваемъ какъ свободное, движется такъ, какъ будто всѣ силы были къ нему непосредственно приложены. Но онъ движется по круговой дугѣ, описанной изъ C радiусомъ

$$CO = h.$$

По (482) и (483) получимъ нормальное и тангенціальное ускоренія. Приравнивая ихъ отношеніямъ соотвѣтственныхъ силъ къ массѣ, получимъ:

$$h\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{Y+G}{M}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (487)$$

$$-h\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{X+F}{M}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (488)$$

Если дѣйствуетъ только тяжесть, то:

$$X=Mg\cos\theta;\quad Y=-Mg\sin\theta;\quad L=-Mgh\sin\theta.$$

Поэтому:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{gh\sin\theta}{k^2+h^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (489)$$

Интегрируя (489), получимъ:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2gh\cos\theta}{k^2+h^2}+C\ \ldots\ldots\ldots\ldots (490)$$

Если ω есть угловая скорость при

$$\theta=90^\circ,$$

то

$$C=\omega^2.$$

Поэтому (490) даетъ:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2gh\cos\theta}{k^2+h^2}+\omega^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots (491)$$

Подставивъ опредѣляемыя уравненіями (489) и (491) величины въ (487) и (488), получимъ:

$$-\frac{F}{M}=g\cos\theta\frac{k^2+3h^2}{k^2+h^2}+\omega^2 h\ \ldots\ldots\ldots\ldots (492)$$

$$\frac{G}{M}=h\sin\theta\frac{k^2}{k^2+h^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (493)$$

Мы видимъ, что G не зависитъ отъ начальныхъ данныхъ. Напротивъ того, F зависитъ отъ ω.

Для мгновенныхъ силъ, принимая за ω и ω' угловыя скорости до и послѣ удара получимъ:

$$\omega'-\omega=\frac{L}{M(k^2+h^2)}.$$

$$h(\omega'-\omega)=\frac{Y+G}{M}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (494)$$

$$X+F=o.$$

§ 208. Давленіе на неподвижную ось вращенія, если силы и тѣло несимметричны относительно плоскости, проходящей чрезъ ось и чрезъ центръ тяжести. Примемъ ось вращенія за ось z. Возьмемъ, пока, начало координатъ и плоскость (x, z) произвольно.

Пусть:

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ суть координаты центра тяжести.

ω угловая скорость въ моментъ t.

$$p = \frac{d\omega}{dt} = \text{угловое ускореніе} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Согласно (482) и (483) имѣемъ для точки тѣла, находящейся на разстояніи r отъ оси:

$$p \cdot r = \text{тангенц. ускор.} \qquad (495)$$

$$\omega^2 r = \text{центростремъ. ускор.} \qquad (496)$$

Если въ моментъ t радіусъ r составляетъ съ плоскостью (x, z) уголъ θ, то:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r \cdot \cos\theta - pr\sin\theta = -\omega^2 x - py \qquad (497)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + p \cdot x \qquad (498)$$

Слагающія равнодѣйствующей силы и равнодѣйствующей пары будутъ:

$$X_1 = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma m(-\omega^2 x - py) = -\omega^2 M\bar{x} - p \cdot M \cdot \bar{y} \qquad (499)$$

$$Y_1 = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma m(-\omega^2 y + px) = -\omega^2 M \cdot \bar{y} + p \cdot M \cdot \bar{x} \qquad (450)$$

$$Z_1 = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad (501)$$

$$L_1 = \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\Sigma mz\frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2\,\Sigma myz - p\,\Sigma mxz. \qquad (502)$$

$$M_1 = \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma mz\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\,\Sigma mxz - p\,\Sigma myz. \qquad (503)$$

$$N_1 = \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma mr^2\frac{d\omega}{dt} = Mk'^2 p \qquad (504)$$

Положимъ, что тѣло прикрѣплено къ оси вращенія въ двухъ точкахъ, находящихся на разстояніяхъ a и a' отъ начала координатъ. Пусть слагающія реакцій точекъ на тѣло суть F, G, H, F', G', H'. Пусть X, Y, Z суть слагающія заданной силы, дѣйствующей на точку m тѣла.

Тогда получимъ:

$$\Sigma mX + F + F' = -\omega^2 M\bar{x} - pM\bar{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (505)$$

$$\Sigma mY + G + G' = -\omega^2 M\bar{y} + pM\bar{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (506)$$

$$\Sigma mZ + H + H' = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (507)$$

$$\Sigma m\,(yZ - zY) - Ga - G'a' = \omega^2\,\Sigma myz - p\,\Sigma mxz \quad . \quad . \quad (508)$$

$$\Sigma m\,(zX - xZ) + Fa + F'a' = -\omega^2\,\Sigma mxz - p\,\Sigma myz \quad . \quad (509)$$

$$\Sigma m\,(xY - yX) = pMk^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (510)$$

Уравненіе (510) опредѣляетъ $p = \frac{d\omega}{dt}$; по интеграціи опредѣлится ω. (505), (508) и (509) опредѣляютъ затѣмъ F, G, F', G'. Величины H и H' остаются неопредѣленными, но сумма ихъ опредѣляется уравненіемъ (507).

Значительныя упрощенія бываютъ въ слѣдующихъ случаяхъ.

1) Когда ось z есть одна изъ главныхъ осей инерціи для начала координатъ. Тогда

$$\Sigma mxy = o; \quad \Sigma myz = o.$$

2) Результатъ остается такимъ же, если изберемъ плоскость (x, z) такъ, чтобы она содержала центръ тяжести въ разсматриваемый моментъ; тогда $\bar{y} = o$.

3) Точки прикрѣпленія оси произвольны; поэтому можно положить $a = o$.

Въ случаѣ дѣйствія мгновенныхъ силъ обозначаемъ чрезъ u, v, w проложенія скорости точки m тѣла до удара, чрезъ u', v', w' эти проложенія послѣ удара. Тогда:

$$u = -y\omega;\ u' = -y\omega';\ v = x\omega;\ v' = x\omega';\ w = o;\ w' = o,$$

гдѣ ω угловая скорость до удара; ω' угловая скорость послѣ удара.

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \Sigma m\,(u' - u) = M\bar{y}\,(\omega' - \omega) \\ Y_1 &= \Sigma m\,(v' - v) = M\bar{x}\,(\omega' - \omega) \\ Z_1 &= o \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (511)$$

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \Sigma m\,[y\,(w' - w) - z\,(v' - v)] = -\Sigma mxz\,(\omega' - \omega) \\ M_1 &= \Sigma m\,[z\,(u' - u) - x\,(w' - w)] = -\Sigma myz\,(\omega' - \omega) \\ N_1 &= \Sigma m\,[x\,(v' - v) - y\,(u' - u)] = Mk'^2\,(\omega' - \omega) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (512)$$

По началу Даламбера:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X + F + F' &= - M\bar{y}\,(\omega' - \omega)\\ \Sigma Y + G + G' &= M\bar{x}\,(\omega' - \omega)\\ \Sigma Z + H + H' &= o\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (513)$$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\,(yZ - zY) - Ga - G'a' &= -\Sigma mxz\,(\omega' - \omega)\\ \Sigma\,(zX - xZ) + Fa + F'a' &= -\Sigma myz\,(\omega' - \omega)\\ \Sigma\,(xY - yX) &= Mk'^2\,(\omega' - \omega)\end{aligned}\right\} \quad \ldots (514)$$

Здѣсь могутъ быть такія же упрощенія какъ выше.

209. Изслѣдованіе результатовъ §§ 207 и 208. Изъ того, что силы и давленія входятъ въ формулы двухъ предыдущихъ параграфовъ линейно (въ первыхъ степеняхъ) слѣдуетъ, что проложенія всѣхъ силъ и давленій суть суммы проложеній отдѣльныхъ силъ и давленій. Поэтому давленія оси на тѣло можно раздѣлить на 2 группы: 1) статическія, уравновѣшивающіяся съ заданными силами и 2) динамическія, уравновѣшивающіяся съ ускорительными силами $m\,\frac{d^2x}{dt^2}$; $m\,\frac{d^2y}{dt^2}$...

Равнодѣйствующую статическихъ давленій можно опредѣлить приравнявъ нулю лѣвыя части уравненій (505), (506), (507) и уравненій (508), (509) и (510). Эти уравненія не измѣнятся, если перемѣстимъ заданныя силы параллельно имъ самимъ и введемъ соотвѣтствующія пары.

Если, напримѣръ, на тѣло дѣйствуетъ только тяжесть и ось вращенія горизонтальна, то *статическое* давленіе на ось вертикально, равно вѣсу тѣла и приложено къ основанію перпендикуляра, опущеннаго на ось изъ центра тяжести.

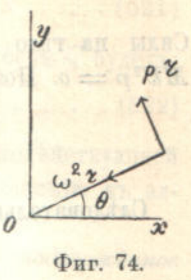
Статическое давленіе на ось, производимое ударомъ, направленнымъ перпендикулярно къ оси, опредѣлимъ, если перенесемъ этотъ ударъ въ положеніе ему параллельное, но проходящее чрезъ ось.

Если ось вращенія Oz есть одна изъ главныхъ осей для начала координатъ O, то изъ (503) слѣдуетъ: $L_1 = o$; $M_1 = o$. Тогда ускорительныя (по началу Даламбера) силы суть X_1, Y_1 приложенныя въ O и пара N_1. Силы X_1 и Y_1 суть ускорительныя силы массы M, помѣщенной въ центрѣ тяжести. Пара N_1 входитъ только уравненіе (504) и вліяетъ косвенно на F, G, F', G' только тѣмъ, что измѣняетъ p. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ: *давленія на ось, вызванныя ускорительными силами, равносильны одной силѣ, приложенной къ той точкѣ O оси, для которой ось есть одна изъ главныхъ осей инерціи и равной ускорительной силѣ массы M всего тѣла, сосредоточенной въ центрѣ тяжести.* Если $\bar{r}$ есть длина перпендикулярна, опущеннаго на ось изъ центра тяжести, то слагающая этого давленія, направленная по r, равна

$$-\omega^2 M\bar{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (515)$$

слагающая же, направленная перпендикулярно къ плоскости, проходящей чрезъ $\bar{r}$ и ось равна:

$$p \cdot M\bar{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (516)$$



Фиг. 74.

Итакъ, если для какой-либо точки O оси вращенія эта ось есть одна изъ главныхъ осей инерціи, то давленіе *оси на тѣло* приводится къ двумъ силамъ: *одна изъ нихъ (статическая) равна и противуположна вѣсу тѣла и приложена къ основанію перпендикуляра, опущеннаго на ось вращенія изъ центра тяжести; другая (динамическая) равна ускорительной силѣ массы M сосредоточенной въ центрѣ тяжести и приложена въ точкѣ O оси вращенія.*

§ 210. Перманентныя оси вращенія. Положимъ, что абсолютно твердое тѣло, на которое не дѣйствуютъ никакія силы, имѣетъ только одну неподвижную точку O, и тѣлу этому сообщено вращеніе около нѣкоторой (воображаемой) оси Oz. Спрашивается: при какихъ условіяхъ тѣло будетъ продолжать вращеніе около этой оси такъ, какъ будто бы она была неподвижна *). Если эти условія выполнены, то ось вращенія называется *перманентною.* Если же эти условія не выполнены, то ось вращенія сама будетъ двигаться около O.

Если ось вращенія, проходящая чрезъ неподвижную точку O, остается неподвижною, то, слѣдовательно, какая-нибудь другая ея точка A неподвижна. Вычисляемъ по формуламъ предыдущаго параграфа силы, приложенныя въ A для поддержанія неподвижности оси вращенія. Если эти силы равны нулю, то закрѣпленіе оси въ A излишне, и разсматриваемая ось *перманентна.*

Но мы предположили, что на тѣло не дѣйствуютъ никакія силы, поэтому давленіе на ось можетъ происходить только отъ ускорительныхъ силъ. Если ось Oz есть одна изъ главныхъ осей инерціи для одной изъ своихъ точекъ, то, согласно § 208, давленіе это приложено въ этой точкѣ. Слѣдовательно, давленіе въ A можетъ быть равно нулю только тогда, когда точка оси вращенія, для которой эта ось есть одна изъ главныхъ осей инерціи, совпадаетъ съ неподвижною точкою O. Итакъ, *ось Oz* **перманентна,** *если она есть одна изъ главныхъ осей инерціи для неподвижной точки O.*

Докажемъ, что это условіе не только достаточно, но и необходимо для перманентности оси Oz.

Если O примемъ за начало координатъ и будемъ по формуламъ § 208

*) Снарядъ, показывающій, что тѣло можетъ имѣть неподвижною только одну точку, легко устроить напримѣръ такъ: укрѣпить вертикально заостренную сверху палку и на это остріе опрокинуть стаканъ; опираясь внутреннею стороною дна на остріе O, стаканъ представитъ собою тѣло, вращающееся около O.

опредѣлять давленія F, G, H на O и давленіи F', G', H' на A, то:

$$a = o; \quad a' = OA.$$

Силы на тѣло не дѣйствуютъ; слѣдовательно, уравненіе (504) даетъ $Mk'^2 p = o$. Поэтому $p = o$. Далѣе изъ уравненій (508) и (509) получимъ:

$$-G'a' = \omega^2 \Sigma myz$$
$$F'a' = -\omega^2 \Sigma mxz.$$

Слѣдовательно F' и G' могутъ быть равными нулю только при

$$\Sigma myz = o,$$
$$\Sigma mxz = o,$$

то есть ось Oz можетъ быть *только* въ томъ случаѣ перманентною осью, если она есть одна изъ главныхъ осей для неподвижной точки O.

§ 211. Начальная ось вращенія, возникающая въ покоющемся тѣлѣ, имѣющемъ одну неподвижную точку, при дѣйствіи импульсивной пары. На тѣло, имѣющее одну неподвижную точку O и находящееся въ покоѣ, дѣйствуетъ импульсивная (мгновенная) пара. Опредѣлить ось, около которой *начинается* вращеніе тѣла.

Пусть искомая ось вращенія есть Oz. Положимъ сначала (какъ въ предыдущемъ параграфѣ), что ось эта еще подперта въ A, а затѣмъ приравняемъ вызванныя въ A импульсивною парою давленія нулю. Пусть L, M, N суть слагающія импульсивной пары. Уравненіе плоскости пары таково:

$$L\xi + M\eta + N\zeta = o \quad \ldots \ldots \quad (517)$$

Пусть u', v', w' суть начальныя скорости точки (x, y, z) тѣла; ω' начальная угловая скорость тѣла, вызванныя импульсивною парою. Тогда такъ же какъ и въ § 208.

$$\left.\begin{aligned} u' &= -y\omega' \\ v' &= x\omega' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (518)$$

$$\left.\begin{aligned} L - G'a' &= \Sigma m\,(yw' - zv') = -\omega' \,.\, \Sigma mxz \\ M + F'a' &= \Sigma m\,(zu' - xw') = -\omega' \,.\, \Sigma myz \\ N &= Mk'^2\omega' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (519)$$

Если положить $F' = o$; $G' = o$, то (519) дадутъ пары, которыя должны дѣйствовать на тѣло, для того чтобы оно начало вращаться именно около Oz.

Подставивъ L, M, N въ (517) получимъ уравненіе плоскости пары въ видѣ:

$$-\xi \,.\, \Sigma mxz - \eta \,.\, \Sigma myz + \zeta \,.\, Mk'^2 = o \quad \ldots \ldots \quad (520)$$

Если эллипсоидъ инерціи, построенный для неподвижной точки O, вы-

ражается уравненіемъ

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = k \quad . \; . \; . \; (521)$$

то уравненіе діаметральной плоскости его сопряженной съ осью ζ будетъ:

$$-E\xi - D\eta + C\zeta = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (522)$$

Сравнивая съ (520) заключаемъ, что плоскость равнодѣйствующей пары должна быть сопряженная съ осью вращенія по отношенію къ эллипсоиду инерціи, построенному для неподвижной точки O.

Итакъ: *покоющееся на неподвижной точкѣ тѣло, не подверженное дѣйствію силъ, начинаетъ вращаться подъ вліяніемъ импульсивной пары около оси сопряженной съ плоскостью этой пары по отношенію къ эллипсоиду инерціи, построенному для неподвижной точки.*

Эта ось называется *начальною осью вращенія* (die Axe der spontanen Rotation).

§ 212. **Центръ удара.** Если тѣло, способное вращаться около неподвижной оси подвергается такому удару, который *не производитъ на эту ось никакого давленія*, то всякая точка тѣла, лежащая на *линіи такого удара* (на прямой, по которой ударъ направленъ), называется *центромъ удара.*

Если сдѣлать неподвижною начальную ось вращенія, соотвѣтствующую данному удару о тѣло подпертое въ одной точкѣ, то ударъ окажется направленнымъ въ центръ удара, соотвѣтствующій этой оси.

Положимъ, что тѣло представляетъ изъ себя пластинку, подвѣшенную неподвижно за одну точку C, такъ что центръ тяжести O находится на вертикали подъ C. Положимъ, что въ эту пластинку производится въ ея плоскости горизонтальный ударъ Y приложенный въ точкѣ A, лежащей на проложеніи прямой CO. Пусть:

F реакція въ C направленная по CO.

G реакція въ C направленная перпендикулярно къ CO.

$CA = a.$

$h = CO.$

ω' угловая скорость послѣ удара.

Согласно (494) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \frac{Ya}{M\,(k^2 + h^2)} \\ h\omega' &= \frac{Y + G}{M} \\ F &= o. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (523)$$

Если, какъ это требуется для удара направленнаго въ центръ удара, давленіе на O равно нулю, то $G = o$, и изъ (523) получимъ:

$$k^2 + h^2 = ah \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (524)$$

Сравнивая съ (472) получимъ:

$$\alpha = l.$$

Слѣдовательно, *центръ удара находится въ центрѣ качанія* для удара, произведеннаго описаннымъ въ настоящемъ параграфѣ способомъ.

Положимъ теперь, что ударяется не пластинка, а тѣло способное вращаться около неподвижной оси. Пусть:

Ось вращенія есть ось z.

Плоскость (x, z) проходитъ черезъ центръ тяжести.

X, Y, Z слагающія удара.

ξ, η, ζ суть координаты точки тѣла, лежащей на линіи удара.

Mk'^2 моментъ инерціи тѣла около неподвижной оси.

Примѣняя уравненія (513) и (514). полагая въ нихъ $\overline{y} = o$ и полагая давленія на ось равными нулю получимъ:

$$X = o;\ Y = M\overline{x}\,(\omega' - \omega);\ Z = o \quad \ldots\ldots (525)$$

$$\left.\begin{aligned} \eta Z - \zeta Y &= -(\omega' - \omega)\,\Sigma mxz \\ \zeta X - \xi Z &= -(\omega' - \omega)\,\Sigma myz \\ \xi Y - \eta X &= (\omega' - \omega)\,Mk'^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (526)$$

Изъ этихъ уравненій (525) и (526) видно, что центръ удара существуетъ только въ томъ случаѣ, если:

1) *ударъ направленъ перпендикулярно къ плоскости, проходящей чрезъ неподвижную ось и содержащей центръ тяжести;*

2) *если неподвижная ось есть одна изъ главныхъ осей инерціи для какой-либо лежащей на ней точки.* Потому что изъ (525) и (526) слѣдуетъ:

$$\Sigma myz = o;\ \zeta = \frac{\Sigma mxz}{M\overline{x}}.$$

Но начало координатъ можетъ быть взято въ любой точкѣ неподвижной оси, и его можно такъ выбрать, чтобы $\Sigma mxz = o$.

§ 213. Баллистическій маятникъ. Для опредѣленія начальной скорости ядра, то есть той скорости, съ которою ядро вылетаетъ изъ пушки можно пользоваться баллистическимъ маятникомъ Робинса, устраиваемымъ слѣдующимъ образомъ. Къ толстому деревянному брусу, подвѣшенному на горизонтальной оси прикрѣпляется пушка. При выстрѣлѣ такой маятникъ, вслѣдствіе реакціи, отклоняется отъ своего положенія равновѣсія, и по величинѣ этого отклоненія, какъ сейчасъ увидимъ, можно судить о начальной скорости ядра. Уголъ, на который отклоняется маятникъ, измѣряется длиною шнурка, закрѣпленнаго въ маятникѣ, сматываемаго отклоненіемъ маятника съ ролика, на которомъ шнурокъ былъ намотанъ. Пусть:

$h =$ разстояніе центра тяжести маятника съ пушкою отъ неподвижной оси.

p = разстояніе оси пушки отъ неподвижной оси.

C = разстояніе точки прикрѣпленія шнурка къ маятнику отъ неподвижной оси.

m = масса ядра.

M = масса маятника съ пушкою.

$n = \frac{M}{m}$.

b = хорда измѣряемая шнуркомъ.

k' = радіусъ инерціи маятника съ пушкою относительно неподвижной оси.

v = искомая начальная скорость ядра.

Взрывъ заряда производитъ равные и противуположные удары на ядро и на пушку. Этотъ ударъ измѣряется количествомъ движенія mv.

Замѣняя въ (485) угловое ускореніе $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ измѣненіемъ скорости $\omega' - \omega$ получимъ:

$$\omega' - \omega = \frac{\text{моментъ удара относительно оси вращенія}}{\text{моментъ инерціи относительно оси вращенія}} \quad . \quad . \quad (527)$$

Въ настоящемъ случаѣ эта формула принимаетъ видъ:

$$\omega = \frac{mvp}{Mk'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (528)$$

Дальнѣйшее движеніе опредѣлятся по (485) формулою:

$$\frac{d^2\theta}{dt} = -\frac{gh}{k'^2} \sin\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (529)$$

Интегрируя (529), получимъ:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2gh}{k'^2} \cdot \cos\theta + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (530)$$

При $\theta = o$, имѣемъ $\frac{d\theta}{dt} = \omega$. Если α есть уголъ отклоненія маятника то при $\theta = \alpha$, имѣемъ $\frac{d\theta}{di} = o$. Поэтому (530) даетъ:

$$k'^2\omega^2 = 2gh(1 - \cos\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (531)$$

Исключая ω изъ (531) и (538), получимъ:

$$v = \frac{nk'}{p} \cdot 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (532)$$

Но

$$b = 2c \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Слѣдовательно:

$$v = \frac{nbk'}{cp} \sqrt{gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (533)$$

Для опредѣленія k' производимъ отдѣльный опытъ: наблюдаемъ продолжительность T колебанія баллистическаго маятника съ пушкою послѣ

отклоненія его на малый начальный уголъ. Затѣмъ по (459) и (234) получимъ уравненіе:

$$T = \pi \sqrt{\frac{k'^2}{gh}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (534)$$

изъ котораго и опредѣляемъ k'. Подставляя k' въ (533), опредѣлимъ v.

ГЛАВА V.

Равновѣсіе абсолютно твердыхъ тѣлъ, между которыми существуетъ треніе.

§ 214. Скольженіе и катаніе. Если во время движенія два тѣла A и B касаются одно съ другимъ, то могутъ быть три случая:

1) Дуги ds и ds', проходимыя общею точкою a соприкосновенія по тѣлу A и по тѣлу B, могутъ быть равны между собою

$$ds = ds' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (535)$$

Такое движеніе называется *чистымъ катаньемъ.*

2) Одна изъ дугъ ds или ds' равна нулю. Такое движеніе называется *чистымъ скольженьемъ.*

3) Дуги ds и ds' могутъ быть неравными между собою и не равны нулю. Такое движеніе называется катаньемъ со скольженьемъ.

§ 215. Общее понятіе о треніи. Когда тѣло B движется по тѣлу A, то появляется сила сопротивляющаяся движенію, сила, дѣйствующая въ сторону противуположную движенію. Эту силу и называютъ треніемъ.

Различаютъ два рода тренія: *треніе скольженія,* появляющееся при скольженіи одного тѣла по другому и *пара тренія,* являющаяся при катаньи одного тѣло по другому.

Если одно тѣло катится и скользитъ по другому, то приходится разсматривать и треніе скольженія и треніе катанья.

§ 216. Законы тренія скольженія. Изъ многочисленныхъ опытовъ Кулона, Морена и другихъ оказалось слѣдующее:

1) Треніе F скольженія пропорціонально нормальному давленію N одного тѣла на другое.

1) Треніе скольженія *не* зависитъ отъ величины поверхности соприкосновенія тѣлъ.

3) При началѣ движенія одного тѣла по другому треніе скольженія больше чѣмъ во время движенія, но при движеніи оно не зависитъ (или весьма мало зависитъ) отъ скорости.

4) Треніе скольженія зависитъ отъ свойствъ и состоянія трущихся поверхностей.

Первый изъ этихъ законовъ даетъ формулу

$$F = f \,.\, N \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (536)$$

въ которой f есть нѣкоторый коэффиціентъ, зависящій отъ свойствъ и состоянія трущихся поверхностей и называемый *коэффиціентомъ тренія.*

§ 217. Опредѣленіе коэффиціента тренія скольженія. Для того чтобы опредѣлить коефиціентъ f поступаютъ слѣдующимъ образомъ.

Кладутъ тѣло, нижняя поверхность котораго по крайней мѣрѣ, сдѣлана изъ испытуемаго вещества на наклонную поверхность (фиг. 75), поверхность которой сдѣлана изъ испытуемаго другого (или того же самаго) вещества. Пусть:

α = уголъ наклоненія наклонной плоскости къ горизонту.

P = вѣсъ положеннаго на плоскость тѣла.

Фиг. 75.

Увеличиваютъ постепенно уголъ α до тѣхъ поръ, пока положенное на плоскость тѣло начнетъ скользить. Положимъ это случилось, когда α возросъ до φ. Уголъ φ называютъ угломъ тренія, такъ что: уголъ φ тренія есть предѣльный уголъ, при которомъ, въ этомъ опытѣ, положенное на плоскость тѣло начинаетъ скользить.

При наклонѣ плоскости равномъ углу φ тренія слагающая $P \,.\, \sin\varphi$ вѣса тѣла какъ разъ равна и противоположна силѣ F тренія. Поэтому, и согласно (536)

$$F = f \,.\, N = P \,.\, \sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (537)$$

Но изъ чертежа (фиг. 75) видно, что:

$$N = P \,.\, \cos\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (538)$$

Слѣдовательно

$$f \,.\, P \,.\, \cos\varphi = P \sin\varphi$$

откуда:

$$f \,.\, tg\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (539)$$

Итакъ: *коэффиціентъ тренія f равенъ тангенсу угла тренія.*

Продѣлавъ такой опытъ и наблюдая уголъ φ, при которомъ тѣло начинаетъ скользить, достаточно взять изъ таблицъ $tg\,\varphi$, чтобы получить величину f. Можно этотъ тангесъ опредѣлить и безъ таблицъ прямо взявъ отношеніе катетовъ треугольника ABC

$$f = tg\,\varphi = \frac{BC}{AB} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Для многихъ тѣлъ, существуютъ таблицы, въ которыхъ даются f.

Для тренія камня по камню, напримѣръ, $f = 0{,}60$.

Для тренія стали по льду $f = 0{,}10$.

Когда f извѣстно изъ опыта или изъ таблицъ, то самое треніе F опредѣляется по формулѣ (536).

§ 218. Пара тренія при катаньи. Для опредѣленія пары тренія при катаньи поступаютъ иначе. Кладутъ на горизонтальную плоскость валъ C изъ испытуемаго вещества. Въ плоскости дѣлаютъ прорѣзъ. Перекидываютъ черезъ валъ шнурокъ; пропускаютъ концы его въ прорѣзъ и, навѣсивъ на оба конца шнурка по грузу P, увеличиваютъ одинъ изъ этихъ грузовъ постепенно. Пусть p будетъ тотъ добавочный грузъ на который надо увеличить грузъ P одного изъ концовъ для того, чтобы валъ началъ двигаться. Тогда, если радіусъ вала равенъ r, то моментъ пары тренія равенъ

$$pr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (540)$$

потому что: реакція плоскости на валъ въ точкѣ A, при вѣсѣ вала равномъ W равна

$$W + 2P + p$$

и дѣйствуетъ по вертикали вверхъ, уничтожаясь равнымъ и противуположнымъ давленіемъ вагруженнаго вала; скольженія въ точкѣ A, а слѣдовательно и тренія скольженія не наблюдается; остается статическій моментъ относительно A равный pr.

Опыты показали, что p *прямо пропорціонально давленію и обратно пропорціонально радіусу*. Эту величину p называютъ иногда *треніемъ катанья*.

При обратной пропорціональности тренія p катанья съ радіусомъ r, *моментъ пары тренія не зависитъ отъ радіуса и пропорціоналенъ давленію*.

§ 219. Матеріальная точка помѣщена на шероховатой плоской кривой подъ дѣйствіемъ данной силы. Найти ея положеніе равновѣсія *). Пусть X, Y суть слагающія данной силы.

$N =$ давленіе кривой на точку, считаемое по внутренней нормали,

$F =$ треніе скольженія, направленное по элементу кривой.

$\psi =$ уголъ наклоненія касательной къ оси x.

Положимъ, что данною силою точка прижимается къ кривой.

Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы проложенія всѣхъ дѣйствующихъ силъ на касательную и на нормаль были равны нулю, то есть, чтобы:

$$\left.\begin{aligned} X \,.\, \cos\psi + Y \,.\, \sin\psi + F = o \\ -X \,.\, \sin\psi + Y \,.\, \cos\psi + N = o \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (541)$$

Отсюда, согласно (536) для равновѣсія должно быть

$$\frac{X\cos\psi + Y\sin\psi}{-X\sin\psi + Y\cos\psi} < f \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (542)$$

§ 220. Конусъ тренія. Задачи на опредѣленіе положенія равновѣсія удобнѣе рѣшаются при помощи слѣдующихъ соображеній.

---

*) Вмѣсто того чтобы говорить, что тѣла или кривыя способны проявлять треніе, мы будемъ говорить, что они шероховаты (англ. rough).

Пусть точка P находится на шероховатой кривой AB. Опишемъ около нормали, проведенной въ P, конусъ, образующія котораго составляютъ съ нормалью уголъ равный углу φ тренія. Тогда, согласно сказанному въ 217, заданная дѣйствующая на точку P сила можетъ двинуть ее только въ томъ случаѣ, если она лежитъ внѣ этого конуса. Такой конусъ называется *конусомъ тренія.* Отсюда слѣдуетъ: *Точка находится на кривой въ равновѣсіи, если заданная сила лежитъ внутри конуса тренія.*

§ 221. Матеріальная точка помѣщена на шероховатой кривой двоякой кривизны подъ дѣйствіемъ данной силы. Найти ея положеніе равновѣсія.

Пусть:

X, Y, Z проложенія данной силы R,

T проложеніе силы R на касательную.

Согласно (536) T должно быть; для равновѣсія, въ f разъ меньше нормальнаго давленія $\sqrt{R^2 - T^2}$. Слѣдовательно:

$$T^2 < \mu^2 (R^2 - T^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (543)$$

Это неравенство можно написать въ видѣ:

$$\left(X\frac{dx}{ds} Y + \frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)^2 < \frac{f}{1+f^2}(X^2 + Y^2 + Z^2) \quad \ldots (544)$$

Матеріальная точка будетъ въ равновѣсіи во всѣхъ точкахъ кривой, удовлетворяющихъ неравенству (544).

Если вмѣсто знака неравенства поставимъ въ (544) знакъ равенства, то найдемъ предѣльныя положенія равновѣсія точки.

§ 222. Матеріальная точка находится на шероховатой поверхности подъ дѣйствіемъ данной силы. Найти положеніе равновѣсія данной точки.

Пусть:

Q нормальная слагающая заданной силы R

$$f(x, y, z) = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (545)$$

уравненіе поверхности.

Для равновѣсія нужно соблюденіе условія

$$R^2 - Q^2 < f^2 Q^2.$$

Которому можно придать видъ:

$$\frac{\left(X\frac{\partial f}{dx} + Y\frac{\partial f}{dy} + Z\frac{\partial f}{dz}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2} > \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)}{1+f^2} \quad \ldots (546)$$

Уравненіе же

$$\frac{\left(X\frac{\partial f}{dx} + Y\frac{\partial f}{dy} + Z\frac{\partial f}{dz}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2} = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)}{1+f^2} \quad \ldots (547)$$

представляетъ собою поверхность, пересѣченіе которой съ данной поверхностью есть граница той ея области, во всѣхъ точкахъ которой матеріальная точка находится въ равновѣсіи.

§ 223. Примѣры.

1) *Найти положенія равновѣсія тяжелой точки m на циклоидѣ, обращенной вершиною внизъ, если радіусъ образующаго циклоиду круга равенъ a.*

Обыкновенно циклоида относится къ такимъ осямъ, что вершина ея находится въ разстояніи $2a$ отъ оси x. Тогда она опредѣляется уравненіями

$$x = a\,(\vartheta - \sin\vartheta)$$
$$y = a\,(1 - \cos\vartheta)$$

Изъ этихъ уравненій уголъ ψ наклоненія касательной къ оси x опредѣляется по формулѣ:

$$tg\,\psi = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}} \quad \ldots\ldots\ldots (548)$$

Если, согласно условіямъ задачи, ось x касается циклоиды въ вершинѣ a, ось y направлена въ сторону противуположную той, въ какую она направлена въ системѣ координатъ, при которой получено (548), то для перехода къ новымъ координатамъ надо замѣнить въ (548) y чрезъ $2a - y$. Тогда

$$tg\,\psi = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \quad \ldots\ldots\ldots (549)$$

По условіямъ задачи.

$$X = o; \quad Y = -\,mg.$$

Поэтому (542) принимаетъ видъ:

$$tg\,\psi = f = tg\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (550)$$

гдѣ φ уголъ тренія. Изъ (549) и (550) имѣемъ.

$$\sqrt{\frac{y}{2a - y}} < ty\,\varphi.$$

Отсюда

$$y < \frac{2a\,tg^2\,\varphi}{1 + tg^2\varphi}$$

или

$$y < 2a\,.\,\sin^2\varphi.$$

Итакъ: всѣ точки циклоиды, лежащія на высотѣ (считая отъ вершины циклоиды) меньшей чѣмъ $2a\,.\,\sin^2\varphi$, могутъ быть положеніями равновѣсія матеріальной точки, если φ уголъ тренія.

2) *Опредѣлить положенія равновѣсія тяжелой точки на эллипсоидѣ* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, *въ которомъ ось z вертикальна, принимая во вниманіе*

тренie. Для того, чтобы можно было приложить къ рѣшенію этой задачи формулу (547), вычисляемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2};\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2};\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$$

$$X = o;\ \ Y = o;\ \ Z = -mg.$$

Формула (547) принимаетъ поэтому видъ:

$$\frac{m^2 g^2 . 4z^2}{4c^4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)} = \frac{m^2 g^2}{1 + \mu^2}$$

или

$$z^2 (1 + \mu^2) = c^4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$$

или

$$z^2 \mu^2 = c^4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (551)$$

Линія пересѣченія этой поверхности съ даннымъ эллипсоидомъ окружаетъ на немъ область точекъ равновѣсія.

Исключая z изъ уравненія даннаго эллипсоида и изъ (551), получимъ уравненіе цилиндра:

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\mu^2 = c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$$

пересѣченіе котораго съ даннымъ эллипсоидомъ даетъ ту же линію. Это уравненіе приводится въ виду:

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{c^2}{a^2 \mu^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(1 + \frac{c^2}{b^2 \mu^2}\right) = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (552)$$

Итакъ: область положенія равновѣсія тяжелой точки на данномъ эллипсоидѣ ограничена на немъ линіею пересѣченія его поверхности съ поверхностью эллиптическаго цилиндра (552).

Если возьмемъ песокъ, составленный изъ песчинокъ, коэффиціентъ тренія которыхъ о матерьялъ, послужившій для устройства эллипсоида, равенъ μ, и осторожно насыпемъ его на эллипсоидъ, то онъ расположится въ области, ограниченной линіею пересѣченія поверхности эллипсоида съ поверхностью (552), и эта линія будетъ видна какъ очертаніе песчанаго пятна.

3) Показать, что область положенія равновѣсія тяжелой точки на гиперболическомъ параболоидѣ $\frac{x^2}{p^3} - \frac{y^3}{q_2} - 2z = o$, въ которомъ ось z вертикальна, ограничена на немъ пересѣченіемъ его поверхности съ поверхностью эллиптическаго цилиндра.

$$\frac{x^2}{\mu^2 p^2} + \frac{y^2}{\mu^2 q^2} = 1.$$

4) Лѣстница поставлена нижнимъ концомъ на горизонтальную плоскость, верхній конецъ ея прислоненъ къ вертикальной стѣнѣ. Найти положеніе равновѣсія лѣстницы, принимая во вниманіе треніе ея о полъ и о стѣну. Пусть:

AB лѣстница, длина которой $2l$;
w—вѣсъ лѣстницы, приложенной къ центру тяжести C;
R—давленіе пола на лѣстницу въ A;
R'—давленіе стѣны на лѣстницу въ B;
μ—коэффиціентъ тренія съ поломъ;
μ'—коэффиціентъ тренія со стѣною;
ξR—треніе въ A, гдѣ $\xi < \mu$;
$\eta R''$—треніе въ B, гдѣ $\eta < \mu'$;
ϑ—уголъ наклона лѣстницы къ горизонту.

Для равновѣсія должны быть, согласно (256), равны нулю всѣ проложенія силъ и проложеніи моментовъ паръ. Поэтому уравненія равновѣсія будутъ:

$$\xi R - R' = o$$

$$\eta R' + R - w = o$$

$$2\eta R' \,.\, l \,.\, cos\,\vartheta + 2R' \,.\, l\, sin\,\vartheta - w \,.\, l\, cos\,\vartheta = 0.$$

Исключивъ R и R' находимъ:

$$tg\,\vartheta = \frac{1 - \xi\mu}{2\xi}.$$

Если треніе столь мало, что $\mu \,.\, \mu' < 1$, то минимальный наклонъ ϑ' опредѣлится уравненіемъ

$$tg\,\vartheta' = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu}.$$

Если $\mu\mu' > 1$, то лѣстница находится въ равновѣсіи при всякихъ ϑ.

5) Лѣстница находится въ такомъ же положеніи какъ въ предыдущемъ примѣрѣ. Найти какой грузъ можетъ быть положенъ на данную ея ступеньку, не нарушая равновѣсія, если наклонъ лѣстницы къ горизонту$=\vartheta$. Пусть:

M данная ступенька;
W вѣсъ положеннаго на нее груза;

$$a = AM$$

$$\mu = tg\,\varphi;\quad \mu' = tg\,\varphi'.$$

Геометрическое изслѣдованіе (фиг. 76). Возставимъ перпендикуляры AD къ полу и BD къ стѣнѣ. Пусть D точка ихъ пересѣченія. Построимъ углы: $DAE = \varphi$; $DBE = \varphi'$. Согласно § 220 равнодѣйствующія давленій и треній должны лежать внутри этихъ угловъ, и слѣдовательно точка приложенія общей равнодѣйствующей этихъ реакцій должна находиться

внутри четырехугольника *DFEH*. Пусть *G* есть центръ тяжести совокупности груза и лѣстницы. Если вертикаль, проходящая чрезъ *G*, проходитъ влѣво отъ *E*, то общій вѣсъ $W + w$ можно представить себѣ приложеннымъ въ какой-либо точкѣ *P* находящейся внутри четыреугольника *DFEH*; потому что тогда сила $W + w$ можетъ быть разложена на силы, направленныя по *PA* и *PB*, которыя могутъ быть уравновѣшены реакціями въ *A* и *B*, лежащими въ углахъ *DAE* и *DBE*. Итакъ: равновѣсіе будетъ въ томъ случаѣ, когда вертикаль, проходящая чрезъ *g*, пройдетъ влѣво отъ *E*.

Абсциссы x_1 и x_2 точекъ *E* и *g*, считаемыя вправо отъ *A*, не трудно найти; онѣ будутъ:

$$x_1 = \frac{2l\,[\mu\mu' \cos\vartheta + \mu \,.\, \sin\vartheta]}{\mu\mu' + 1}$$

$$x_2 = \frac{(Wa + w\,.\,l)\cos\vartheta}{W + w}$$

Фиг. 76.

Если средина *C* находится вправо отъ вертикали, проходящей чрезъ *E*, то равновѣсіе возможно только тогда, когда грузъ лежитъ влѣво отъ этой вертикали, и когда онъ достаточно великъ.

Если *C* лежитъ влѣво отъ вертикали, проходящей чрезъ *E*, то грузъ *W* можетъ быть какой угодно величины, если онъ помѣщенъ тоже влѣво отъ нея. Но если онъ находится вправо отъ этой вертикали, то онъ долженъ быть *достаточно малъ* для того, чтобы *G* былъ тоже влѣво отъ вертикали, проходящей чрезъ *E*.

Если вертикаль, проходящая чрезъ *E*, находится вправо отъ *B*, то можно, не нарушая равновѣсія, помѣстить какой угодно грузъ на какую угодно ступеньку, лишь бы лѣстница выдержала этотъ грузъ.

Аналитическое рѣшеніе. Такъ же какъ и въ примѣрѣ 4-омъ, и при тѣхъ же обозначеніяхъ, составляемъ уравненія:

$$\xi R = R'; \quad \eta R' + R = W + w$$

$$2\eta R' l \cos\vartheta + 2R' \,.\, l \,.\, \sin\vartheta = (Wa + wl)\cos\vartheta.$$

Исключивъ *R* и *R'*, получимъ:

$$\frac{2l\,(\xi\eta \,.\, \cos\vartheta + \xi \,.\, \sin\vartheta)}{\xi\eta + 1} = \frac{(Wa + wl)\cos\vartheta}{W + w} \quad . \quad . \quad (553)$$

Условіе равновѣсія заключается въ томъ, чтобы можно было удовлетворить уравненію (553) такими величинами ξ и η, чтобы:

$$\xi < \mu; \quad \eta < \mu_1.$$

Если разсматривать уравненіе (553) какъ уравненіе геометрическаго мѣста точки (ξ, η) отнесеннаго къ прямолинейнымъ прямоугольнымъ коор-

динатамъ, то (553) представляетъ собою гиперболу. Если эта гипербола проходитъ чрезъ прямоугольникъ, составленный точками $\xi = \pm\mu$; $\eta = \pm\mu'$, то условіе равновѣсія соблюдено, потому что тогда можно удовлетворить уравненію (553) величинами $\xi < \mu$; $\eta < \mu'$. Правая часть уравненія (553) есть то, что мы обозначили чрезъ x_2. Для того, чтобы гипербола проходила чрезъ упомянутый прямоугольникъ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{2l\,(\xi\eta\,.\,cos\,\vartheta + \xi\,.\,sin\,\vartheta)}{\xi\eta + 1} - x_2$$

была положительна при $\xi = \mu$; $\eta = \mu'$. Слѣдовательно условіе равновѣсія будетъ

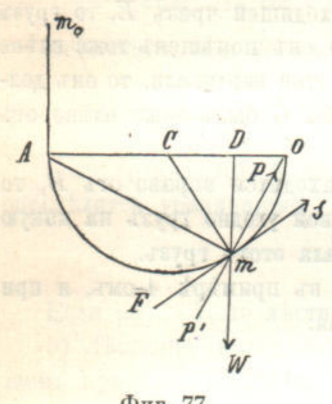
$$\frac{2l\,(\mu\mu'\,.\,cos\,\vartheta + \mu\,sin\,\vartheta)}{\mu\mu' + 1} > x_2,$$

или

$$x_1 > x_2.$$

Въ этомъ заключалось и условіе, выведенное геометрическимъ изслѣдованіемъ.

§ 224. Задача Максвелля. Матеріальная точка m_0 (фиг. 77) лежитъ на плоскости, поставленной подъ угломъ къ горизонту немного меньшимъ, чѣмъ уголъ тренія. Ниже матеріальной точки, но не на одной съ нею линіи наибольшаго ската, сдѣлано въ плоскости отверстіе O, чрезъ которое продѣта нить, прикрѣпленная къ матеріальной точкѣ. Требуется доказать, что, если тянуть весьма тихо за свободный конецъ нити, то матеріальная точка опишетъ на наклонной плоскости путь, состоящій, послѣдовательно, изъ прямой и изъ полукружности.



Фиг. 77.

Доказательство. Пусть m какое-либо положеніе матерьяльной точки, W проложеніе вѣса точки на наклонную плоскость, F треніе. При сказанныхъ условіяхъ $F = W$. Обозначимъ чрезъ P натяжяніе нити. Если нить тащимъ весьма тихо, не возбуждая замѣтной ускорительной силы, то силы F, W и P должны все время быть въ равновѣсіи. Пока отверстіе O еще ниже матеріальной точки m, натяженіе P безконечно мало и достаточно только для нарушенія равновѣсія. Поэтому m спускается по прямой наибольшаго ската. Когда m дойдетъ до горизонтали, проходящей чрезъ O, то P дѣлается величиною конечною. Тогда P должна дѣлить пополамъ уголъ межну P и W, при чемъ направленіе силы W не мѣняется, а F направлена пс касательной къ траекторіи точки m. Опредѣленіе дальнѣйшаго пути приводится, слѣдовательно, къ опредѣленію кривой, въ которой радіусъ Om служитъ биссектрисою угла, составляемаго касательною и постояннымъ направленіемъ.

Такая кривая есть окружность, проходящая чрезъ точку O, находящуюся въ концѣ діаметра перпендикулярнаго къ упомянутому постоянному направленію.

Дѣйствительно (фиг. 77) въ окружности, центръ которой въ C

$$\angle CmO = \angle COm,$$

или

$$\frac{\pi}{2} - \angle SmO = \frac{\pi}{2} - \angle OAm,$$

или

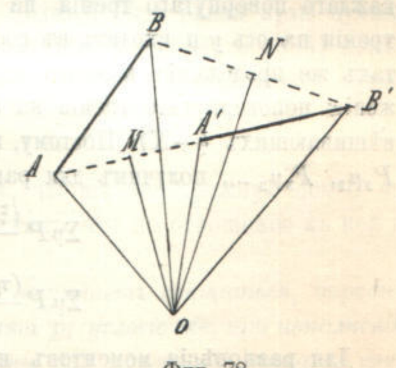
$$\angle P'mF = \angle P'mW,$$

что и требуется. Итакъ, путь точки m состоитъ изъ прямой m_0A (фиг. 77) и полуокружности, построенной на діаметрѣ AO.

§ 225. Тренія, дѣйствующія по неизвѣстнымъ направленіямъ. Въ задачѣ Максвелля мы первый разъ встрѣтились съ вопросомъ, въ которомъ не была дана не только величина тренія, но и направленіе тренія требовалось опредѣлить, потому что предстояло опредѣлить направленіе движенія. Если направленіе движенія не опредѣлено заданіемъ, и слѣдовательно неизвѣстны и направленія треній, а дѣло идетъ о равновѣсіи системы, то приходится прибѣгнуть къ особымъ методамъ, основаннымъ на теоремѣ Шаля, имѣющей капитальное значеніе въ прикладной кинематикѣ.

§ 226. Теорема Шаля: Всякое перемѣщеніе плоской фигуры въ ея плоскости изъ одного положенія въ другое можетъ быть произведено безчисленнымъ множествомъ способовъ; но всегда можно достигнуть этого перемѣщенія вращеніемъ фигуры около нѣкоторой оси, называемой осью перемѣщенія (фиг. 78).

Пусть A и B суть двѣ точки фигуры въ 1-омъ ея положеніи, A', B' эти же точки фигуры во 2-омъ ея положеніи. Соединимъ A съ A' и возставимъ къ прямой AA' изъ ея средины перпендикуляръ MO. Соединимъ B съ B' и возставимъ къ ней изъ ея средины N перпендикуляръ. Пересѣченіе O этихъ перпендикуляровъ и будетъ проекціею оси перемѣщенія на перпендикулярную къ ней плоскость фигуры (фиг. 78).



Фиг. 78.

Дѣйствительно, разстояніе AB между точками фигуры остается неизмѣннымъ, такъ что $AB = A'B$. Кромѣ того изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ слѣдуетъ: $OA = OA'$, $OB = OB'$. Слѣдовательно треугольники AOB и $A'OB'$ равны, и треугольникъ AOB можно перемѣстить *вращеніемъ* около O изъ положенія AOB въ положеніе $A'OB'$, при чемъ (этимъ *вращеніемъ*) AB перемѣстится въ положеніе $A'B'$. Что и требовалось доказать.

§ 227. Первый способъ рѣшенія задачъ на тренія, направленія которыхъ не даны. Такого рода задачи состоятъ въ слѣдующемъ. Дано тяжелое тѣло опирающееся n точками A_1, $A_2 \dots A_n$ на горизонтальную плоскость, производя въ этихъ точкахъ давленія P_1, $P_2 \dots P_n$. Пусть коэффиціенты тренія въ этихъ точкахъ будутъ $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_n$. На тѣло дѣйствуютъ пара и сила, при чемъ всѣ силы параллельны горизонтальной плоскости.

Если будемъ разсматривать предѣльный случай, когда силы настолько велики, что тѣло едва не приходитъ въ движеніе и если намъ удастся найти тотъ центръ C перемѣщенія, около котораго тѣло начало бы вращаться, еслибы оно пришло въ движеніе, то направленія треній опредѣлятся, потому что при вращеніи около C всѣ точки A_1, A_2, $A_3 \dots$ будутъ перемѣщаться по дугамъ окружностей радіусовъ CA_1, CA_2, $CA_3 \dots$, тренія же будутъ дѣйствовать въ сторону противуположную этимъ перемѣщеніямъ.

Пусть:

L моментъ заданной пары,

X, Y слагающія заданной силы,

(x_k, y_k) координаты точки A_k,

$r_k = CA_k$

(ξ, η) координаты центра перемѣщенія,

и положимъ, что заданныя силы стремятся повернуть тѣло въ направленіи противоположномъ движенію стрѣлки часовъ.

Разложеніе треній по направленіямъ осей координатъ упростится, если мы повернемъ всѣ тренія около точекъ ихъ приложенія въ одну сторону на углы равные прямому углу. Тогда всѣ тренія направятся по прямымъ CA_1, CA_2, $CA_3 \dots$ по направленію, положимъ, отъ C. Чтобы имѣть право на такой поворотъ треній мы должны помнить, что теперь проложеніе каждаго повернутаго тренія на ось x равно проложенію неповернутаго тренія на ось y и входитъ въ составъ силъ уравновѣшивающихъ Y; точно такъ же проложеніе каждаго повернутаго тренія на ось y равно проложенію неповернутаго тренія на ось x и входитъ въ составъ силъ уравновѣшивающихъ $(-X)$. Поэтому, и вслѣдствіе того, что тренія равны $P_1\mu_1$, $P_2\mu_2$, $P_3\mu_3 \dots$, получимъ для равновѣсія силъ:

$$\Sigma\mu P \frac{(\xi - x)}{r} + Y = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (554)$$

$$\Sigma\mu P \frac{(\eta - y)}{r} - X = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (555)$$

Для равновѣсія моментовъ паръ не нужно повертывать тренія. Равенство нулю статическихъ моментовъ относительно C будетъ таково:

$$\Sigma\mu Pr + Y \,.\, \xi - X \,.\, \eta - L = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (556)$$

Здѣсь мы предположили, что центръ перемѣщенія C не совпадаетъ ни съ одной изъ точекъ A_1, $A_2 \dots$ прикасающихся къ плоскости. Если C

совпадаетъ, напримѣръ съ A_k, то называя проложенія тренія въ A_k на оси чрезъ F_k и E_k' получимъ уравненія равновѣсія, замѣняя въ (554), (555) и (556) (ξ, η) чрезъ (x_k, y_k), $\mu_k P_k \frac{y_k - \eta}{r_k}$ и $\mu_k P_k \frac{x_k - \xi}{r_k}$ чрезъ F_k' и $-F_k'$ и уничтожая членъ $\mu_k P_k r_k$.

§ 228. **Второй способъ рѣшенія задачъ на тренія по неопредѣленнымъ направленіямъ.** Моментъ относительно C всѣхъ силъ и всѣхъ треній (обозначимъ его чрезъ p) равенъ

$$p = \Sigma\mu Pr + Y\xi - X\eta - L \text{ . . . . } (557)$$

если координаты точки C суть (ξ, η). Этотъ моментъ измѣряется въ направленіи момента треній. Если p отрицательно, то моментъ силъ болѣе момента треній и тѣло начнетъ вращаться. Если p положительно, то моментъ треній больше момента силъ, и тѣло можетъ быть удержано въ покоѣ даже меньшими треніями, чѣмъ предѣльныя тренія. Положимъ, что мы нашли такое положеніе точки C, при которомъ p принимаетъ *наименьшую* величину. Если p положительно или равно нулю при своей наименьшей величинѣ, то не существуетъ центра перемѣщенія C, около котораго тѣло могло бы начать вращаться. Если же минимальное p отрицательно, то существуетъ центръ перемѣщенія именно въ той точкѣ C, для которой p *minimum*.

Для опредѣленія *minimum*'а p нужно приравнять производныя отъ (557) по ξ и по η нулю. Но при этомъ, благодаря равенству

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

мы какъ разъ и получимъ уравненія (554) и (555).

Посмотримъ теперь, какое значеніе имѣютъ эти уравненія (554) и (555). Представимъ себѣ ось перемѣщенія C какъ неподвижную ось вращенія и обозначимъ проложенія производимаго на нее тѣломъ давленія чрезъ R_x и R_y. Тогда, при равновѣсіи, должны быть равны нулю суммы проложеній заданныхъ силъ, треній и давленій. Но (554) и (555) показываютъ, что суммы проложеній заданныхъ силъ и треній равны нулю. Слѣдовательно:

$$R_x = 0; \quad R_y = 0.$$

Уравненія (554) и (555) показываютъ, что на неподвижную ось C не существуетъ давленія, если она выбрана такъ, что по отношенію къ ней p принимаетъ минимальное значеніе:

Итакъ: *ось C, около которой тѣло начинаетъ вращаться, опредѣляется нахожденіемъ minimum'а момента p; условіе же, при исполненіи котораго заданныя силы едва достаточны для приведенія тѣла въ движеніе, получается приравненіемъ нулю найденной минимальной величины момента p.*

Примѣръ I. *Треугольный столъ стоитъ ножками, прикрѣпленными въ трехъ вершинахъ треугольника, на горизонтальномъ полу. Найти наи-*

меньшую пару, которая при существованіи тренія между ножками и поломъ, была бы способна повернуть столъ. Если вѣсъ всего стола W, то давленіе каждой ножки о полъ равно $\frac{W}{3}$ и треніе каждой ножки равно $\mu \frac{W}{3}$.

Положимъ, что центръ перемѣщенія O не совпадаетъ ни съ однимъ изъ концовъ A, B, C ножекъ. Такъ какъ задана только пара и, слѣдовательно, тренія должны уравновѣшивать пару, то они могутъ быть повернуты всѣ въ одну сторону на прямой уголъ, и мы имѣемъ право считать ихъ дѣйствующими по направленіямъ AO, BO, CO не нарушая равновѣсія (см. § 224). Мы должны имѣть равновѣсіе силъ и равновѣсіе моментовъ.

Равновѣсіе силъ заключается въ равновѣсіи повернутыхъ треній дѣйствующихъ по AO, BO, CO; чтобы оно было, необходимо, чтобы центръ перемѣщенія O лежалъ внутри треугольника ABC. Такъ какъ тренія эти взаимно равны, то углы AOB, BOC, COA должны быть взаимно равны. Поэтому каждый изъ нихъ равенъ 120°. Итакъ: если каждый изъ угловъ треугольника менѣе 120°, то центръ перемѣщенія лежитъ на пересѣченіи двухъ дугъ окружностей, построенныхъ на двухъ сторонахъ треугольника и вмѣщающихъ уголъ 120°.

Равновѣсіе моментовъ показываетъ, что моментъ наименьшей пары, которая въ состояніи повернуть столъ, равенъ

$$\mu \frac{W}{3} (AO + BO + CO).$$

Положимъ теперь, что центръ перемѣщенія совпадаетъ съ концомъ одной изъ ножекъ, напримѣръ съ C.

Повернувъ тренія на прямой уголъ замѣтимъ, что треніе въ C должно уравновѣшивать двѣ силы, идущія по AC и BC и равныя каждая $\frac{1}{3}\mu W$. Равнодѣйствующая этихъ силъ равна

$$\frac{1}{3}\mu W \,.\, 2 \cos\left(\frac{C}{2}\right).$$

Но треніе въ C равно $\frac{1}{3}\mu W$. Слѣдовательно, эта равнодѣйствующая не можетъ быть больше $\frac{1}{3}\mu W$: Поэтому уголъ C долженъ быть больше 120°. Итакъ: столъ можетъ повернуться около одной изъ ножекъ только въ томъ случаѣ, если уголъ треугольника при этой ножкѣ $> 120°$. Въ этомъ случаѣ моментъ наименьшей вращающей пары равенъ

$$\frac{1}{3}\mu W (CA + CB).$$

если столъ повертывается около C.

Примѣръ 2. *Однородная палка AB лежитъ на горизонтальномъ столѣ, опираясь на него равномѣрно всѣми точками соприкасающимися*

со столомъ. Найти наименьшую силу, которая, будучи приложена къ концу A перпендикулярно къ палкѣ и въ горизонтальномъ направленіи, были бы въ состояніи сдвинуть палку съ мѣста.

Пусть: l длина палки, w вѣсъ единицы ея длины. Каждый элементъ палки производитъ давленіе $w \cdot dx$. Предѣльное треніе на элементъ равно $\mu \cdot w \cdot dx$. Если центръ перемѣщенія находится въ O, то тренія направлены по перпендикулярамъ, возставленнымъ къ палкѣ изъ ея элементовъ, и всѣ тренія должны уравновѣшиваться силою P, приложенною въ A.

Положимъ, что центръ перемѣщенія лежитъ въ сторонѣ отъ палки. Повернувъ всѣ тренія въ одну сторону на прямой уголъ, такъ чтобы всѣ они были направлены къ O, замѣтимъ, что всѣ они должны уравновѣшиваться силою P дѣйствующею параллельно палкѣ (P тоже повернута). Но это можетъ быть только въ томъ случаѣ, если O лежитъ на палкѣ. Итакъ центръ перемѣщенія O долженъ лежать на направленіи палки.

Фиг. 79.

Положимъ, слѣдовательно, что O лежитъ на AB и обозначимъ AO чрезъ x; тогда неповернутыя тренія въ элементахъ H и H' перпендикулярны къ AB и направлены какъ показано на чертежѣ (фиг. 79). Равнодѣйствующія этихъ треній приложены въ центрахъ тяжести отрѣзковъ AO и BO и равны:

$$\mu wx$$

$$\mu w (l - x).$$

Равновѣсіе силъ и равновѣсіе паръ дадутъ:

$$\mu wx - \mu w (l - x) = P$$

$$\mu wx^2 = \mu w (l^2 - x^2).$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ $x\sqrt{2} = l$. Первое даетъ:

$$P = \mu \cdot w \cdot (\sqrt{2} - 1).$$

ГЛАВА IV.

Начало возможныхъ перемѣщеній.

§ 229. Общее выраженіе начала возможныхъ перемѣщеній. Въ § 67 мы показали, въ чемъ состоитъ начало возможныхъ перемѣщеній для равновѣсія одной точки, затѣмъ въ § 127 мы примѣнили его, безъ оговорокъ, къ выводу общаго уравненія механики.

Начиная еще съ Лагранжа было дано много доказательствъ справедливости этого начала въ приложеніи его къ какимъ угодно системамъ,

но всѣ эти доказательства возбуждали возраженія. Этотъ недостатокъ чисто формальнаго характера, и даже частный случай общаго уравненія (начало сохраненія живой силы) служитъ краеугольнымъ камнемъ всей современной физики и признается одною изъ достовѣрнѣйшихъ истинъ, благодаря огромному числу фактовъ, ее подтверждающихъ и отсутствію фактовъ противорѣчащихъ, вслѣдствіе чего какъ начало возможныхъ перемѣщеній въ примѣненіи къ системѣ, такъ и выводимое изъ него общее уравненіе механики такъ же достовѣрны какъ основные законы Ньютона, выведенные тоже изъ наблюденія фактовъ.

Въ настоящей главѣ мы подробнѣе остановимся на началѣ возможныхъ перемѣщеній и примѣнимъ его къ равновѣсію неизмѣняемой системы, для которой оно можетъ быть доказано съ достаточною убѣдительностью.

Самымъ общимъ образомъ можно выразить начало возможныхъ перемѣщеній такъ:

Положимъ, что силы P_1, P_2... дѣйствуютъ на точки A_1, A_2... системы данныхъ тѣлъ. Нѣкоторыя изъ этихъ тѣлъ могутъ быть соединены связями и производятъ другъ на друга дѣйствія и противодѣйствія. Положимъ затѣмъ, что система весьма мало перемѣстилась, такъ что точки A_1, A_2... заняли сосѣднія положенія: A_1', A_2'... Пусть dp_1, dp_2... суть проекціи на направленіи силъ P_1, P_2... перемѣщеній $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$. Пусть $dU = P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 + \ldots$ Система находится въ равновѣсіи, если $dU = 0$ для всякихъ малыхъ перемѣщеній возможныхъ, то есть не противорѣчащихъ геометрическимъ условіямъ связей. Наоборотъ, система не находится въ равновѣсіи, если, для какого-нибудь возможнаго ея перемѣщенія, dU не равняется нулю.

Произведеніе Pdp есть работа силы P на пути того возможнаго перемѣщенія точки A, проекція котораго на P равна dp. Ее называютъ иногда *возможнымъ моментомъ* (moment virtuel) или возможною работою (travail virtuel).

§ 230. Приложеніе начала возможныхъ перемѣщеній къ теоріи рычага. Для поясненія дѣла приложимъ начало возможныхъ перемѣщеній къ простому и хорошо извѣстному изъ элементарной физики примѣру.

Фиг. 80.

Положимъ, что намъ данъ рычагъ, способный вращаться безъ тренія около оси O (фиг. 80). Въ точкахъ A и B приложены къ нему силы P и Q. Спрашивается, какое отношеніе должно существовать между плечами $OA = p$; и $OB = q$ для того, чтобы рычагъ находился въ равновѣсіи?

Рычагъ можетъ совершать большія перемѣщенія, вращаясь около оси O. Но для начала возможныхъ перемѣщеній важны только малыя перемѣщенія.

Возможныя малыя перемѣщенія для рычага заключаются въ томъ, что онъ можетъ повернуться на уголъ $d\varphi$ въ ту или другую сторону. Положимъ, что онъ отклонился на уголъ $d\varphi$ въ такую сторону, что точка A перемѣстилась кверху. Это перемѣщеніе точки A равно дугѣ $p \, . \, d\varphi$. Точка B перемѣстится при этомъ книзу на дугу $qd\varphi$. Если перемѣщеніе *книзу* считаемъ положительнымъ, то перемѣщеніе *кверху* приходится считать отрицательнымъ. Поэтому возможныя перемѣщенія точекъ приложенія силъ будутъ:

$$p \, . \, d\varphi \text{ для точки } A$$

$$- q \, . \, d\varphi \text{ для точки } B.$$

Работы на пути этихъ перемѣщеній будутъ:

$$P \, . \, pd\varphi = \text{работа силы } P$$

$$- Q \, . \, qd\varphi = \text{работа силы } Q.$$

Согласно началу возможныхъ перемѣщеній сумма этихъ возможныхъ работъ должна быть равна нулю. Слѣдовательно:

$$Ppd\varphi - Qqd\varphi = 0$$

или, по сокращеніи на $d\varphi$:

$$Pp = Qq \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (558)$$

Итакъ, мы вывели изъ начала возможныхъ перемѣщеній уравненіе (558), выражающее извѣстный законъ рычага, выражающій, что для равновѣсія рычага необходимо, чтобы статическіе моменты силъ были равны. Это уравненіе (558) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p} \quad \ldots \ldots \ldots (559)$$

силы обратно пропорціональны плечамъ рычага.

§ 231. Примѣненіе начала возможныхъ перемѣщеній въ практической механикѣ. Законъ рычага можно выразить слѣдующимъ образомъ. При перемѣщеніи рычага на уголъ $d\varphi$ одинъ конецъ его описываетъ большую, другой меньшую дугу: возможное перемѣщеніе одного конца больше чѣмъ другого. Для равновѣсія приложенныя къ этимъ концамъ силы должны быть обратно пропорціональны ихъ возможнымъ перемѣщеніямъ. Чѣмъ меньше возможное перемѣщеніе точки рычага, тѣмъ большую силу нужно къ ней приложить для равновѣсія.

Въ практической механикѣ начало возможныхъ перемѣщеній избавляетъ иногда отъ многихъ вычисленій. Практики выражаютъ его иногда въ такой формѣ: «проигрывая въ пространствѣ, выигрываемъ въ силѣ». Это выраженіе не отличается точностью. Выразимъ нѣсколько точнѣе на опредѣленномъ примѣрѣ, что хотятъ сказать этими словами.

Положимъ, что имѣемъ сколь угодно сложный механизмъ, состоящій изъ рычаговъ, зубчатыхъ колесъ и шкивовъ съ перекинутыми безконеч-

ными ремнями, только такой, что каждому положенію точки A механизма соотвѣтствуетъ свое, вполнѣ опредѣленное положеніе точки B. Положимъ, что, при прохожденіи точкою A весьма малаго пути Aa, точкв B проходитъ весьма малый путь Bb. На основаніи начала возможныхъ перемѣщеній силы P и Q, приложенныя въ точкахъ A и B механизма по направленію этихъ путей уравновѣшиваются, въ отсутствіи треній въ томъ случаѣ, если онѣ обратно пропорціональны длинамъ этихъ путей.

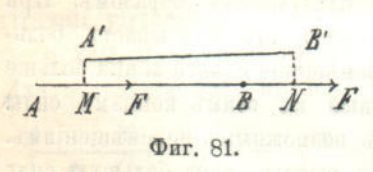
Это начало, какъ и принципъ сохраненія энергіи, убѣждаетъ насъ въ томъ, что *никакимъ механизмомъ нельзя создать энергіи изъ ничего: можно только разнообразить отношенія между силами и путями, проходимыми тѣми точками механизма, въ которыхъ эти силы приложены.*

§ 232. Доказательство начала возможныхъ перемѣщеній для свободнаго абсолютно-твердаго тѣла.

Теорема I. *Работа силъ, дѣйствующихъ на одну точку, равна работѣ равнодѣйствующей этихъ силъ.*

Если нѣсколько силъ дѣйствуютъ на одну точку A и заставляютъ ее перемѣститься въ A', то каждая изъ силъ производитъ работу. Работою всей совокупности силъ *называется* сумма работъ, произведенныхъ каждою изъ силъ. Работа произведенная одною силою P равна, согласно опредѣленію, произведенію перемѣщенія AA' на проекцію P по направленію AA'. Поэтому работа всѣхъ силъ равна произведенію AA' на проекцію всѣхъ силъ по направленію AA'. Слѣдовательно она равна произведенію AA' на проекцію равнодѣйствующей по направленію AA'. Итакъ: работа силъ, дѣйствующихъ на точку, равна работѣ ихъ равнодѣйствующей.

Теорема II. *Работа силы, дѣйствующей на абсолютно-твердое тѣло, не мѣняется, если точка приложенія силы переносится въ другую точку тѣла, лежащую на направленіи силы.* Положимъ (фиг. 81), что въ абсолютно-твердомъ тѣлѣ сила F переносится изъ точки приложенія А въ точку приложенія B того же тѣла, находящуюся на направленіи силы F. Пусть $A'B'$ есть второе положеніе прямой AB весьма близкое къ первому, принимаемое прямою AB подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ на тѣло. Опустимъ перпендикуляры $A'M$ и $B'N$ на AB. Работа силы F, согласно съ опредѣленіемъ этого понятія, равна $F\,.\,\overline{AM}$. Работа перенесенной силы F равна $F\,.\,\overline{BN}$. Такъ какъ $A'B'$ составляетъ съ AB безконечно малый уголъ, то можно принять косинусъ этого угла равнымъ единицѣ. Тогда:



Фиг. 81.

$$\overline{MN} = \overline{A'B'} = \overline{AB}.$$

Слѣдовательно:

$$\overline{BN} = \overline{AM}.$$

Поэтому:

$$F . AM = F . BN,$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Изъ этихъ двухъ теоремъ слѣдуетъ, что работа дѣйствующихъ силъ при данномъ перемѣщеніи не измѣняется отъ того, что будутъ приложены къ тѣлу еще равныя и противуположныя силы.

Теорема III. *Работа совокупности силъ, дѣйствующихъ на абсолютно-твердое тѣло, не измѣняется отъ того или другого приведенія этой совокупности силъ по правиламъ статики къ простѣйшимъ системамъ силъ и паръ.* Статическое приведеніе силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, изложенное въ §§ 90—104, все состоитъ изъ трехъ процессовъ: 1) сложенія и разложенія силъ; 2) перенесенія ихъ точекъ приложенія по ихъ направленіямъ и 3) присоединенія или отнятія силъ равныхъ и противуположныхъ.

Согласно доказаннымъ въ настоящемъ параграфѣ теоремамъ и слѣдствію ни одинъ изъ этихъ процессовъ не измѣняетъ работы совокупности дѣйствующихъ силъ. Слѣдовательно, эта работа не измѣняется отъ того или другого приведенія силъ.

Слѣдствіе. Поэтому: *работа данной совокупности силъ, дѣйствующихъ на абсолютно-твердое тѣло, равна суммѣ работъ равнодѣйствующей силы и равнодѣйствующей пары* (см. § 92).

Главная теорема. *Если совокупность силъ, дѣйствующихъ на абсолютно-твердое тѣло, находится въ равновѣсіи, то сумма* $P_1dp_1 + P_2dp_2 + \ldots$ *возможныхъ работъ равна нулю.* Если совокупность силъ находится въ равновѣсіи, то и равнодѣйствующая сила R равна нулю, и моментъ G равнодчйствующей пары равенъ нулю (см. §§ 92 и 105). Но въ такомъ случаѣ, согласно слѣдствію теоремы III-ей, работа $P_1dp_1 + P_2dp_2 + \ldots$ всей совокупности силъ равна нулю. Эту работу мы обозначили въ § 229 чрезъ dU. Итакъ, начало возможныхъ перемѣщеній *въ приложеніи къ свободному абсолютно-твердому тѣлу*, доказано: если тѣло находится въ равновѣсіи, то $dU = 0$.

Обратная теорема. *Если сумма возможныхъ работъ равна нулю для всякаго возможнаго перемѣщенія абсолютно твердаго тѣла, то тѣло находится въ равновѣсіи.* Если сумма возможныхъ работъ равна нулю, то; согласно сказанному въ настоящемъ параграфѣ, сумма работъ равнодѣйствующей силы R и равнодѣйствующей пары G равна нулю для всякаго возможнаго перемѣщенія. Докажемъ, что если эта работа равна нулю, то и самыя R и G равны, порознь, нулю.

Мы можемъ всегда, согласно § 98-му, сдѣлать приведеніе такъ, чтобы плоскость пары G была перпендикулярна къ силѣ R. Такъ какъ сумма работъ силы R и пары G равна нулю для всякаго перемѣщенія, то она равна нулю и для такого перемѣщенія, при которомъ тѣло, оставаясь параллельнымъ своему начальному положенію перемѣщается на путь δr

параллельно R. Но это перемѣщеніе перпендикулярно къ силамъ составляющимъ пару G. Слѣдовательно работа пары равна нулю. Если сумма работъ силы R и пары G равна нулю и работа пары G въ отдѣльности равна нулю, то и работа $R\delta r$ силы въ отдѣльности должна быть равна нулю при томъ, что δr не равно нулю. Слѣдовательно $R = 0$.

Такъ какъ сумма работъ силы R и пары G равна нулю для всякаго возможнаго перемѣщенія, то она равна нулю и для такого перемѣщенія, при которомъ тѣло повертывается на уголъ $d\omega$ около R въ сторону, указанную силами, составляющими пару. Если плечо пары AB, то перемѣщенія точекъ A и B приложенія ея силъ будутъ направлены по этимъ силамъ (безконечно малыя дуги) и равны, каждое порознь, $\frac{1}{2} AB \, . \, d\omega$. Работа же всей пары будетъ $AB \, . \, Q \, . \, d\omega = G \, . \, d\omega$. При сказанномъ перемѣщеніи тѣла точка приложенія силы R не перемѣщается; поэтому работа силы R равна нулю. Слѣдовательно, при указанномъ равенствѣ нулю суммы работъ силы R и пары G — работа пары G равна нулю, для $G \, . \, d\omega = 0$. Но $d\omega$ не равно нулю. Слѣдовательно $G = 0$.

Итакъ: $R = 0$; $G = 0$. Если же они порознь равны нулю, то тѣло находится въ равновѣсіи, что и требовалось доказать.

§ 233. Доказательство теоремы обратной началу возможныхъ перемѣщеній, для системы абсолютно-твердыхъ тѣлъ.

Теорема: *Система находится въ покоѣ; дано, что работа внѣшнихъ силъ равна нулю для всякихъ весьма малыхъ перемѣщеній системы изъ этого положенія, согласуемыхъ съ данными связями. Требуется доказать, что система находится въ равновѣсіи.*

Еслибы система не была въ равновѣсіи, то она пришла бы въ движеніе. Представимъ себѣ всякія возможныя совокупности путей всѣхъ точекъ системы. Изберемъ одну изъ такихъ совокупностей путей. Помощью гладкихъ кривыхъ можемъ поставить систему въ такія условія, что точки ея будутъ въ состояніи двигаться только по избранной совокупности путей. Такъ, напримѣръ, если какая-нибудь кривая представляетъ собою одинъ изъ путей избранной совокупности, по которому можетъ двигаться одна изъ точекъ системы, то, взявъ неподвижную абсолютно твердую и гладкую проволоку, имѣющую видъ этой кривой и надѣвъ на нее, очень тонкое кольцо, соединенное съ точкою движущейся по этой кривой, и сдѣлавъ то же самое съ другими точками системы, мы поставимъ систему въ такія условія, что ея точки могутъ свободно двигаться только по избранной совокупности путей. Противодѣйствія этихъ проволокъ равны дѣйствіямъ на нихъ движущихся по нимъ точекъ и противуположны этимъ дѣйствіямъ, а потому работа этихъ дѣйствій и противодѣйствій равна нулю и проволоки не вліяютъ на величину разсматриваемой возможной работы. Теперь уже достаточно одной силы F приложенной въ какой-нибудь точкѣ A системы для того, чтобы удержать систему отъ

перемѣщенія изъ положенія покоя. Эта сила F должна имѣть направленіе противуположное тому, по которому точка A двигалась бы, еслибы не было силы F. Теперь силы, приложенныя къ системѣ, уравновѣшиваются силою F. Если система двинется по единственно доступнымъ ей путямъ и точка A перемѣстится при этомъ въ A', то сумма работъ приложенныхъ къ системѣ силъ, плюсъ работа силы F, должна быть равна нулю. Но дано, что сумма работъ приложенныхъ къ системѣ силъ равна нулю. Ея работа равна $(-\overline{AA'} \,.\, F)$, а перемѣщеніе $\overline{AA'}$ произвольно. Слѣдовательно $F = 0$. Итакъ, не нужно никакой силы F для удержанія системы въ покоѣ. Слѣдовательно система находится въ равновѣсіи, что и требовалось доказать.

Замѣтимъ, что въ доказательствѣ этомъ мы предполагали, что всѣ силы, дѣйствующія на систему, приняты во вниманіе, то есть и тренія (если они предполагаются существующими), и реакціи связей. Можно не вводить въ уравненіе $dU = 0$ только такія силы, или совокупности силъ, работа которыхъ равна нулю, напримѣръ: давленіе на ось тѣла вращающагося около неподвижной оси,—потому что точка приложенія такой силы неподвижна, и потому работа силы равна нулю; натяженіе нерастяжимой нити, на концахъ которой прикрѣплены двѣ точки системы,—потому что совокупность работъ дѣйствія и противодѣйствія равна нулю.

§ 234. Начальное движеніе системы. Теорема: *Находившаяся въ покоѣ система начинаетъ движеніе, подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ ней силъ, всегда такъ, что работа силъ въ начальномъ перемѣщеніи положительна.* Справедливость этой теоремы видна изъ того, что въ приложеніи къ начинающемуся движенію уравненіе (396) живыхъ силъ принимаетъ видъ:

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} = T$$

величина же $\Sigma \frac{mr^2}{2}$, какъ сумма квадратовъ помноженныхъ на половины массъ, всегда положительна.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что для обезпеченія равновѣсія *достаточно*, чтобы сумма возможныхъ работъ для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній была не больше нуля; потому что, согласно только-что доказанному, только положительная сумма работъ существуетъ при выходѣ системы изъ покоя, какъ это видно изъ (183).

Работа силъ P равна работѣ ихъ проложеній, такъ что:

$$\Sigma Pdp = \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Поэтому начало возможныхъ перемѣщеній можетъ быть выражено формулою:

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zpz) \leqq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (560)$$

согласно съ 183.

Если движеніе возможно только въ одну сторону по связямъ, то достаточнымъ условіемъ равновѣсія будетъ:

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) < 0$$

если же движеніе возможно по связямъ въ обѣ стороны, то условіе равновѣсія будетъ:

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

На этомъ чаще встрѣчающемся условіи мы и остановимся.

§ 235. Координаты твердаго тѣла. Для опредѣленія положенія *неизмѣняемой* системы нѣтъ необходимости знать координаты всѣхъ ея точекъ: достаточно знать координаты x, y, z одной какой-нибудь точки системы, два угла, составляомые съ осями x и y какою-либо данною прямою системы и уголъ, составляемый какою нибудь данною неподвижною плоскостью съ данною плоскостью системы, проходящею чрезъ упомянутую прямую. Итого, нужно знать 6 координатъ: x, y, z, два угла прямой и уголъ между плоскостями.

Эти 6 величинъ, или другія какія-либо 6 величинъ, опредѣляющія положеніе *неизмѣняемой* системы, называются ея координатами.

Если система состоитъ изъ нѣсколькихъ точекъ или нѣсколькихъ тѣлъ, то тѣ величины, которыми опредѣляется положеніе системы, называются *ея координатами.*

§ 236. Независимыя координаты. Если положеніе системы опредѣляется декартовыми координатами всѣхъ ея точекъ, и если свобода движеній ея ограничена связями, то связи эти выражаются уравненіями, дающими зависимость между нѣкоторыми изъ этихъ координатъ.

Положимъ, что система содержитъ n точекъ и дано k связей. Для каждой точки существуютъ 3 декартовы координаты x, y, z. Слѣдовательно для всей системы существуетъ $3n$ координатъ. Изъ нихъ k координатъ могутъ быть исключены при помощи k уравненій связей и остается $(3n-k)$ координатъ, которыя уже будутъ независимы другъ отъ друга.

Эти $(3n-k)$ независимыя другъ отъ друга координаты, или $(3n-k)$ величинъ, ихъ замѣняющихъ, называются *независимыми координатами системы* при данныхъ связяхъ.

Примѣръ. Точка движется на сферѣ. Положеніе точки опредѣляется 3-мя декартовыми координатами (x, y, z). Но при данной связи (сфера) вполнѣ достаточно, для опредѣленія положенія точки на сферѣ, 2-хъ географическихъ координатъ: долготы λ и широты φ.

Примѣръ 2-й. Точка движется по прямой

$$Ax + By + Cz = D$$
$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

Положеніе точки опредѣляется 3-мя декартовыми координатами (x, y, z). Но при движеніи по этой прямой, для опредѣленія положенія точки,

достаточно знать одну координату. А именно: изъ уравненій данной прямой опредѣляемъ

$$x = \frac{B_1(D - Cz) - B(D_1 - C_1 z)}{AB_1 - A_1 B}$$

$$y = \frac{A(D' - C_1 z) - A'(D - Cz)}{AB_1 - A_1 B}$$

Теперь ясно, что для опредѣленія положенія точки на прямой достаточно знать z, по которому сейчасъ же опредѣлятся x и y по выведеннымъ формуламъ.

Примѣръ 3. Прямая AB имѣетъ неподвижную точку въ началѣ координатъ и можетъ вращаться около этой точки, оставаясь постоянно въ плоскости (x, y).

Хотя каждая точка прямой опредѣляется 3-мя декартовыми координатами. Но положеніе прямой вполнѣ опредѣляется угломъ φ, образуемымъ ею съ осью x. Уголъ φ и будетъ независимою координатою прямой, подчиненной такимъ условіямъ.

§ 237. Степени свободы системы. Число независимыхъ координатъ, которыми опредѣляется положеніе системы, называется *степенью свободы* этой системы при данныхъ связяхъ. Такимъ образомъ:

Степень свободы свободной точки $= 3$;

Степень свободы точки, не покидающей данной поверхности $= 2$.

Степень свободы свободнаго абсолютно твердаго тѣла $= 6$;

Степень свободы абсолютно твердаго тѣла имѣющаго 1 неподвижную точку $= 3$;

Степень свободы абсолютно твердаго тѣла вращающагося около неподвижной оси $= 1$,

и такъ далѣе.

§ 238. Максимумъ и минимумъ силовой функціи. Если элементарная работа $\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ представляетъ собою *полный дифференціалъ* какой-нибудь функціи U, такъ что:

$$\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = dU,$$

то, согласно § 133, эта функція U называется силовою функціею.

Согласно началу возможныхъ перемѣщеній, при равновѣсіи системы:

$$dU = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (561)$$

По правиламъ же дифференціальнаго исчисленія (561) представляетъ собою уравненіе, изъ котораго опредѣляются максимальныя или минимальныя значенія для U, или такія значенія координатъ, для которыхъ (и въ ихъ сосѣдствѣ) $U = const.$

Итакъ: если дана силовая функція U, то, для опредѣленія положенія равновѣсія системы, опредѣляемъ ея координаты такъ, чтобы U было максимумъ или минимумъ.

Въ положеніи равновѣсія системы силовая функція U достигаетъ своей максимальной или минимальной величины, или $U = const$ въ положеніяхъ системы сосѣднихъ съ ея положеніемъ равновѣсія.

§ 239. Устойчивость равновѣсія системы. Теоремы Дирикле. Разсмотримъ послѣдовательно 3 случая.

1) *U имѣетъ максимальную величину*, то есть U уменьшается при всякомъ возможномъ перемѣщеніи въ сосѣднее положеніе.

Помѣстимъ систему въ одно изъ такихъ сосѣднихъ положеній и предоставимъ ей двигаться, выходя изъ покоя подъ вліяніемъ данныхъ силъ. Согласно § 234 онъ начнетъ двигаться такъ, что элементарная работа dU будетъ положительна. Но, когда dU положителенъ, то U возрастаетъ. Поэтому система будетъ приближаться къ положенію равновѣсія, въ которомъ U *maximum*. Итакъ, въ этомъ случаѣ, положеніе равновѣсія *устойчивое*.

2) *U имѣетъ минимальную величину*, то есть U увеличивается при всякомъ возможномъ перемѣщеніи въ сосѣднее положеніе.

Помѣстимъ систему въ одно изъ такихъ сосѣднихъ положеній и предоставимъ ей двигаться, выходя изъ покоя, подъ вліяніемъ данныхъ силъ. Согласно § 234 она начнетъ двигаться такъ, что dU будетъ положительно. Но когда dU положителенъ, то U возрастаетъ. Поэтому система еще болѣе будетъ *удаляться* отъ положенія равновѣсія, въ которомъ U *minimum*. Итакъ, въ этомъ случаѣ, положеніе равновѣсія *неустойчивое*.

3) $U = const$ для всѣхъ перемѣщеній системы изъ положенія равновѣсія въ сосѣднія положенія. Въ этомъ случаѣ равновѣсіе *безразличное*.

§ 240. Высота центра тяжести, соотвѣтствующая равновѣсію. Положимъ, что на систему дѣйствуетъ только одна внѣшняя сила—тяжесть.

Пусть $z_1, z_2 \ldots$ суть высоты точекъ системы надъ горизонтальною плоскостью (x, y).

$m_1, m_2 \ldots$ массы этихъ точекъ.

$\bar{z}$ высота центра тяжести системы.

Согласно (242) имѣемъ:

$$\bar{z}\Sigma m = \Sigma mz$$

$$dU = -\Sigma mg\, dz = -g\Sigma m dz$$

$$U = -\bar{z}g \,.\, \Sigma m + C.$$

Слѣдовательно

U *maximum* при $\bar{z}$ *minimum*, устойчивое равновѣсіе;

U *minimum* при $\bar{z}$ *maximum*, неустойчивое равновѣсіе;

Итакъ: *Если система находится подъ вліяніемъ только тяжести и тѣхъ реакцій, которыя не входятъ въ уравненіе, выражающее начало возможныхъ перемѣщеній, то возможныя положенія равновѣсія соотвѣт-*

ствуютъ максимальной или минимальной высотѣ центра тяжести или такому его положенію, по выходѣ изъ котораго его высота не мѣняется. Равновѣсіе будетъ устойчивое при минимальной высотѣ центра тяжести и неустойчивое при максимальной его высотѣ. Максимумъ и минимумъ находится по правиламъ дифференціальнаго исчисленія.

Примѣръ 1. Физическій маятникъ находится въ *устойчивомъ* положеніи равновѣсія, если его центръ тяжести лежитъ *подъ* осью, на проходящей чрезъ нее вертикали.

Онъ находится въ *неустойчивомъ* положеніи равновѣсія, если его центръ тяжести лежитъ *надъ* осью, на проходящей чрезъ ось вертикали.

Онъ находится въ *безразличномъ* положеніи равновѣсія, если ось проходитъ чрезъ центръ тяжести.

Примѣръ 2. *Однородная балка (фиг. 82) упирается безъ тренія, въ вертикальную стѣну и опирается, тоже безъ тренія, о горизонтальную круглую балку C. Найти ея положенія равновѣсія.* Пусть:

$AB = 2a$

Разстояніе C отъ стѣны $= b$.

Уголъ наклоненія балки къ стѣнѣ $= \theta$.

(x, y) горизонтальная плоскость, проходящая чрезъ C.

z высота центра тяжести.

Имѣемъ:

$$z = a \cdot \cos\theta - \frac{b}{tg\,\theta}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = -a \cdot \sin\theta + \frac{b}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = -a \cdot \cos\theta - \frac{2b\cos\theta}{\sin^3\theta}.$$

Фиг. 82.

Полагая $\frac{dy}{d\theta} = o$ найдемъ, что въ положеніи равновѣсія

$$\sin^3\theta = \frac{b}{a}.$$

Такъ какъ $\frac{d^2z}{d\theta^2}$ отрицательна, то въ положеніи равновѣсія z достигаетъ *maximum*'а и равновѣсіе *неустойчивое*.

§ 241. Неопредѣленныя задачи. Тяжелое твердое тѣло находится въ равновѣсіи, если опирается о горизонтальную плоскость *тремя* нележащими на одной прямой точками, и можно вычислить давленіе, производимыя тѣломъ въ каждой точкѣ опоры. Но если тѣло опирается на горизонтальную плоскость болѣе чѣмъ тремя точками, нележащими на одной прямой, то вычисленіе давленій въ точкахъ опоры является (если не вводить особыхъ предположеній) задачею неопредѣленною. Разсмотримъ этотъ вопросъ нѣсколько подробнѣе.

Пусть:

A_1, A_2... суть точки, которыми тяжелое тѣло опирается на неподвижную горизонтальную плоскость (x, y).

G проекція центра тяжести тѣла на эту плоскость.

W вѣсъ тѣла.

R_1, R_2... давленія въ точкахъ опоры.

(x, y) координаты точки G.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$... координаты точекъ A_1, A_2...

При дѣйствіи параллельныхъ силъ тяжести имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} W &= R_1 + R_2 + \ldots \\ Wx &= R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3 + \ldots \\ Wy &= R_1y_1 + R_2y_2 + R_3y_3 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (562)$$

Изъ этихъ уравненій можно опредѣлить давленія R только въ томъ случаѣ, если имѣется только три точки опоры, нележащія въ одной вертикальной плоскости. Если же имѣется болѣе трехъ точекъ опоры, то задача оказывается неопредѣленною.

§ 242. Введеніе новыхъ условій, обращающихъ неопредѣленную статическую задачу въ опредѣленную. На самомъ дѣлѣ тяжелое твердое тѣло, опирающееся на нѣсколько точекъ опоры, производитъ въ каждой изъ нихъ вполнѣ опредѣленное давленіе. Слѣдовательно упомянутая неопредѣленность оказывается только кажущеюся, происходящею отъ того, что мы не приняли во вниманіе всѣхъ существующихъ въ дѣйствительности условій.

Мы сейчасъ увидимъ на примѣрѣ, что принимая во вниманіе гибкость матеріала, законы которой изслѣдуются въ теоріи упругости, можно рѣшать такія задачи, которыя для абсолютно твердаго тѣла были бы неопредѣленными.

Примѣръ. Столъ, доска котораго несжимаема и имѣетъ видъ прямоугольника и ножки, помѣщающіяся въ углахъ этого прямоугольника, равны между собою и *нѣсколько сжимаемы* пропорціонально давленіямъ—стоитъ на горизонтальномъ полу. Предполагая, что полъ и доска стола абсолютно тверды, найти давленія въ точкахъ опоры при данной нагрузкѣ стола.

Пусть:

G точка приложенія силы тяжести.

(x, y) координаты точки G.

AB ось x

AD ось y

$AB = a$; $AD = b$.

Уравненія (562) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} W &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \\ Wx &= (R_2 + R_3)\, a \\ Wy &= (R_2 + R_4)\, b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (563)$$

Но сжимаемость ножекъ дастъ еще уравненіе. А именно: діагональ AC стола, вслѣдствіе абсолютной твердости доски, остается прямою. Слѣдовательно пониженіе центра стола равно средней ариѳметической пониженій точекъ A и C. То же можно сказать относительно другой діагонали. Слѣдовательно средняя ариѳметическая давленій въ B и D равна средней ариѳметической давленій въ A и C. Получимъ поэтому еще уравненіе

$$R_1 + R_3 = R_2 + R_4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (564)$$

Четыре уравненія опредѣляютъ четыре давленія. Изъ этихъ уравненій, при $R_3 = o$; получимъ уравненіе

$$\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} = 1$$

показывающее, что давленіе существуетъ только въ точкахъ A, B, D если G лежитъ на прямой, соединяющей средины сторонъ AB и AD.

Соединяя послѣдовательно пунктирными прямыми средины сторонъ прямоугольника, получимъ ромбъ. Если G лежитъ внутри этого ромба, то столъ давитъ всѣми 4-мя ножками. Если G лежитъ внѣ этого ромба, то столъ давитъ только тремя ножками.

§ 243. **Шарнирныя фермы.** Система, состоящая изъ n точекъ, связанныхъ между собою твердыми стержнями, называется *фермою*. Для приложенія къ такой фермѣ начала возможныхъ перемѣщеній мы должны представить вершины ея перемѣщаемыми. При этомъ можетъ представиться нѣсколько случаевъ.

1) Если ферма устроена такъ, что углы между стержнями могутъ быть измѣняемы на конечную величину безъ измѣненія длины стержней, то такую деформацію фермы называютъ *нормальною*.

2) Ферма можетъ состоять изъ стержней, взятыхъ въ числѣ и порядкѣ достаточномъ для того, чтобы углы не могли быть измѣняемы на конечную величину, а были бы измѣняемы только безконечно мало безъ измѣненія длины стержней. Деформація такой фермы называется *ненормальною*.

3) Ферма, имѣющая ровно только такое число стержней, которое достаточно для удержанія угловъ отъ конечныхъ измѣненій, называется *простою* или *свободно расширяемою*, такъ какъ конечное измѣненіе длины ея стержней не влечетъ за собою ея поломки.

4) Если число стержней фермы болѣе чѣмъ достаточно для удержанія ея угловъ отъ конечныхъ измѣненій, такъ что конечное измѣненіе длины нѣкоторыхъ стержней влечетъ за собою поломку фермы, то она называется *нерасширяемою*.

Общій способъ изслѣдованія равновѣсія фермы заключается въ слѣдующемъ. Избираемъ нѣсколько изъ ея стержней, удаляемъ ихъ мысленно и замѣняемъ дѣйствіе ихъ силами. Вслѣдствіе этого ферма дѣлается *нормально деформируемою*. Прилагаемъ начало возможныхъ перемѣщеній, не

принимая во вниманіе реакцій остальныхъ стержней, такъ какъ онѣ попарно уничтожаются.

Примѣръ. *Ферма, состоящая изъ какого угодно числа стержней, находится подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ ея вершинамъ. Найти условіе ея равновѣсія.* Пусть:

R реакція стержня, считаемая положительною при его сжатіи,

r длина стержня,

Z, Y, Z проложенія силы, дѣйствующей на вершину (x, y, z).

Удалимъ мысленно всѣ стержни и замѣнимъ ихъ соотвѣтствующими реакціями, приложенными къ вершинамъ. Начало возможныхъ перемѣщеній дастъ:

$$\Sigma R dr + \Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (565)$$

Если при деформаціи получается ферма подобная данной фермѣ, то:

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Подставляя въ (565), получимъ:

$$\Sigma Rr + \Sigma (Xx + Yy + Zz) = 0$$

гдѣ Σ распространяется на всѣ вершины и стержни.

§ 244. Реакція стержня простой фермы, на который не дѣйствуютъ внѣшнія силы. Положимъ, что R_{12} есть реакція, противъ сжатія, стержня A_1A_2, длина его l_{12} и на него не дѣйствуютъ внѣшнія силы (вѣсомъ его можно пренебречь). Замѣнимъ стержень A_1A_2 двумя силами, приложенными къ вершинамъ, съ которыми совпапали его концы; каждая изъ этихъ силъ равна R_{12}. Сдѣлаемъ неподвижною сторону A_1A_n. Деформируемъ ферму, и пусть работа внѣшнихъ силъ $= dW$. Такъ какъ остальныя реакціи даютъ работу равную нулю, то начало возможныхъ перемѣщеній дастъ:

$$R_{12}\, dl_{22} + dW = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (566)$$

отсюда:

$$R_{12} = -\frac{dW}{dl_{12}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (567)$$

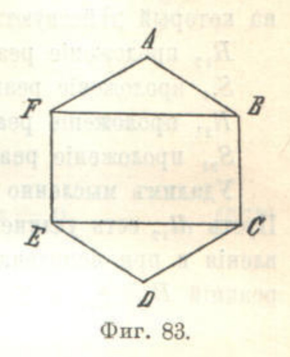
Мы видимъ, что не надо было даже мысленно удалять стержень A_1A_2 достаточно было увеличить длину его на dl_{12}, для того, чтобы получить уравненіе (566) опредѣляющее реакцію R_{12}.

Итакъ: *для того чтобы опредѣлить реакцію такого стержня простой фермы, на который не дѣйствуютъ внѣшнія силы, составляется уравненіе (566), согласно началу возможныхъ перемѣщеній, причемъ dW обозначаетъ работу внѣшнихъ силъ при удлиненіи только этого стержня.*

Если въ системѣ нѣсколько такихъ стержней, то реакція каждаго изъ нихъ опредѣляется по этому способу отдѣльно и для каждаго стержня

можетъ получиться особая величина dW. Сущность этого способа заключается въ томъ, что оказывается возможнымъ разбить задачу на рядъ болѣе простыхъ задачъ, разсматривая каждый разъ только тѣ перемѣщенія, которыя происходятъ отъ измѣненія длины *одного только* стержня.

Примѣръ. *Шесть стержней образуютъ правильный многоугольникъ ABCDEF (фиг. 83), который подвѣшенъ за вершину A. Для того чтобы онъ не деформировался, въ него включены еще весьма легкіе стержни BF и CE. Доказать, что реакціи стержней BF и CE относятся между собою какъ 5 : 1.*



Фиг. 83.

Способъ, изложенный въ настоящемъ параграфѣ, можетъ быть приложенъ къ этой задачѣ, такъ какъ, согласно условію, вѣсомъ стержней BF и CE можно пренебречь.

Найдемъ сначала реакцію T стержня BF. Разсмотримъ для этого перемѣщенія, происходящія при весьма маломъ удлиненіи стержня BF. Пусть $2a$ есть длина стороны даннаго шестиугольника, θ уголъ составляемый стороною AB (или стороною AF) съ вертикалью. Каждая изъ вершинъ B и F отстоитъ отъ вертикали въ направленіи стержня BF на $2a \sin\theta$.

Слѣдовательно работа реакціи T будетъ

$$Td\,(4a\,.\,\sin\theta).$$

Работа вѣсовъ верхнихъ звеньевъ AF и AB, если вѣсъ каждой стороны шестиугольника обозначимъ чрезъ P, будетъ:

$$2Pd\,(a\ \cos\theta).$$

Работа вѣсовъ остальныхъ четырехъ сторонъ будетъ:

$$4Pd\,(2a\cos\theta).$$

Слѣдовательно начало возможныхъ перемѣщеній дастъ:

$$T\,.\,d\,(4a\,.\,\sin\theta) + 2P\,.\,d\,(a\,.\,\cos\theta) + 4P\,.\,d\,(2a\,.\,\cos\theta) = 0$$

или

$$4a\,T\cos\theta - 2a\quad P\sin\theta - 8a\quad P\sin\theta = 0.$$

Отсюда:

$$2T = 5P\,.\,tg\,\theta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(568)$$

Найдемъ теперь реакцію стержня CE. При измѣненіи его длины вѣсъ верхнихъ четырехъ стержней не производитъ работы; но центры тяжести двухъ нижнихъ стержней перемѣщаются и работа тяжести равна

$$2Pd\,(a\,.\,\cos\theta).$$

Поэтому для CE начало возможныхъ перемѣщеній даетъ:

$$Td\,(4\,.\,\sin\theta) + 2Pd\,(a\,.\,\cos\theta) = o$$

откуда

$$2T' = P \cdot tg\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (569)$$

Сравнивая (568) съ (569) получимъ:

$$T = 5T'.$$

§ 245. Реакція такого стержня простой фермы, на который дѣйствуютъ внѣшнія силы. Пусть A_1A_2 есть такой стержень простой плоской фермы, на который дѣйствуютъ внѣшнія силы:

R_{12} проложеніе реакціи въ A_1 на направленіе A_2A_1,

S_{12} проложеніе реакціи въ A_1 ня перпендикуляръ къ A_1A_2,

R_{21} проложеніе реакціи въ A_2 на направленіе A_1A_2,

S_{21} проложеніе реакціи въ A_2 на перпендикуляръ къ A_2A_1.

Удалимъ мысленно стержень A_1A_2 и замѣнимъ его этими реакціями. Пусть dl_{12} есть удлиненіе стержня A_1A_2 при неизмѣнности его направленія и при неподвижности вершины A_2. При этихъ условіяхъ работа реакцій R_{21}, S_{21} и S_{12} равна нулю. Получимъ:

$$R_{12}dl_{22} + dW = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (570)$$

для нахожденія R_{12}.

Для нахожденія S_{12} дадимъ другое перемѣщеніе фермѣ. По удаленіи внѣшнихъ силъ дѣйствующихъ на A_1A_2 остальныя внѣшнія силы уже не въ равновѣсіи; ихъ возможная работа можетъ и не равняться нулю. Сдѣлаемъ A_2 неподвижною, l_{12} неизмѣняемымъ и повернемъ ферму около оси перпендикулярной къ плоскости проходящей чрезъ A_2 и S_{12} на уголъ $d\theta$. Получимъ:

$$S_{12}\, d\theta + dW = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (571)$$

гдѣ W имѣетъ не то значеніе, какъ въ (570).

Изъ (571) опредѣлимъ S_{12}.

Итакъ: *реакціи R_{12} и S_{12} могутъ быть найдены, если длину стержня A_1A_2 можно измѣнить, не сжимая фермы.*

Если ферма не плоская, то вмѣсто S_{12} изслѣдуютъ два ея проложенія: производимъ послѣдовательно три перемѣщенія (какія признаемъ болѣе удобными изъ числа возможныхъ) и получаемъ три уравненія для опредѣленія R_{12} и двухъ проложеній реакціи S_{12}.

Примѣръ: *шесть равныхъ тяжелыхъ стержней образуютъ правильный тетраэдръ, подвѣшенный ниткою за средину L стороны AB. Найти реакціи при его вершинахъ* (фиг. 84).

Вслѣдствіе симметріи тетраэдра его верхнее ребро AB и нижнее CD будутъ горизонтальны; прямая LM, соединяющая средины сторонъ AB и CD, будетъ вертикальна. Пусть:

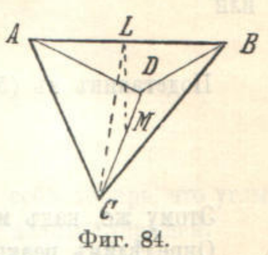
$LM = z$,

P и P' сжимающія давленія въ ребрахъ AB и CD,

w вѣсъ каждаго стержня.

Не измѣняя направленія AB и положенія его средины L, увеличимъ его длину на dr. Въ этомъ перемѣщеніи поперечныя реакціи S не производятъ работы, центръ тяжести стержня CD поднимется на dz, центры тяжести четырехъ боковыхъ стержней поднимутся на $\frac{1}{2}\,dz$. Начало возможныхъ перемѣщеній дастъ:

$$Pdr + w\,.\,dz + 4w\,.\,\frac{1}{2}\,dz = 0\,.\quad(572)$$



Фиг. 84.

Не измѣняя направленія стержня CD и положенія его средины M, увеличимъ его длину на dr. Все остальное понизится, вслѣдствіе чего и нитка, за которую тетраэдръ подвѣшенъ, удлинится. Пусть T натяженіе нитки. Получимъ:

$$P'dr - w\,.\,dz - 4w\,.\,\frac{1}{2}\,dz + Tdz = 0\,.\,.\,.\,.\,.\,(573)$$

Натяженіе T нити равно вѣсу всего тетраэдра, такъ что

$$T = 6w.$$

Поэтому (572) и (573) даютъ: $P = P'$. Изъ (572) имѣемъ:

$$P\frac{dr}{dz} = -3w.$$

Для опредѣленія P нужно еще опредѣлить $\frac{dr}{dz}$.

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BLC и LCM имѣемъ:

$$\overline{BC}^2 - \overline{BL}^2 = \overline{CL}^2 = \overline{CM}^2 + z^2$$

или

$$BC^2 - BL^2 = CM^2 + z^2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(574)$$

При полученіи уравненія (572) стержни BC и CM не измѣнялись, поэтому дифференцируя (574), получимъ:

$$-BL\,.\,d\,(BL) = zdz\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(575)$$

BL въ первомъ перемѣщеніи измѣнилось на $\frac{1}{2}\,dr$. Поэтому (575) принимаетъ видъ:

$$-\frac{r}{2}\,.\,\frac{1}{2}\,dr = zdz\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(576)$$

Но (574) дастъ:

$$r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{4} + z^2,$$

откуда:

$$r^2 = 2z^2$$

или

$$r = z\sqrt{2}.$$

Подставляя въ 576, получимъ:

$$-\frac{z\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\, dr = zdz$$

или

$$dr = 2\sqrt{2}\, dz.$$

Подставивъ въ (572) найдемъ

$$P = \frac{3}{4} w \sqrt{2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (577)$$

Этому же, какъ мы видѣли, равно P'.

Опредѣлимъ реакціи другихъ (боковыхъ) стержней. Разсматривая статическіе моменты какого-нибудь изъ этихъ стержней относительно вертикали, проходящей чрезъ одинъ изъ его концовъ, можно было бы доказать, что реакція, приложенная къ другому его концу, лежитъ въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ этотъ стержень. Эту реакцію можно, слѣдовательно, разложить на реакцію Z по вертикали и реакцію Q по стержню для точекъ A и B. Точно также получимъ реакцію Z' по вертикали и Q' по наклонному стержню для точекъ C и D. Реакціи Q и Q' считаемъ положительными, когда онѣ сжимаютъ стержень. Реакціи Z и Z' считаемъ положительными, когда онѣ направлены вверхъ. Удлиннимъ каждый изъ наклонныхъ стержней на $d\rho$ оставляя стержень AB неподвижнымъ. Для равновѣсія стержня CD получимъ:

$$4Q'\, d\rho + 4Z'\, dz + wdz = 0$$

BC измѣнилось на $d\rho$ когда BL и CM остались безъ измѣненія.

Поэтому изъ (574) получимъ:

$$BC \,.\, d\,(BC) = zdz$$

откуда

$$dz = \sqrt{2}\, d\rho$$

$$2\sqrt{2}\, Q' + 4Z' + w = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (578)$$

Равновѣсіе силъ при C дастъ:

$$-P' = 2Q' \cos 60° \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (579)$$

Но, согласно (577) и $P' = P$, имѣемъ $P' = \frac{3}{4} w \sqrt{2}$. Слѣдовательно согласно (579):

$$Q' = -\frac{3}{4} w \sqrt{2}\,.$$

Поэтому, согласно (578):

$$Z' = \frac{1}{2}\, w.$$

Оставимъ неподвижнымъ звено CD и удлиннимъ каждое боковое звено

на $d\rho$. Получимъ:

$$-4Zdz + 4Qd\rho - w\,.\,dz + Tdz = 0$$

$$-P = 2Q\,.\,\cos 60^\circ = Q$$

$$Q = -\frac{3}{4}w\sqrt{2}$$

$$Z = \frac{1}{3}w.$$

§ 246. Ненормальная деформація. Представимъ себѣ теперь, что углы могутъ быть нѣсколько измѣняемы безъ измѣненія длины стержней.

Если бы приложили къ этому случаю *ненормальной деформаціи* способъ, объясненный въ предыдущихъ параграфахъ, то получилось бы уравненіе

$$R_{12}\,dl_{12} + dW = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (580)$$

подобное уравненію (570). Но, при $dl_{12} = 0$, или dW должно быть равнымъ нулю для удовлетворенія (580), тогда изъ (580) нельзя опредѣлить R_{12}. Или R_{12} должно быть безконечностью, чего мы не предполагаемъ.

Поэтому, въ случаѣ такой ненормальной деформаціи, мы должны удлиннить или мысленно отнять не одинъ, а, по крайней мѣрѣ, два стержня, и получимъ:

$$R_{12}\,dl_{12} + R_{23}\,dl_{23} + dW = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (581)$$

Но это уравненіе не опредѣляетъ реакцій R_{12} и R_{23}: изъ него можно опредѣлить одну реакцію только тогда, когда дана другая реакція. Реакціи оказываются неопредѣленными.

Въ этомъ случаѣ лучше предварительно разсматривать реакціи отдѣльно отъ внѣшнихъ силъ и поступать слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что двѣ совершенно одинаковыя совокупности внѣшнихъ силъ могутъ произвести, дѣйствуя каждая отдѣльно, два различныя распредѣленія внутреннихъ реакцій. Заставивъ всѣ внѣшнія силы одной совокупности дѣйствовать въ обратныя стороны и одновременно допустивъ дѣйствовать другую совокупность внѣшнихъ силъ въ прежнихъ направленіяхъ, получимъ ферму въ состояніи внутренняго напряженія (self-strained state) безъ внѣшнихъ силъ. Если окажется возможнымъ опредѣлить реакціи фермы въ этомъ ея состояніи, то присовокупляя къ нимъ заданную совокупность силъ, рѣшимъ задачу окончательно.

Этотъ способъ лучше всего выясняется на доказательствѣ теоремы слѣдующаго параграфа.

§ 247. Теорема Леви. Теорема: *Дана плоская ферма, имѣющая четное число n вершинъ, n стержней, соединяющихъ послѣдовательно эти верщины и $\frac{1}{2}$ n нитей, служащихъ діагоналями соединяющими противуположныя вершины. Такая ферма можетъ находиться въ равновѣсіи въ со-*

стояніи внутренняго напряженія, если $\frac{1}{2}$ n точекъ пересѣченія противуположныхъ сторонъ лежитъ на одной прямой (фиг. 85).

Нити находятся въ состояніи натяженія. Положимъ, что стержни находятся въ состояніи сжатія. Докажемъ теорему для шестиугольника, но доказательство можно распространить на всякій многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ.

Фиг. 86.

Если реакціи $R_{12}\ldots$ находятся въ равновѣсіи, то, разсматривая точку A_2, видимъ, что R_{12} и R_{32} уравновѣшиваются реакціею R_{25} и потому эквивалентны реакціямъ R_{54} и R_{56}, приложеннымъ въ A_5 и уравновѣшивающимся тою же R_{25}. Итакъ, R_{12} и R_{32} уравновѣшиваются реакціями R_{54} и R_{56}, или, что тоже самое, R_{12} и R_{45} уравновѣшиваются реакціями R_{23} и R_{56}. Точно такъ же могли бы доказать, что R_{12} и R_{45} уравновѣшиваются реакціями R_{34} и R_{61}. Итакъ имѣемъ эквивалентныя совокупности попарно взятыхъ реакцій:

R_{12} и R_{45}, равнодѣйствующая которыхъ приложена, положимъ, въ L.
R_{23} и R_{56}, » » » » » M,
R_{34} и R_{61}, » » » » » N.

По доказанному эти равнодѣйствующія попарно эквивалентны *). Но это можетъ быть только въ томъ случаѣ, если L, M, N лежатъ на одной прямой; по построенію же: L, M, N суть точки пересѣченія противуположныхъ сторонъ шестиугольника. Итакъ эти точки пересѣченія должны, для равновѣсія, лежать на одной прямой.

Обратная теорема. Положимъ, что точки пересѣченія L, M, N противуположныхъ сторонъ многоугольника лежатъ на одной прямой. Приложимъ къ L и M по произвольной силѣ F въ противоположномъ направленіи одна къ другой.

Пусть проложенія этихъ силъ F на стороны, пересѣкающіяся въ L и M, будутъ (R_{12}, R_{45}) и (R_{32}, R_{65}). Эти силы будутъ находиться въ равновѣсіи. Слѣдовательно R_{12} и R_{32} дѣйствующія въ A_2 находятся въ равновѣсіи съ R_{45} и R_{65} дѣйствующими въ A_5. Поэтому равнодѣйствующая двухъ силъ, приложенныхъ въ A_2 должна быть направлена по A_2A_5, равнодѣйствующая двухъ силъ, приложенныхъ въ A_5, должна быть направлена по A_5A_2, и эти равнодѣйствующія должны быть взаимно равны. Точно также поступаемъ съ другими діагоналями и доказываемъ этимъ самымъ равновѣсіе всѣхъ реакцій.

---

*) Само собою разумѣется, что если равнодѣйствующая въ L, для уравновѣшиванія равнодѣйствующей въ M, дѣйствуетъ въ одну сторону, то, для равновѣсія съ равнодѣйствующею въ N, она должна дѣйствовать въ противуположную сторону, если L лежитъ между M и N.

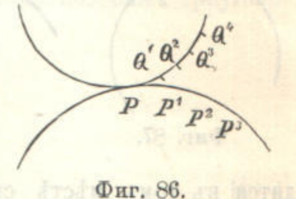
Изъ этого построенія (именно изъ разложенія силы F) можно найти и отношеніе каждой реакціи къ произвольной силѣ F.

Слѣдствіемъ теоремы Леви является слѣдующее.

Теорема Крофтона. *Шестиугольная плоская ферма, стороны которой суть стержни, а діагонали соединяющія противуположныя вершины суть нити, находится въ равновѣсіи подъ вліяніемъ внутреннихъ напряженій если около шестиугольника можно описать коническое сѣченіе.* По теоремѣ Леви такая ферма находится въ равновѣсіи подъ вліяніемъ внутреннихъ напряженій, если точки L, M, N пересѣченія лежатъ на одной прямой. Но, по знаменитой теоремѣ Паскаля, эти точки лежатъ на одной прямой только въ томъ случаѣ, если около многоугольника можно описать коническое сѣченіе. Такимъ образомъ теорема Крофтона доказана.

§ 248. Полодіи. Мы видѣли въ § 226-мъ, что всякое перемѣщеніе плоской фигуры изъ одного положенія въ другое можетъ быть произведено вращеніемъ около центра перемѣщенія, согласно теоремѣ Шаля.

Положимъ, что фигура движется по плоскости. Въ теченіи безконечно-малаго времени dt она перемѣщается изъ одного положенія въ другое безконечно-близкое положеніе, вращаясь, согласно теоремѣ Шаля, около нѣкотораго центра перемѣщенія на безконечно малый уголъ $d\theta$. Въ слѣдующій безконечно-малый промежутокъ времени фигура переходя изъ 2-го положенія въ 3-е вращается уже около другого центра перемѣщенія, который будетъ занимать уже другое положеніе на плоскости и другое положеніе по отношенію къ фигурѣ. Каждый такой центръ перемѣщенія служитъ центромъ только на одно мгновеніе и потому называется *мгновеннымъ центромъ*... Мы видимъ, что, при непрерывномъ движеніи фигуры по плоскости, мгновенный центръ перемѣщается по плоскости; при этомъ онъ описываетъ кривую, называемую *неподвижною полодіею.* Онъ перемѣщается также и по отношенію къ фигурѣ и описываетъ въ подвижной плоскости, неизмѣняемо соединенной съ фигурою, кривую называемую подвижною полодіею.



Фиг. 86.

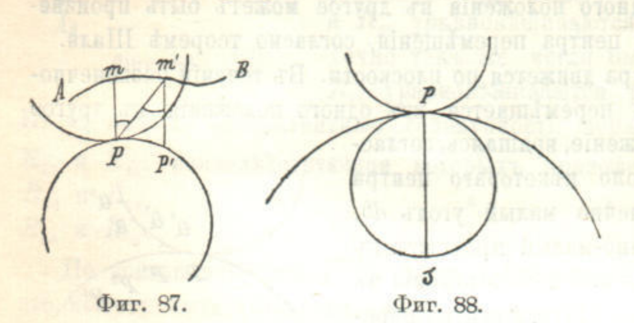
Отмѣтимъ на неподвижной полодіи (фиг. 86) рядъ послѣдовательныхъ безконечно-малыхъ дугъ PP', $P'P''$. На подвижной полодіи отмѣтимъ рядъ дугъ PQ', $Q'Q''$... равнымъ дугамъ взятымъ на неподвижной полодіи. Когда окончится вращеніе около P, то центры P' и Q' придутъ въ совпаденіе и вращеніе будетъ происходить около P'; затѣмъ Q'' придетъ въ совпаденіе съ P'' и вращеніе будетъ происходить около P'', и такъ далѣе. Въ каждомъ послѣдовательномъ мгновенномъ центрѣ полодіи касаются одна другой, и подвижная полодія катится по неподвижной.

Итакъ: *всякое движеніе фигуры въ плоскости происходитъ такъ, какъ будто полодія, соединенная неизмѣняемо съ фигурою, катилась по непод-*

вижной полодіи. При этомъ, въ каждый данный моментъ общая точка касанія полодій служитъ мгновеннымъ центромъ вращенія на безконечно-малый уголъ.

Во время такого вращенія всякая точка m подвижной фигуры описываетъ безконечно-малую дугу окружности, радіусъ которой есть Pm. Слѣдовательно: *нормаль къ траекторіи каждой точки m фигуры проходитъ чрезъ мгновенный центръ P.*

§ 249. Окружность устойчивости. Совершивъ поворотъ на уголъ $d\theta$ около P, фигура начнетъ вращаться около P'; точка m придетъ въ положеніе m' (фиг. 87); mP и $m'P'$ будутъ послѣдовательныя нормали траекторіи точки m. Если точка m занимаетъ такое положеніе въ фигурѣ, что уголъ $Pm'P' = d\theta$, то послѣдовательныя нормали mP и $m'P'$ взаимно параллельны и радіусъ кривизны траекторіи AB въ точкѣ m равенъ безконечности. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ точка m есть точка перегиба своей траекторіи AB. Поэтому, если мы опишемъ окружность, проходящую чрезъ P и P' и вмѣщающую уголъ $d\theta$, то всякая точка ея находится въ томъ мѣстѣ своей траекторіи, для котораго радіусъ кривизны равенъ безконечности. Эта окружность называется *окружностью устойчивости* *).



Фиг. 87. Фиг. 88.

Изъ сказаннаго видно, что *окружность устойчивости есть геометрическое мѣсто точекъ, проходящихъ чрезъ точки перегиба своихъ траекторій.*

Если дуга $PP' = ds$, то построеніе окружности устойчивости можно произвести слѣдующимъ образомъ. Проводимъ чрезъ мгновенный центръ P (фиг. 88) нормаль къ неподвижной полодіи и откладываемъ на ней $PS = \frac{ds}{d\theta}$. Окружность, построенная на PS какъ на діаметрѣ, и будетъ окружностью устойчивости. Дѣйствительно, обозначивъ радіусъ этой окружности чрезъ r и замѣтивъ, что центральный уголъ равенъ удвоенному вписанному углу, имѣемъ:

$$r \quad 2d\theta = ds.$$

Но діаметръ $PS = 2r$. Слѣдовательно $PS = \frac{ds}{d\theta}$.

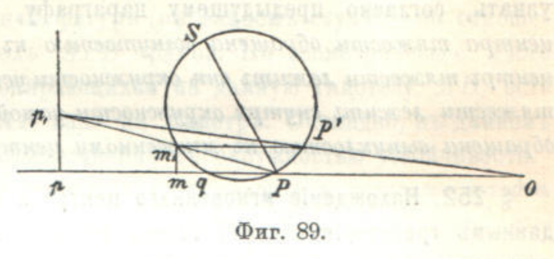
§ 250. Радіусъ кривизны траекторіи, описываемой точкою подвижной фигуры. Пусть на фиг. 89 точки P, P', m, m', S имѣютъ то же самое зна-

*) Въ кинематикѣ она называется окружностью поворотовъ.

ченіе какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, точка q есть точка пересѣченія прямой Pm съ начерченною окружностью устойчивости.

Радіусъ кривизны траекторіи, описываемой точкою p, лежащею на продолженіи прямой Am не будетъ равенъ безконечности, потому-что точка p не лежитъ на окружности устойчивости. Найдемъ величину ρ этого радіуса кривизны.

При поворотѣ движущейся фигуры около мгновеннаго центра A на уголъ $d\theta$ точка p придетъ въ p', точка m въ m'; согласно сказанному въ § 249-омъ $m'P'$ параллельна mP. Точки P, m', p' лежатъ на одной прямой; $P'm'$ — есть вторая нормаль траекторіи точки m; $p'P'$ — есть вторая нормаль траекторіи точки p, такъ что пересѣченіе O сосѣднихъ нормалей Op и Op' есть центръ кривизны траекторіи точки p. Поэтому Op есть искомый радіусъ кривизны ρ.



Фиг. 89.

Благодаря параллельности $P'm'$ и Pm получаемъ подобные треугольники, изъ которыхъ видимъ, что:

$$\frac{pm}{pP} = \frac{p'm'}{p'P} = \frac{p'P'}{p'O}.$$

Отсюда

$$pm \,.\, p'O = pP \,.\, p_{,}P' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (582)$$

Въ предѣлѣ: точки m, m', q сольются, точно также сольются точки p и p', и (582) обратится въ

$$pq \,.\, pO = pP^2$$

или

$$pq \,.\, \rho = pP^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (583)$$

Итакъ: для того чтобы найти радіусъ кривизны траекторіи, описываемой точкою p неизмѣняемо соединенною съ движущеюся фигурою, находимъ точку q пересѣченія окружности устойчивости съ нормалью pP и опредѣляемъ ρ изъ формулы (583).

Мы считаемъ положительнымъ направленіе отъ p къ P. Слѣдовательно ρ положительно или отрицательно, смотря по тому, положительно ли или отрицательно pP. Поэтому: *траекторія точки p обращена къ P вогнутою или выпуклою стороною, смотря по тому, лежитъ-ли p внѣ или внутри окружности устойчивости.*

§ 251. Геометрическій признакъ устойчивости или неустойчивости равновѣсія. Въ положеніи равновѣсія касательная къ траекторіи центра тяжести горизонтальна, такъ какъ, согласно § 238 высота центра тяжести

въ положеніи равновѣсія максимальная или минимальная. Слѣдовательно нормаль pP къ траекторіи центра тяжести p вертикальна.

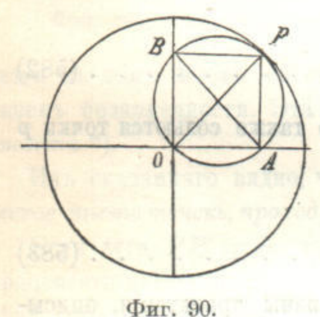
Согласно § 238 равновѣсіе устойчиво или неустойчиво, смотря по тому, находится ли центръ тяжести на наименьшей или на наибольшей высотѣ.

Слѣдовательно: *равновѣсіе устойчиво или неустойчиво, смотря по тому, обращена ли траекторія центра тяжести вогнутостью вверхъ или внизъ.*

Но, куда обращена вогнутостью траекторія центра тяжести, можно узнать, согласно предыдущему параграфу, по тому, что: *траекторія центра тяжести обращена вогнутостью къ мгновенному центру, если центръ тяжести лежитъ внѣ окружности устойчивости; если же центръ тяжести лежитъ внутри окружности устойчивости, то траекторія его обращена выпуклостью къ мгновенному центру.*

§ 252. Нахожденіе мгновеннаго центра и окружности устойчивости по даннымъ траекторіямъ двухъ точекъ подвижной фигуры и по положеніямъ этихъ точекъ на ихъ траекторіяхъ.

Пусть даны траекторіи точекъ A и B подвижной фигуры и положенія ихъ на этихъ траекторіяхъ. Согласно § 248 мгновенный центръ P лежитъ на нормаляхъ къ траекторіямъ возставленныхъ къ нимъ въ A и B. Слѣдовательно: *мгновенный центръ P находится на пересѣченіи нормалей.*



Фиг. 90.

Согласно съ (583) окружность устойчивости опредѣляется слѣдующимъ образомъ. Если траэкторіи даны, то, слѣдовательно, даны и ихъ радіусы кривизны ρ_1 и ρ_2 въ точкахъ A и B. *Откладываемъ на нормаляхъ*

$$AQ = \frac{AP^2}{\rho_1}; \quad BQ_1 = \frac{BP^2}{\rho_2}.$$

Окружность, проходящая чрезъ точки Q, Q_1, P и будетъ окружностью устойчивости.

Примѣръ 1-ый. *Прямой стерженъ AB движется такъ, что концы его A и B ходятъ по взаимно-перпендикулярнымъ прямымъ. Найти мгновенный центръ и окружность устойчивости* (фиг. 90).

Возставляя ко взаимно перпендикулярнымъ прямымъ перпендикуляры изъ A и B, находимъ въ пересѣченіи ихъ мгновенный центръ P.

Радіусы кривизны ρ_1 и ρ_2 данныхъ прямыхъ равны безконечности. Слѣдовательно точки, названныя въ настоящемъ параграфѣ Q и Q_1, совпадаютъ съ A и B. Окружность, проходящая чрезъ A, B, P и будетъ окружностью устойчивости.

Въ прямоугольникѣ $OAPB$ діагонали равны и половины ихъ равны, уголъ при P прямой; слѣдовательно окружность устойчивости проходитъ

также и чрезъ точку O пересѣченія данныхъ взаимноперпендикулярныхъ прямыхъ.

Примѣръ 2-ой. *Найти полодіи въ движеніи стержня, данномъ въ предыдущемъ примѣрѣ.* Неподвижная полодія есть геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ P по отношенію къ неподвижной плоскости. Вслѣдствіе равенства діагоналей P отстоитъ отъ O всегда въ одинаковомъ разстояніи равномъ длинѣ AB стержня. Слѣдовательно, неподвижная полодія есть окружность, описанная изъ O радіусомъ $OP = AB$.

Подвижная полодія есть геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ P по отношенію къ подвижной фигурѣ (въ данномъ случаѣ—по отношенію къ стержню AB). Уголъ APB прямой. Но геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ, опирающихся на данную гипотезу AB, есть окружность, описанная на AB какъ на діаметрѣ. Очевидно, въ данномъ случаѣ, подвижная полодія тождественна съ окружностью устойчивости.

Итакъ: *данное движеніе стержня, опирающагося концами на двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя, приводится къ катанью круга, построеннаго на стержнѣ какъ на діаметрѣ, внутри вдвое большей окружности.* Эти круги называются кругами Кардана *).

Примѣръ 3-ій. *Разсмотрѣть условія устойчивости равновѣсія горизонтальнаго круглаго цилиндра, способнаго кататься внутри другого круглаго цилиндра вдвое большаго діаметра.* Равновѣсіе и движеніе такого цилиндра вполнѣ опредѣляется равновѣсіемъ и движеніемъ фигуры, получаемой въ его пересѣченіи съ вертикальною плоскостью перпендикулярною къ его оси. Въ пересѣченіи съ такою плоскостью система данныхъ цилиндровъ представляетъ собою какъ разъ круги Кардана, упомянутые въ предыдущемъ примѣрѣ, и малый кругъ есть кругъ устойчивости.

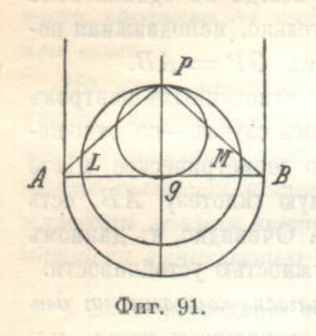
Нижнее положеніе цилиндра будетъ положеніемъ устойчиваго равновѣсія. Дѣйствительно, въ этомъ положеніи центръ тяжести G лежитъ по вертикали надъ мгновеннымъ центромъ P. Центръ тяжести G лежитъ *внутри* окружности устойчивости. Слѣдовательно, траекторія его обращена выпуклостью къ P, а вогнутостью *вверхъ*: равновѣсіе устойчиво. Этотъ примѣръ поучителенъ, потому что сѣченія самыхъ тѣлъ представляютъ собою круги Кардана, столь часто встрѣчающіеся въ практической механикѣ. Но рѣшеніе вопроса очевидно само по себѣ и безъ помощи теоріи. Перейдемъ къ примѣру, въ которомъ результатъ не очевиденъ.

Примѣръ 4-ый. *Однородный стержень AB длины $2l$ занимаетъ горизонтальное положеніе, опираясь своими концами (фиг. 91) безъ тренія на гладкую внутреннюю поверхность сосуда, имѣющаго форму поверхности вращенія около вертикальной оси. Изслѣдовать равновѣсіе стержня.*

---

*) Примѣры 1-й 2-й настоящаго параграфа имѣютъ капитальное значеніе въ практической механикѣ, равно какъ теорема Шаля и теорія полодій.

Мгновенный центръ P, лежащій на пересѣченіи нормалей, находится, благодаря симметріи сосуда, на вертикальной оси. Построимъ, по правилу § 252, точки L и M, откладывая по нормалямъ: $AL = BM = \frac{AP^2}{\rho}$. Окружность, проходящая чрезъ L, M, P и будетъ окружностью устойчивости. Построимъ еще окружность на GP какъ на діаметрѣ (G центръ тяжести AB). Обозначимъ точки пересѣченія ея съ AL и MB чрезъ H и H'. Касательная есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею и ея внѣшнимъ отрѣзкомъ. Слѣдовательно: $AH \cdot AP = AG^2$. Центръ тяжести G лежитъ подъ P, поэтому равновѣсіе неустойчиво, если G лежитъ внутри окружности устойчивости, то есть если $AL < AH$. Но



Фиг. 91.

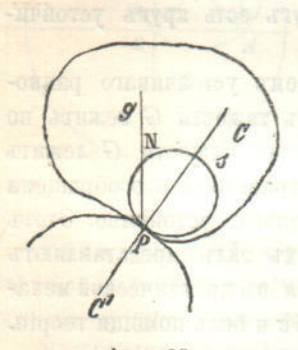
$$AL = \frac{AP^2}{\rho};\ AH = \frac{AG^2}{AP}.$$

Слѣдовательно равновѣсіе устойчиво или неустойчиво, смотря по тому, будетъ ли

$$AP^3 \text{ больше или меньше } l^2\rho.$$

253. Равновѣсіе камня на камнѣ. Тяжелое тѣло находится на неподвижной поверхности; коэффиціентъ тренія очень великъ и тѣло симметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей чрезъ точку касанія P съ неподвижною поверхностью. Изслѣдуемъ равновѣсіе такого тѣла.

Точка A есть мгновенный центръ. Пусть CPC' есть общая нормаль къ неподвижной поверхности и къ поверхности тѣла; C и C' центры кривизны (фиг. 92). Обозначивъ чрезъ $d\theta$ уголъ, на которой тѣло повертывается около P до тѣхъ поръ, пока не придутъ въ совпаденіе такія точки p и p', для которыхъ



Фиг. 92.

$$Pp = Pp' = ds.$$

Замѣчаемъ, что:

$$d\theta = \angle PCp + \angle PC'p'$$

или

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} + \frac{ds'}{\rho_1} \quad \ldots\ldots \quad (584)$$

Для построенія окружности устойчивости откладываемъ по общей нормали (см. § 249) длину $Ps = \frac{ds}{d\theta}$. Окружность, построенная на Ps какъ на діаметрѣ и будетъ окружностью устойчивости. Обозначимъ этотъ діаметръ чрезъ δ, такъ что

$$Ps = \delta = \frac{ds}{d\theta}.$$

Тогда (584) приметъ видъ:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (585)$$

Обозначимъ чрезъ N точку пересѣченія окружности устойчивости съ прямою PG, соединяющею центръ тяжести G съ мгновеннымъ центромъ P. Если G лежитъ внѣ окружности устойчивости, то траекторія его обращена (см. § 251) вогнутостью къ мгновенному центру P. Поэтому *равновѣсіе будетъ устойчиво или неустойчиво, смотря по тому, лежитъ ли G ниже или выше N.*

Обозначимъ чрезъ α уголъ наклоненія общей нормали CC' къ вертикали.

$$PN = \delta \,.\, \cos\alpha = \frac{\rho\rho' \,.\, \cos\alpha}{\rho + \rho_1}.$$

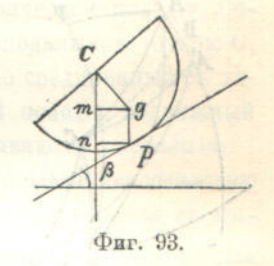
Слѣдовательно при

$$PG = \frac{\rho\rho' \cos\alpha}{\rho + \rho_1}$$

центръ тяжести G лежитъ на самой окружности устойчивости и равновѣсіе будетъ безразличнымъ.

Примѣръ. *Тяжелая полусфера лежитъ съ большимъ треніемъ на наклонной плоскости. Изслѣдовать ея равновѣсіе (фиг. 93).*

Центръ тяжести полусферы помѣщается на перпендикулярѣ возставленномъ къ его плоскому основанію изъ ея центра. Слѣдовательно уголъ φ наклоненія плоскости этого основанія къ горизонту равенъ углу смежному съ PGC, такъ какъ въ положеніи равновѣсія G лежитъ на вертикали, проходящей чрезъ P. Обозначимъ чрезъ β уголъ наклоненія наклонной плоскости къ горизонту. Проведемъ чрезъ центръ C полусферы вертикаль Cn и изъ G и P горизонтали Gm я Pn. Имѣемъ:



Фиг. 93.

$$mG = nP = CP \,.\, \sin\beta < CG$$

потому что mG есть катетъ треугольника, въ которомъ CG гипотенуза. Но $CG = \frac{3}{8}$ *). Слѣдовательно:

$$\rho \sin\beta < \frac{3}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (586)$$

есть условіе равновѣсія.

Если это условіе удовлетворено, то равновѣсіе будетъ устойчивымъ. Дѣйствительно, радіусъ кривизны ρ' наклонной плоскости равенъ ∞, слѣдовательно, согласно (585)

$$\delta = \rho,$$

*) Положеніе центра тяжести полушарія можно опредѣлить комбинируя сказанное въ §§ 119 и 122.

поэтому окружность описанная на CP какъ на діаметрѣ, есть окружность устойчивости; уголъ φ острый, поэтому уголъ CGP тупой; слѣдовательно G лежитъ внутри окружности устойчивости, траекторія его обращена выпуклостью къ мгновенному центру P. Слѣдовательно эта траекторія центра тяжести G обращена вогнутостью вверхъ, и потому равновѣсіе устойчиво.

Изъ треугольника CPG слѣдуетъ

$$\frac{CG}{CP} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi} = \frac{CG}{\rho} = \frac{3}{8},$$

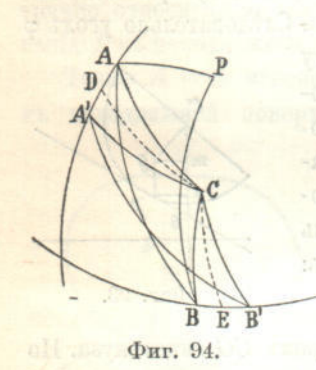
откуда

$$\sin\varphi = \frac{8}{3}\sin\beta.$$

ГЛАВА VII.

Общій случай движенія неизмѣняемой системы.

§ 254. Ось перемѣщенія абсолютно твердаго тѣла, имѣющаго только одну неподвижную точку. Приступая къ изслѣдованію какого бы то ни было движенія абсолютно твердаго тѣла, докажемъ прежде всего, для тѣла, имѣющаго только одну неподвижную точку, теорему аналогичную теоремѣ Шаля, изложенной въ § 226-омъ.



Фиг. 94.

Опишемъ около неподвижной точки O тѣла сферу, соединимъ ее неизмѣняемо съ тѣломъ и пусть P есть точка пересѣченія этой сферы съ радіусомъ, проведеннымъ изъ O черезъ данную точку Q тѣла. Движеніе всякой точки Q тѣла можетъ быть представлено движеніемъ такого изображенія P полученнаго на сферѣ.

Перемѣщеніе всякой совокупности точекъ тѣла, при движеніи тѣла изъ одного положенія въ другое, вполнѣ опредѣляется перемѣщеніемъ совокупности изображеній P этихъ точекъ по сферѣ. Перемѣщеніе всякой фигуры по сферѣ вполнѣ опредѣляется перемѣщеніемъ какой-нубудь дуги AB большого круга, неизмѣняемо соединенной съ фигурою. Дѣйствительно, если дано 1-ое положеніе дуги AB, второе ея положеніе $A'B'$ и 1-ое положеніе P какой-нибудь точки фигуры, то 2-ое положеніе P' точки P находится простымъ построеніемъ на $A'B'$ сферическаго треугольника $A'B'P'$ равнаго и совмѣщаемаго съ треугольникомъ ABP.

Докажемъ теперь (фиг. 94), что *всегда можно перемѣстить дугу AB въ любое другое данное положеніе $A'B'$ на сферѣ вращеніемъ около нѣкоторой оси, проходящей чрезъ центръ O сферы.* Проводимъ чрезъ средины

D и E дугъ AA' и BB' дуги большихъ круговъ перпендикулярныхъ къ AB и $A'B'$. Пусть C есть ихъ точка пересѣченія. Не трудно видѣть, что $CA = CA'$; $CB = C'B$. Но по положенію $AB = A'B'$. Слѣдовательно сферическіе треугольники ACB и $A'CB'$ равны. Поэтому можно перемѣстить треугольникъ ACB въ положеніе $A'CB'$, и достигнуть этимъ требуемаго перемѣщенія AB въ $A'B'$ вращеніемъ ABC около точки C. Это вращеніе можно произвести вращеніемъ сферы и тѣла около оси OC. Отсюда слѣдуетъ

Теорема Эйлера: *перемѣщеніе тѣла, имѣющаго только одну неподвижную точку, изъ одного даннаго положенія въ другое данное положеніе всегда можетъ быть произведено вращеніемъ около оси, проходящей чрезъ его неподвижную точку.*

Если радіусъ сферы сдѣлать безконечно большимъ, то получимъ плоскость, дуги большихъ круговъ обратятся въ прямыя, и получимъ теорему Шаля.

Ось OC, около которой надо вращать тѣло для перемѣщенія его изъ одного даннаго положенія въ другое, называется *осью перемѣщенія*.

§ **255. Аксоиды.** Въ § 248, пользуясь теоремою Шаля, мы показали, что всякое непрерывное движеніе плоской фигуры происходитъ такъ, какъ будто неизмѣняемо соединенная съ фигурою полодія каталась по неподвижной полодіи.

Пользуясь теоремою Эйлера, приходимъ къ заключенію, что сферическая фигура движется такъ, какъ будто неизмѣняемо соединенная съ нею сферическая полодія катилась по неподвижной сферической полодіи. Соединивъ всѣ точки этихъ сферическихъ полодій съ неподвижною точкою O, получимъ два конуса: одинъ подвижный, неизмѣняемо соединенный съ тѣломъ, другой неподвижный; при катаніи сферической полодіи, подвижный конусъ катается по неподвижному. Эти конусы называются *аксоидами*.

Итакъ: *Всякое движеніе тѣла, имѣющаго одну только неподвижную точку, происходитъ такъ, какъ будто неизмѣняемо соединенный съ тѣломъ аксоидъ катился по неподвижному аксоиду.*

§ **256. Мгновенная ось.** Общая образующая, по которой въ данный моментъ соприкасаются аксоиды, остается неподвижною въ теченіи безконечно малаго промежутка времени. Въ теченіи этого времени тѣло вращается около общей образующей на безконечно малый уголъ, пока не придутъ въ совпаденіе слѣдующія образующія и начнется вращеніе около прямой, по которой они совпадутъ, и такъ далѣе. Такимъ образомъ въ каждое мгновенье происходитъ безконечно малое вращеніе тѣла около *мгновенной оси*, по которой прикасаются аксоиды; въ слѣдующее мгновеніе вращеніе происходитъ около другой мгновенной оси, и такъ далѣе. Геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей въ тѣлѣ составляетъ подвижный аксоидъ. Геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей въ пространствѣ составляетъ неподвижный аксоидъ.

§ 257. Движеніе свободнаго твердаго тѣла. Положимъ, что тѣло не имѣетъ ни одной неподвижной точки.

Теорема. *Каковы бы ни были два заданныхъ положенія твердаго тѣла, всегда можно перемѣстить его изъ 1-го положенія во 2-ое посредствомъ слѣдующихъ двухъ движеній: 1) поступательнаго движенія, при которомъ всѣ точки тѣла проходятъ равные и параллельные прямолинейные пути, и 2) вращательнаго движенія около нѣкоторой оси.*

Доказательство. Переведемъ какую-нибудь точку P тѣла въ новое заданное ея положеніе P'. Затѣмъ, сдѣлавъ ее неподвижною, всегда можемъ, согласно § 254, вращеніемъ тѣла около оси перемѣщенія проходящей чрезъ P' повернуть тѣло во 2-ое его положеніе.

Эти два движенія независимы одно отъ другого, и поэтому можно измѣнить порядокъ ихъ послѣдовательности.

Точка P, около которой приходится въ такомъ перемѣщеніи вращать тѣло, называется *центромъ приведенія.* Изъ способа доказательства теоремы этого параграфа видно, что любая точка тѣла, или даже любая точка, неизмѣняемо соединенная съ тѣломъ, можетъ быть принята за *центръ приведенія.*

§ 258. Параллельность осей вращенія для всѣхъ точекъ приведенія. Перемѣщеніе тѣла изъ 1-го даннаго положенія во 2-ое можетъ быть про, изведено вращеніемъ около оси PR и поступательнымъ движеніемъ PP', То же самое перемѣщеніе тѣла можетъ быть произведено вращеніемъ около оси QS и поступательнымъ движеніемъ QQ'.

Въ первомъ изъ этихъ перемѣщеній, въ которомъ за центръ перемѣщенія принята точка P, какая-нибудь точка M тѣла совершаетъ два движенія: 1) прямолинейное на разстояніе равное и параллельное PP'. и 2) движеніе по дугѣ окружности, лежащей въ плоскостк перпендикулярной къ PR. Второе изъ этихъ движеній не производится точкою M только въ томъ случаѣ, если она находится на оси PR. Слѣдовательно перемѣщенія одинаковыя съ перемѣщеніемъ центра приведенія производятъ только тѣ точки тѣла, которыя лежатъ на оси PR, соотвѣтствующей центру приведенія P.

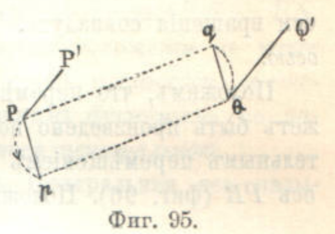
Проведемъ чрезъ Q прямую параллельную PR. Разстоянія между 1-ыми и 2-ми положеніями точекъ, лежащихъ на этой параллельной прямой, равны и параллельны разстояніямъ между 1-ыми и 2-ыми положеніями точки Q. Слѣдовательно эта параллельная прямая служитъ осью вращенія, когда Q принимается за центръ приведенія. Итакъ: *оси вращенія, получаемыя для всѣхъ центровъ приведенія, взаимно параллельны.*

§ 259. Равенство угловъ вращенія. Пусть a есть разстояніе между осями вращенія, получаемыми при центрахъ приведенія P и Q; углы, на которые тѣло вращается около этихъ осей, обозначимъ, соотвѣтственно, черезъ θ и θ'. Пусть плоскость чертежа (фиг. 95) перпендикулярна къ

этимъ осямъ, такъ что $PQ = a$. Положимъ, что PP' и QQ' суть перемѣщенія центровъ P и Q. Эти перемѣщенія могутъ быть и не въ плоскости чертежа.

Вслѣдствіе вращенія θ центръ Q описываетъ около оси PR дугу окружности радіуса a. Хорда Qq этой дуги равна $2a\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Разстояніе QQ' между 1-мъ и 2-мъ положеніемъ точки Q слагается изъ этого разстоянія Qq пройденнаго при вращеніи и изъ разстоянія равнаго PP' пройденнаго при поступательномъ движеніи.

Точно такъ же, вслѣдствіе вращенія θ' около оси QS, точка P описываетъ дугу, хорда которой равна $2a\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, и разстояніе PP' между 1-мъ и 2-мъ положеніемъ точки P слагается изъ этой хорды Pp и изъ разстоянія равнаго QQ'.



Фиг. 95.

Но если PP' вмѣстѣ съ Qq даютъ перемѣщеніе QQ', и QQ' вмѣстѣ съ Pp даютъ PP', то должно существовать равенство:

$$Qq = Pp$$

или

$$2a\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\,a\,sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)$$

при чемъ Qq и Pp должны имѣть противуположныя направленія. А это можетъ осуществится только въ томъ случаѣ, если вращеніе θ и θ' равны и совершаются въ одномъ направленіи.

Итакъ: *углы вращенія одинаковы для всѣхъ центровъ приведенія.*

§ 260. **Равенство проекцій перемѣщеній на ось вращенія.** Перемѣщеніе QQ' слагается, какъ мы видѣли въ § 259, изъ перемѣщеній PP' и Qq, но Qq перпендикулярно къ оси PR. Слѣдовательно проекція перемѣщенія QQ' на PR равна проекціи перемѣщенія PP' на PR. Итакъ: проекціи перемѣщеній всѣхъ точекъ на ось вращенія равны между собою.

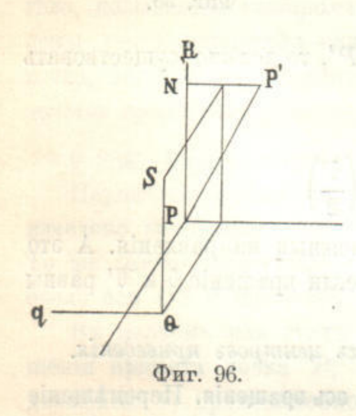
§ 261. **Всякій поворотъ около оси можетъ быть составленъ изъ поворота около другой оси и поступательнаго перемѣщенія.** Положимъ, что перемѣщеніе тѣла состоитъ только изъ поворота на уголъ θ около оси PR безъ поступательнаго движенія. Примемъ теперь за центръ приведенія точку Q находящуюся на разстояніи a отъ оси PR. Тогда данное перемѣщеніе можетъ быть составлено изъ поступательнаго перемѣщенія равнаго хордѣ $Qq = 2a\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, составляющаго уголъ $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$ съ плоскостью QPR, и изъ поворота на уголъ θ около оси, параллельной PR и проходящей чрезъ Q.

Итакъ: *Результатъ поворота тѣла на уголъ θ около оси можетъ быть достигнутъ совокупностью поворота на такой же уголъ θ около другой оси и поступательнаго перемѣщенія.*

Если уголъ θ безконечно малъ, то эта теорема обращается въ слѣдующую: *вращенiе ωdt около оси PR эквивалентно такому же вращенiю около параллельной оси QS, находящейся на разстоянiи a отъ PR, сложенному съ поступательнымъ движенiемъ $a\omega dt$ перпендикулярнымъ къ плоскости, проходящей чрезъ PP и QS и направленнымъ въ ту сторону, въ которую двигалась ось QS при вращенiи около PR.*

§ 262. Центральная ось. Покажемъ, что можно всегда устроить приведенiе перемѣщенiя такъ, что направленiя поступательнаго движенiя и оси вращенiя совпадутъ. Такая ось вращенiя называется *центральною осью.*

Положимъ, что перемѣщенiе изъ 1-го даннаго положенiя во 2-ое можетъ быть произведено поворотомъ на уголъ θ около оси PR и поступательнымъ перемѣщенiемъ PP'. Опустимъ изъ P' перпендикуляръ $P'N$ на ось PR (фиг. 96). Положимъ, что найдена та ось QS вращенiемъ около которой и поступательнымъ движенiемъ вдоль по ней достигается результатъ даннаго перемѣщенiя. Согласно §§ 258 и 259 ось QS должна быть параллельна оси PR (фиг. 96), и поворотъ около оси QS, долженъ совершаться на уголъ равный θ. Поступательное движенiе вдоль QS должно продвинуть точку P по PR на разстоянiе равное QQ' и вращенiе около QS должно подвинуть точку P по дугѣ, находящейся въ плоскости перпендикулярной къ оси QS. Слѣдовательно:



Фиг. 96.

$$QQ = PN$$

и NP' должна быть хордою упомянутой дуги, по которой P, достигнувъ точки N, переходитъ въ P'. Поэтому QS должна лежать въ плоскости, перпендикулярной къ NP' и дѣлящей NP' пополамъ. Кромѣ того QS должна находиться въ такомъ разстоянiи a отъ PR, что:

$$NP' = 2a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (587)$$

Слѣдовательно QS должна быть въ такомъ разстоянiи y отъ плоскости NPP', что:

$$NP' = 2y \, . \, tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (588)$$

Вращенiе θ около QS происходитъ, согласно § 259, въ томъ же направленiи, въ какомъ происходило вращенiе θ около PR, и перемѣщаетъ N въ P'. Поэтому разстоянiе y должно быть отложено отъ средины хорды NP' (перпендикулярно къ плоскости NPP') въ ту сторону, въ которую эта средина хорды перемѣщается даннымъ вращенiемъ около PR. Такимъ

образомъ получается одно вполнѣ опредѣляемое положеніе искомой центральной оси QS.

Остается еще доказать, что поступательное движеніе новаго центра приведенія Q происходитъ по QS.

Вслѣдствіе заданнаго вращенія θ около PR точка Q описываетъ дугу, хорда которой Qq равна и параллельна хордѣ NP', но направлена въ противуположную сторону. Поэтому происходящее, вслѣдъ за этимъ вращеніемъ, поступательное движеніе равное PP', переносящее P изъ P въ P', переноситъ точку Q, изъ q въ S, отстоящую отъ Q на разстояніи $QS = PN$.

Итакъ: *перемѣщеніе тѣла изъ 1-го заданнаго положенія въ какое угодно 2 ое заданное положеніе всегда можетъ быть произведено вращеніемъ около нѣкоторой оси QS и поступательнымъ движеніемъ по направленію этой самой оси. Такая ось называется центральною.*

Такое перемѣщеніе называется винтовымъ. Центральная ось называется также *винтовою осью.*

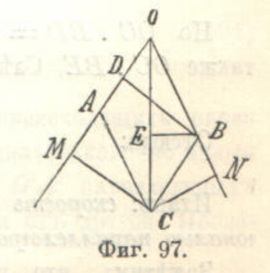
Положимъ, что уголъ θ безконечно малъ и что данное перемѣщеніе слагается изъ вращенія ωdt около оси PR и изъ поступательнаго движенія vdt, тогда:

$$NP' = PP' \sin(P'PR) = vdt \,.\, \sin(P'PR)$$

$$\theta = \omega$$

и предыдущая теорема обращается въ такую: если данное перемѣщеніе слагается изъ вращенія ωdt около оси PR и поступательнаго движенія vdt, происходящаго въ направленіи PP', то для нахожденія центральной оси поступаемъ такъ: откладываемъ длину $y = \frac{v \,.\, \sin(P'PR)}{\omega}$ отъ P перпендикулярно къ плоскости $P'PR$ въ ту сторону, въ которую движется P'. Прямая параллельная къ PR, проведенная чрезъ конецъ отложенной длины y, будетъ центральною осью.

§ 263. Сложеніе безконечно малыхъ вращеній, происходящихъ около двухъ осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ. Будемъ вращать тѣло въ теченіи безконечно малаго промежутка dt около оси OA (фиг. 97) со скоростью ω и въ такомъ направленіи, чтобы точки, лежащія, въ плоскости чертежа внутри угла AOB, *опускались* подъ лежащимъ горизонтально чертежомъ. Въ то же самое время будемъ вращать тѣло около оси OB со скоростью ω' въ такомъ направленіи, чтобы точки, лежащія въ плоскости чертежа внутри угла AOB, *поднимались* надъ чертежемъ. Этого можно достигнуть, вращая, напримѣръ, тѣло около матеріальной оси OA со скоростью ω и вращая въ то же самое время самую ось OA около оси OB со скоростью ω'. Напомнимъ, что мы пока разсматриваемъ только безконечно малыя вращенія, происходящія въ теченіи безконечно малаго промежутка времени dt.



Фиг. 97.

Отложимъ на оси OA длину OA пропорціональную скорости ω, и на оси OB длину OB пропорціональную скорости ω_1. Построимъ на OA и OB параллелограммъ и проведемъ въ немъ діагональ OC. Опустимъ изъ C на оси перпендикуляры CM и CN. Вслѣдствіе вращенія ω точка C опускается подъ чертежъ на разстояніе $\omega \,.\, CM$. Вслѣдствіе вращенія ω_1 точка C поднимается надъ чертежемъ на разстояніе $\omega' \,.\, CN$. Вслѣдствіе допущенной пропорціональности точка C опустится на разстояніе пропорціональное $OA \,.\, CM$, то есть пропорціональное площади всего параллелограмма, и она же поднимется на разстояніе $OB \,.\, CN$ пропорціональное площади того же параллелограмма. Слѣдовательно точка C поднимется на столько же, насколько опустится. Итакъ, точка C останется въ покоѣ. Но если O неподвижна и C неподвижна, то и всѣ точки прямой OC и ея продолженій неподвижны. Для всѣхъ же точекъ, не лежащихъ на діагонали, не будетъ существовать, какъ не трудно въ этомъ убѣдиться, равенства опусканія и поднятія. Слѣдовательно: *два безконечно малыя вращенія со скоростями ω и ω_1 около осей OA и OB слагаются въ одно вращеніе около діагонали параллелограмма, построеннаго на сторонахъ, отложенныхъ отъ O по этимъ осямъ и пропорціональныхъ скоростямъ* ω и ω'.

Опредѣлимъ теперь скорость Ω вращенія, получаемаго около діагонали. Если вращенія ω и ω', слагаясь, даютъ вращеніе Ω, то отъ сложенія вращеній Ω *въ обратную* сторону и вращенія ω должно получиться вращеніе ω', которое оставляетъ точки лежащія на оси OB неподвижными. Разсмотримъ перемѣщеніе точки B при вращеніи ω въ прежнемъ и Ω въ обратномъ направленіи. Опустимъ изъ B перпендикуляры BD и BE на OA и OC. Вращеніе ω опускаетъ B на $\omega \,.\, BD$. Вращеніе Ω перемѣщаетъ B на $\Omega \,.\, BE$. Для того, чтобы, какъ только что было указано, точка B, лежащая на оси OB, оставалась въ покоѣ, надо чтобы:

$$\omega \,.\, BD = \Omega \,.\, BE$$

или чтобы:

$$OC \,.\, BD = \Omega \,.\, BE$$

Но $OC \,.\, BD =$ площади параллелограмма $ABCO$, которая равна также $OC \,.\, BE$. Слѣдовательно:

$$OC \,.\, BE = \Omega \,.\, BE.$$

Отсюда:

$$\Omega = OC.$$

Итакъ: *скорость вращенія Ω, составнаго изъ ω и ω', измѣряется діагональю параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ ω и ω'.*

Замѣтимъ, что потребовалось поднятіе точки B при вращеніи Ω *взятомъ въ обратномъ* направленіи. Слѣдовательно само Ω совершается такъ, что опускаетъ точку B.

Такъ какъ всякое вращеніе можетъ происходить и въ ту и въ другую сторону около оси, то вращенія, происходящія въ одну сторону, счи-

таются положительными, происходящія же въ другую сторону — отрицательными. Оказывается, что ихъ (то есть угловыя скорости), удобно изображать длинами, откладываемыми по осямъ. Условимся откладывать ихъ такъ, чтобы *глазу, смотрящему по направленію оси въ сторону, въ которую откладывается положительное вращеніе, оно представлялось бы совершающимся по направленію противуположному движенію стрѣлки часовъ.* Не трудно видѣть, что согласно этому правилу были отложены на (фиг. 97) вращенія: ω опускающее точку C, ω' поднимающее точку C и Ω опускающее точку B.

Результатъ всѣхъ выводовъ этого параграфа можетъ быть выраженъ слѣдующимъ образомъ:

Угловыя скорости вращеній могутъ быть представляемы векторами, откладываемыми по осямъ вращеній пропорціонально ихъ угловымъ скоростямъ. При такомъ изображеніи, безконечно-малыя вращенія около осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ, складываются по правилу параллелограмма.

Отсюда слѣдуетъ обратно: данное безконечно малое вращеніе можетъ быть разложено на два составляющихъ безконечно малыхъ вращеній по правилу параллелограмма.

§ 264. Разложеніе безконечно малаго вращенія на три взаимно перпендикулярныя составляющія вращенія. Если дано безконечно малое *) вращеніе ω около оси OM (фиг. 98), то согласно § 263, его можно разложить на вращеніе ω_3 около оси z и на вращеніе около OL, которое, въ свою очередь, разлагается на вращеніе ω_1 около оси x и на вращеніе ω_2 около оси y.

Не трудно видѣть, что:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \quad . \; . \; . \; . \; (590)$$

и что:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega \, . \, cos\,(\omega, x) \\ \omega_2 &= \omega \, . \, cos\,(\omega, y) \\ \omega_3 &= \omega \, . \, cos\,(\omega, z) \end{aligned} \right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (591)$$

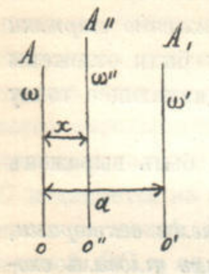
Фиг. 98.

§ 265. Сложеніе безконечно малыхъ вращеній, происходящихъ около взаимно параллельныхъ осей. Положимъ, что даны два безконечно малыя вращенія со скоростями ω и ω' около осей OA и $O'A'$ параллельныхъ между собою и находящихся на разстояніи a одна отъ другой. Прове-

---

*) Вращеніе безконечно мало, потому что предполагается совершающимся въ теченіи безконечно малаго времени dt и поворачиваетъ тѣло въ безконечно малый уголъ ωdt, но угловая скорость его ω можетъ быть конечною величиною. Слѣдовало бы точнѣе сказать *безконечно малое вращеніе со скоростью* ω. Но для сжатости рѣчи говорятъ и такъ, какъ сказано въ текстѣ.

демъ параллельную къ нимъ ось $O''A''$ на разстоянiи x отъ OA (фиг. 99). Вращенiе ω опускаетъ всякую точку лежащую на $O''A''$ подъ плоскость чертежа на разстоянiе $x\omega dt$. Вращенiе ω' поднимаетъ всякую такую точку на разстоянiе $(a - x)\ \omega'\ dt$. Для того, чтобы всѣ точки, лежащiя на $O''A''$ оставались неподвижными нужно, чтобы:



Фиг. 99.

$$x\omega = (a - x)\ \omega'$$

или

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{a - x}{x} \quad \ldots\ldots \quad (592)$$

При этомъ условiи прямая $O''A''$ будетъ неподвижна и будетъ служить осью вращенiя Ω, составленнаго изъ вращенiй ω и ω'.

Слагая вращенiя $(-\Omega)$ съ вращенiемъ ω, получимъ вращенiе ω' оставляющее ось $O'A'$ неподвижною. Вращенiе ω опускаетъ всякую точку, лежащую на $O'A'$, на разстоянiе $a\omega dt$. Вращенiе $(-\Omega)$ должно поднимать всякую такую точку на такое разстоянiе $(a - x)\ \Omega\ dt$, чтобы:

$$a\omega = (a - x)\ \Omega \quad \ldots\ldots \quad (593)$$

Исключая x изъ (592) и (593) получимъ:

$$\Omega = \omega + \omega' \quad \ldots\ldots \quad (594)$$

Уравненiе (594) показываетъ, что равнодѣйствующее вращенiе равно суммѣ слагающихъ вращенiй, если они взаимно параллельны.

Уравненiе (592) показываетъ, что, въ случаѣ взаимной параллельности составляющихъ вращенiй, разстоянiя оси равнодѣйствующаго вращенiя отъ осей слагающихъ вращенiй обратно пропорцiональны угловымъ скоростямъ составляющихъ вращенiй.

Здѣсь опять видна аналогiя со сложенiемъ взаимно-параллельныхъ силъ.

§ 266. Пара вращенiй. Если вращенiя ω и ω' равны по величинѣ, но противуположны по направленiю (вращаютъ тѣло въ противуположныя стороны) такъ, что:

$$\omega = -\omega'$$

то Ω оказывается, согласно (594), равнымъ нулю и изъ (592) получаемъ:

$$x = x - a,$$

что можетъ быть только при $x = \infty$. Получился непонятный результатъ, какъ при сложенiи силъ, составляющихъ пару силъ. Возьмемъ какую нибудь точку M тѣла на разстоянiи y отъ OA. Вращенiе ω опускаетъ точку M на разстоянiе $y\ .\ \omega$. Вращенiе ω' опускаетъ точку M на разстоянiе $(y - a)\ \omega$. Слѣдовательно линейная скорость точки M будетъ:

$$y\ .\ \omega + (y - a)\ \omega' \quad \ldots\ldots \quad (595)$$

Но, благодаря предположенному равенству $\omega = -\omega'$, величина (595) обращается въ

$$a\omega$$

и потому не зависитъ отъ y. Слѣдовательно, всѣ точки M тѣла, на какомъ бы разстояніи y онѣ ни находились отъ OA, обладаютъ одною и тою же скоростью $a\omega$, и проходятъ, слѣдовательно, равные и взаимно-параллельные пути $a\omega dt$. Но такое движеніе есть движеніе поступательное по направленію перпендикулярному къ плоскости, въ которой лежатъ данныя оси.

Два равныя вращенія, совершающіяся около взаимно параллельныхъ осей въ противуположныя стороны, называются *парою вращеній*.

Итакъ: *пара безконечно-малыхъ вращеній, происходящихъ со скоростями ω и $(-\omega)$ около взаимно-параллельныхъ осей, находящихся въ разстояніи a одна отъ другой, эквивалентна безконечно малому поступательному движенію со скоростью $a\omega$, происходящему по направленію перпендикулярному къ плоскости, проходящей чрезъ оси данныхъ вращеній.*

§ 267. Перенесеніе вращенія на параллельную ось. Изъ предыдущаго параграфа слѣдуетъ: *Безконечно-малое вращеніе со скоростью ω около оси OA эквивалентно совокупности вращенія съ тою же скоростью ω, происходящему около параллельной оси OA', находящейся на разстояніи a отъ OA и поступательнаго движенія, происходящаго со скоростью $a\omega$ въ направленіи перпендикулярномъ къ плоскости $OAA'O'$ въ ту сторону, въ которую передвигается ось $O'A'$ вращеніемъ около OA.*

Дѣйствительно, согласно съ предыдущимъ параграфомъ, ω и $(-\omega)$ эквивалентны поступательному движенію $a\omega$. Слѣдовательно ω, вмѣстѣ съ поступательнымъ движеніемъ $a\omega$, эквивалентны вращенію ω около $O'A'$.

Это правило вполнѣ аналогично правилу перенесенія силы P, изложенному въ § 91-мъ.

Замѣтимъ, что вращенія аналогичны силамъ, а поступательное движеніе $a\omega$ моменту пары. Эта аналогія,

вращенія съ *силою*

поступательнаго движенія съ *моментомъ* пары,

подтверждается изложенными теоріями сложенія вращеній и сложенія силъ.

§ 268. Приведенія данной системы вращеній къ простѣйшимъ системамъ. Повторивъ совершенно тѣ же построенія и разсужденія, которыми мы руководствовались для доказательства приведенія системы данныхъ силъ къ простѣйшимъ системамъ въ §§ 90—99 мы бы доказали соотвѣтственныя теоремы относительно вращеній. Но для краткости и вразумительности мы просто выпишемъ доказанныя теоремы статики и поставимъ рядомъ съ ними соотвѣтствующія теоремы динамики.

Теоремы статики.

1) Всякая система данныхъ силъ, дѣйствующихъ на абсолютно твердое тѣло приводится къ совокупности пары и силы, направленной по оси этой пары.

Такая совокупность называется *динамою*.

Прямая, по которой направлена въ динамѣ сила, называется *центральною осью* или *осью динамы*.

2) Всякая система силъ, дѣйствующихъ на абсолютно твердое тѣло можетъ быть приведена къ совокупности двухъ непараллельныхъ и не пересѣкающихся силъ.

Въ частномъ случаѣ эти силы могутъ оказаться или пересѣкающимися, приводящимися къ одной силѣ, или параллельными приводящимися или къ одной силѣ или къ одной парѣ.

3) Всякая система силъ, дѣйствующихъ на абсолютно твердое тѣло, можетъ быть приведена къ тремъ силамъ X, Y, Z дѣйствующихъ по направленiямъ осей прямоугольныхъ координатъ и къ тремъ парамъ, моменты которыхъ L, M, N направлены по осямъ координатъ.

Теоремы динамики.

1) Всякая система данныхъ вращенiй абсолютно твердаго тѣла приводится къ совокупности вращенiя около нѣкоторой оси и поступательнаго движенiя вдоль этой оси.

Такая совокупность называется *винтовымъ движенiемъ*.

Ось вращенiя въ винтовомъ движенiи называется *центральною осью* или *осью винта*.

2) Всякая система вращенiй абсолютно твердаго тѣла можетъ быть приведена къ совокупности двухъ вращенiй, происходящихъ около двухъ непараллельныхъ и непересѣкающихся осей.

Въ частномъ случаѣ эти вращенiя могутъ оказаться или съ пересѣкающимися осями и приводиться къ одному вращенiю или съ параллельными осями и приводиться или къ одному вращенiю или къ одному поступательному движенiю.

3) Всякая система вращенiй абсолютно твердаго тѣла можетъ быть приведена къ совокупности трехъ вращенiй около осей, параллельныхъ осямъ координатъ и участвующихъ въ поступательномъ движенiи тѣла и къ тремъ поступательнымъ движенiямъ вдоль осей координатъ.

Послѣднее приведенiе, обозначенное № 3 выяснится изъ слѣдующаго параграфа.

§ 269. Скорости точекъ твердаго тѣла, совершающаго какое-либо движенiе въ пространствѣ. Движенiе твердаго тѣла въ теченiи безконечно малаго промежутка времени dt можетъ быть разсматриваемо, согласно § 261-му, какъ совокупность поступательнаго движенiя точки приведенiя O и вращенiя около оси, проходящей чрезъ O.

Для удобства изслѣдованiя скоростей различныхъ точекъ тѣла изберемъ подвижную систему координатъ, именно такую прямоугольную систему осей Ox, Oy, Oz, въ которой начало координатъ O движется, а оси

сохраняютъ свое направленіе. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 будутъ слагающія вращенія, происходящія около осей Ox, Oy, Oz и положимъ, что слагающія поступательной скорости точки O по направленіямъ этихъ осей будутъ u, v, w. Согласно сказанному въ § 263-мъ скорости ω_1, ω_2, ω_3 считаются положительными, если:

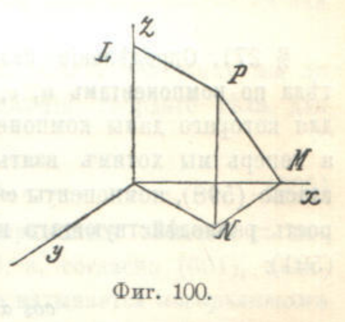
ω_1 вращаетъ ось y по направленію къ оси z совершаясь около оси x
ω_2 » » z » » » » x » » » y
ω_3 » » x » » » » y » » » z

Эти 6 величинъ u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 называются компонентами (слагающими) движенія: ими опредѣляется всякое движенія твердаго тѣла въ теченіи dt.

Посмотримъ, какъ этими компонентами опредѣляется движеніе точки P, первоначальныя координаты которой суть (x, y, z).

Опредѣлимъ $\frac{dz}{dt}$. Для этого опустимъ перпендикуляръ PN на плоскость (x, y) и перпендикуляръ NM на ось x (фиг. 100). Вращеніе ω_1 перемѣщаетъ точку съ линейною скоростью $\omega_1\ PM$ по элементу окружности, описанной радіусомъ MP около оси x. Проложеніе этой скорости на NP равно

$$\omega_1 \,.\, PM \sin (NPM) = \omega_1 \,.\, y.$$



Фиг. 100.

Точно такъ же вращеніе ω_2 около оси y дастъ для скорости точки P по направленію NP слагающую $(-\omega_2 \,.\, x)$. Прибавляя еще поступательную скорость w направленную по NP, получимъ $w' = w + \omega_1 \,.\, y - \omega_2 \,.\, x$. Поступая точно такъ же, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u + \omega_2 \,.\, z - \omega_2 \,.\, y \\ \frac{dy}{dt} &= v + \omega_3 \,.\, x - \omega_1 \,.\, z \\ \frac{dz}{dt} &= w + \omega_1 \,.\, y - \omega_3 \,.\, x \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (596)$$

§ 270. Перемѣна центра приведенія. Положимъ, что, зная приведеніе для центра приведенія O, желаемъ найти скорости точки (x, y, z) для центра приведенія O', предполагая, что оси координатъ (ξ, η, ζ), имѣющія начало въ O', соотвѣтственно параллельны осямъ, имѣющимъ начало въ O'.

Пусть компоненты для центра приведенія O' будутъ u', v', w', ω_1', ω_2', ω_3'; координаты точки O' относительно осей x, y, z пусть будутъ ξ, η, ζ. Тогда координаты точки P относительно новыхъ осей будутъ:

$$(x - \xi), \quad (y - \eta), \quad (z - \zeta),$$

и, согласно (596), получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u + \omega_2 z - \omega_3 y = u' + \omega_2'(z-\zeta) - \omega_2'(y-\eta)\\ \frac{dy}{dt} &= v + \omega_3 x - \omega_1 z = v' + \omega_3'(x-\xi) - \omega_1'(z-\zeta)\\ \frac{dz}{dt} &= w + \omega_1 y - \omega_2 x = w' + \omega_1'(y-\eta) - \omega_2'(x-\xi)\end{aligned}\right\} \quad \ldots (597)$$

Уравненія (597) справедливы для всякой точки P, стало быть для всякихъ x, y, z, но это возможно только въ томъ случаѣ, если коэффиціенты при x, y, z въ лѣвыхъ частяхъ этихъ уравненій равны коэффиціентамъ при тѣхъ же величинахъ въ правыхъ частяхъ, то есть должны существовать равенства

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_1'\\ \omega_2 &= \omega_2'\\ \omega_3 &= \omega_3'\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (598)$$

§ 271. Опредѣленіе безконечно-малаго винтового движенія твердаго тѣла по компонентамъ u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3. Если за центръ приведенія, для котораго даны компоненты u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3, была принята точка O, а теперь мы хотимъ взять центръ P приведенія на оси винта, то, согласно (598), компоненты ω_1, ω_2, ω_3 останутся безъ измѣненія. Если скорость равнодѣйствующаго вращенія около оси винта есть Ω, то, согласно (591):

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(\Omega, x) = \frac{\omega_1}{\Omega}\\ \cos\beta &= \cos(\Omega, y) = \frac{\omega_2}{\Omega}\\ \cos\gamma &= \cos(\Omega, z) = \frac{\omega_3}{\Omega}\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots (599)$$

гдѣ α, β, γ суть углы наклоненія оси винта къ осямъ координатъ.

Если V была скорость поступательнаго движенія въ первоначальномъ приведеніи и V_0 скорость поступательнаго движенія вдоль оси винта, то

$$V_0 = V \,.\, \cos(V, \Omega) = u \,.\, \cos\alpha + v \,.\, \cos\beta + w \,.\, \cos\gamma \;. \quad (600)$$

Исключая косинусы изъ (600) и (599), получимъ:

$$\Omega \,.\, V_0 = u\,\omega_1 + v\,\omega_2 + w\,\omega_3 \;\ldots\ldots\ldots (601)$$

Если x, y, z суть координаты точки P, лежащей на оси винта, то поступательная скорость этой точки во второмъ приведеніи направлена по винту и потому, согласно съ (596):

$$\frac{u + \omega_2 z - \omega_3 y}{\omega} = \frac{v + \omega_3 x - \omega_1 z}{\omega_2} = \frac{w + \omega_1 y - \omega_2 x}{\omega_3} \;. \quad (602)$$

Эти уравненія (602) и служатъ уравненіями оси винта.

Изъ (602) получимъ:

$$\frac{\omega_1 (u + \omega_2 z - \omega_3 y)}{\omega_1^2} = \frac{\omega_2 (v + \omega_3 x - \omega_1 z)}{\omega_2^2} = \frac{\omega_3 (w + \omega_1 y - \omega_2 x)}{\omega_3^2} . \quad (603)$$

Прилагая теорему о суммѣ предыдущихъ и суммъ послѣдующихъ, находимъ, что каждая изъ дробей уравненій (603) или, что то же самое, каждая изъ дробей уравненій (602) равна:

$$\frac{u \,.\, \omega_1 + v \,.\, \omega_2 + w \,.\, \omega_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$$

или, согласно (601)

$$\frac{V_0}{\Omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (604)$$

Это отношеніе поступательной скорости вдоль оси винта и вращательной скорости вокругъ оси винта называется *параметромъ* винта или *стрѣлкою*.

§ 272. Инварьянты движенія твердаго тѣла. Какую бы точку мы ни принимали за центръ приведенія даннаго движенія твердаго тѣла, для всякаго такого приведенія величина

$$u\omega_1 + v\omega_2 + w\omega_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (605)$$

будетъ одна и та же, потому что движеніе выражается винтомъ съ поступательной скоростью V_0 и вращательною Ω, а, согласно (601), величина (605) равна $V_0 \Omega$. Поэтому эта величина называется *инварьянтомъ компонентовъ* движенія.

Равнодѣйствующее вращеніе Ω тоже не измѣняется отъ перемѣны центра приведенія и называется поэтому *инварьянтомъ вращенія*.

Если инварьянтъ компонентовъ, равный $V_0 \Omega$, равенъ нулю, то или $V_0 = 0$ и движеніе приводится къ одному вращательному; или $\Omega = 0$, и движеніе приводится къ одному поступательному (сравн. § 99).

§ 273. Подвижная система осей координатъ. Для изслѣдованія движенія твердаго тѣла удобно пользоваться подвижною системою координатныхъ осей, неизмѣняемо соединенныхъ съ тѣломъ. Мы уже пользовались такою системою подвижныхъ осей ξ, η, ζ, изучая частный случай движенія твердаго тѣла, именно движеніе его около неподвижной оси. Но тогда въ этой системѣ только оси η и ζ были подвижными, а ось ξ была неподвижна.

При изученіи движенія твердаго тѣла, имѣющаго только одну неподвижную точку, обыкновенно пользуются двумя системами осей координатъ, имѣщими общее начало въ неподвижной точкѣ: одна система неподвижна, а другая, подвижная, неизмѣняемо соединена съ тѣломъ. Между координатами (ξ, η, ζ) какой-нибудь точки тѣла, отнесенной къ подвижной

системѣ осей и координатами (x, y, z) той же самой точки, отнесенной къ неподвижнымъ осямъ существуютъ выводимыя въ аналитической геометріи формулы преобразованія:

$$x = \xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma$$

$$y = \xi\alpha' + \eta\beta' + \zeta\gamma'$$

$$z = \xi\alpha'' + \eta\beta'' + \zeta\gamma''$$

гдѣ α, β, γ, α', β' ... суть косинусы угловъ, составляемыхъ подвижными осями съ неподвижными. Между этими косинусами существуютъ извѣстныя соотношенія

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (606)$$

Пользуясь этими формулами, изслѣдуютъ движеніе подвижной системы осей и движеніе тѣла около неподвижной точки.

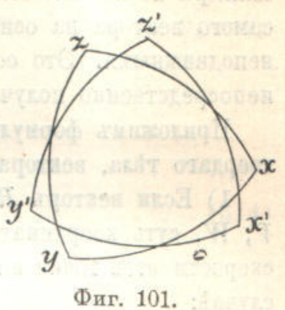
Этотъ способъ примѣняемъ былъ Эйлеромъ, Лагранжемъ и сдѣлался классическимъ. Тѣмъ не менѣе мы будемъ придерживаться другого способа, практикуемаго преимущественно англійскими учеными, потому что англійскій способъ требуетъ меньшаго числа вспомогательныхъ формулъ, Раутъ (Routh) въ своей *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies* говоритъ по этому поводу, что мы не вполнѣ пользуемся выгодами, представляемыми подвижною системою осей координатъ, если, какъ это происходитъ въ классическомъ способѣ, пользуемся въ теченіи всего движенія еще и системою неподвижныхъ осей. Въ англійскомъ же способѣ неподвижными осями пользуются только въ началѣ и въ концѣ изслѣдованія. Отъ классическаго англійскій способъ отличается тѣмъ, что въ немъ за неподвижныя оси (вводимыя только въ началѣ изслѣдованія) принимаются оси, совпадающія въ моментъ t съ подвижными осями, какъ это яснѣе будетъ видно изъ слѣдующаго параграфа.

§ 274. Кинематическія соотношенія между проложеніями вектора на подвижныя и на неподвижныя оси. Скорости, ускоренія, силы, какъ мы видѣли, могутъ быть представлены векторами, подчиняющимися правилу параллелограмма. Въ настоящемъ параграфѣ, въ видахъ общности, изслѣдуемъ проложенія какого бы то ни было вектора R.

Пусть Ox, Oy, Oz (фиг. 101) суть положенія подвижныхъ осей въ моментъ t (точнѣе говоря: въ концѣ времени t протекшаго отъ начала времени). По истеченіи еще безконечно малаго промежутка dt времени эти подвижныя оси примутъ положеніе Ox', Oy', Oz'. Эта перемѣна положенія подвижныхъ осей можетъ быть достигнута, согласно §§ 252 и 254, вра-

щеніемъ около мгновенной оси OJ на уголъ θdt. Пусть θ_1, θ_2, θ_3 будутъ проложенія угловой скорости θ на оси Ox, Oy, Oz. Такимъ образомъ оси координатъ переходятъ отъ занимаемаго ими въ моментъ t положенія Ox, Oy, Oz въ положеніи Ox', Oy', Oz' занимаемое ими въ моментъ $t+dt$, при помощи трехъ вращеній $\theta_1 dt$, $\theta_2 dt$, $\theta_3 dt$ около Ox, Oy, Oz,

Обозначимъ проложенія вектора R на оси Ox, Oy, Oz чрезъ U, V, W. Въ теченіи времени dt векторъ R измѣняется по величинѣ и по направленію. Въ теченіи этого же времени dt измѣняется и положеніе осей координатъ, такъ что проложенія вектора R, въ концѣ времени $t+dt$ на оси Ox', Oy', Oz' будутъ $U+dU$, $V+dV$, $W+dW$.



Фиг. 101.

Опишемъ около O сферу радіусомъ равнымъ единицѣ, и пусть оси координатъ пересѣкаютъ поверхность этой сферы въ точкахъ x, y, z, x', y', z', (фиг. 101), такъ что получаются два сферическихъ треугольника x, y, z и x', y', z', стороны которыхъ суть дуги большихъ круговъ, каждая въ $90°$. Проложеніе вектора R на ось Ox въ концѣ времени $t+dt$ равно

$$(U+dU)\cos(x,x') + (V+dV)\cos(x,y') + (W+dW)\cos(x,z') \quad . \ (607)$$

Вращенія около Ox и Oy не могутъ измѣнить дуги xy. Но вращеніе около Oz удаляетъ точку y' отъ точки x на дугу $\theta_3 dt$. Точно такъ же вращенія около Ox и Oz не измѣняютъ дуги xz; но вращеніе около Oy приближаетъ точку z' къ точкѣ x на дугу $\theta_2 dt$. Поэтому:

$$\text{дуга } xy' = \text{дугѣ } xy + \theta_3 dt,$$

$$\text{дуга } xz' = \text{дугѣ } xz + \theta_2 dt.$$

Косинусъ угла, измѣряющаго дугу xx' отличается отъ единицы на квадратъ безконечно малой величины. Подставляя найденныя величины въ (607), получимъ, что проложеніе вектора R, въ концѣ времени $t+dt$, на Ox равно

$$U + dU - V\theta_3 dt + W\theta_2 dt \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (608)$$

Раздѣливъ полученное проложеніемъ U приращеніе $dU - V\theta_3 dt + W\theta_2 dt$ на dt и перейдя къ предѣлу, получимъ:

$$\frac{dU}{dt} - V\theta_3 + W\theta_2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (609)$$

Но процессомъ дѣленія на dt и переходомъ къ предѣлу мы получили скорость проложенія конца вектора R на ось x въ концѣ времени t. Обозначимъ ее чрезъ U_1. Точно такъ же получимъ *скорости* V_1 и W_1 *проложеній конца вектора* R на неподвижныя оси y и z.

Именно:
$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{dU}{dt} - V\theta_3 + W\theta_2 \\ V_1 &= \frac{dV}{dt} - W\theta_1 + U\theta_3 \\ W_1 &= \frac{dW}{dt} - U\theta_2 + V\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (610)$$

Таковы формулы, выражающія *скорости* U_1, V_1, W_1 *проложеній конца вектора R на неподвижныя оси Ox, Oy, Oz* чрезъ проложенія U, V, W самого вектора на оси подвижныя, совпадающія въ концѣ времени t съ неподвижными. Это основныя формулы англійскаго способа. Изъ нихъ непосредственно получаются формулы слѣдующаго параграфа.

Приложимъ формулы (610) къ употребительнѣйшимъ, въ динамикѣ твердаго тѣла, векторамъ.

1) Если векторъ R есть радіусъ-векторъ точки (x, y, z) тѣла, то U, V, W, суть координаты x, y, z этой точки; U_1, V_1, W_1 суть проложенія скорости этой точки на неподвижныя оси. Формулы (610) даютъ въ этомъ случаѣ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2 \\ v &= \frac{dy}{dt} - z\theta_1 + x\theta_3 \\ w &= \frac{dz}{dt} - x\theta_2 + y\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (611)$$

Здѣсь x, y, z суть координаты точки относительно подвижной системы осей координатъ; u, v, w суть проложенія скорости точки на неподвижныя оси координатъ.

2) Если векторъ R есть скорость точки (x, y, z), то U, V, W суть проложенія u, v, w этой скорости на подвижныя оси; U_1, V_1, W_1 суть проложенія ускоренія той же точки на неподвижныя оси. Формулы (610) даютъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{du}{dt} - v\theta_3 + w\theta_2 \\ Y &= \frac{dv}{dt} - w\theta_1 + u\theta_3 \\ Z &= \frac{dw}{dt} - u\theta_2 + v\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (612)$$

3) Если векторъ R есть угловая скорость ω тѣла около мгновенной оси, то U, V, W суть проложенія ея ω_1, ω_2, ω_3 на подвижныя оси. Если при этомъ обозначимъ чрезъ ω_x, ω_y, ω_z проложенія скорости ω на неподвижныя оси, то U_1, V_1, W_1 будутъ соотвѣтственно равны

$$\frac{d\omega_x}{dt}, \ \frac{d\omega_y}{dt}; \ \frac{d\omega_z}{dt}.$$

Формулы (610) дадутъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega_x}{dt}&=\frac{d\omega_1}{dt}-\omega_2\theta_3+\omega_3\theta_2\\ \frac{d\omega_y}{dt}&=\frac{d\omega_2}{dt}-\omega_3\theta_1+\omega_1\theta_3\\ \frac{d\omega_z}{dt}&=\frac{d\omega_3}{dt}-\omega_1\theta_2+\omega_2\theta_1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(613)$$

Если подвижныя оси неизмѣняемо соединены съ тѣломъ, то $\omega_1=\theta_1$; $\omega_2=\theta_2$; $\omega_3=\theta_3$, и (613) принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega_x}{dt}&=\frac{d\omega_1}{dt}\\ \frac{d\omega_y}{dt}&=\frac{d\omega_2}{dt}\\ \frac{d\omega_z}{dt}&=\frac{d\omega_3}{dt}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(614)$$

§ 275. Эйлеровы дифференціальныя уравненія движенія абсолютнаго твердаго тѣла около неподвижной точки. Пусть (x, y, z) суть координаты какой-нибудь точки m абсолютно твердаго тѣла, отнесенныя къ неподвижной системѣ осей Ox, Oy, Oz. Самое же тѣло имѣетъ только одну неподвижную точку O. Для тѣла возможны всякія вращенія около осей Ox, Oy, Oz; поэтому къ нему примѣнимъ законъ площадей, выражающійся уравненіями:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\Sigma\,(xY-yX)=N\\ \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\Sigma\,(yZ-zY)=L\\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\Sigma\,(zX-xZ)=M\end{aligned}\right\}\quad\ldots(322)$$

гдѣ L, M, N проложенія моментовъ равнодѣйствующей пары; X, Y, Z проложенія дѣйствующихъ силъ.

Согласно съ формулами (596):

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\omega_y z-\omega_z y\\ \frac{dy}{dt}&=\omega_z x-\omega_x z\\ \frac{dz}{dt}&=\omega_x y-\omega_y x\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(615)$$

Дифференцируя, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=z\frac{d\omega_y}{dt}-y\frac{d\omega_z}{dt}+\omega_y(y\omega_x-x\omega_y)-\omega_z(x\omega_z-z\omega_x)\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=x\frac{d\omega_z}{dt}-z\frac{d\omega_x}{dt}+\omega_z(z\omega_y-y\omega_z)-\omega_x(y\omega_x-x\omega_y)\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=y\frac{d\omega_x}{dt}-x\frac{d\omega_y}{dt}+\omega_x(x\omega_z-z\omega_x)-\omega_y(z\omega_y-y\omega_z)\end{aligned}\right\}\quad . \ . \ (616)$$

Если $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ суть угловыя скорости тѣла около осей OA, OB, OC, неизмѣняемо соединенныхъ съ тѣломъ и совпадающихъ въ концѣ времени t съ неподвижными осями координатъ, то $\omega_x=\omega_1$; $\omega_z=\omega_2$; $\omega_z=\omega_3$; и, согласно (614):

$$\frac{d\omega_x}{dt}=\frac{d\omega_1}{dt};\ \frac{d\omega_y}{dt}=\frac{d\omega_2}{dt};\ \frac{d\omega_z}{dt}=\frac{d\omega_3}{dt}.$$

Если за подвижныя оси примемъ главныя оси инерціи тѣла для неподвижной точки, то $\Sigma myz=0$; $\Sigma mzx=0$; $\Sigma mxy=0$. Подставимъ, при такихъ предположеніяхъ, вторыя производныя координатъ по времени изъ (616) въ (322). При этомъ, благодаря вытекающимъ изъ нашихъ предположеній упрощеніямъ, результатъ получится тотъ же, если мы предварительно отбросимъ въ уравненіи, опредѣляющемъ $\frac{d^2x}{dt^2}$, члены, не содержащіе y, и въ уравненіи, опредѣляющемъ $\frac{d^2y}{dt^2}$ — всѣ члены несодержащіе x. Такимъ образомъ получимъ

$$\Sigma m(x^2+y^2)\cdot\frac{d\omega_3}{dt}+\Sigma m(x^2-y^2)\,\omega_1\omega_2=N.$$

. . . .

Если A, B, C суть главные моменты инерціи тѣла относительно неподвижной точки, то пользуясь формулами (336) получимъ:

$$\left.\begin{aligned}A\frac{d\omega_1}{dt}-(B-C)\,\omega_2\omega_3&=L\\ B\frac{d\omega_2}{dt}-(C-A)\,\omega_3\omega_1&=M\\ C\frac{d\omega_3}{dt}-(A-B)\,\omega_1\omega_2&=N\end{aligned}\right\}\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (617)$$

гдѣ LMN суть моменты паръ по осямъ, подвижнымъ, соединеннымъ съ тѣломъ.

Таковы выведенныя Эйлеромъ общія дифференціальныя уравненія движенія абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки.

§ 276. Движеніе абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки подъ вліяніемъ силъ, приложенныхъ именно къ этой точкѣ. Если силы приложены только къ той точкѣ тѣла, которая неподвижна, то онѣ не про-

изводятъ никакого дѣйствія на тѣло, и задача рѣшается такъ, какъ будто бы на тѣло не дѣйствовали никакія силы. Впослѣдствіи мы увидимъ, что этотъ случай движенія твердаго тѣла около точки имѣетъ въ динамикѣ особенно важное значеніе. Такое движеніе совершаетъ, напримѣръ, тяжелое твердое тѣло около неподвижной точки, находящейся въ центрѣ тяжести (подпертое въ центрѣ тяжести); дѣйствующая на него сила тяжести приложена въ центрѣ тяжести и уничтожается сопротивленіемъ точки опоры, и тѣло оказывается неподверженнымъ дѣйствіямъ какихъ либо силъ.

Въ этомъ случаѣ всѣ X, Y, Z равны нулю; поэтому и моменты L, M, N равны нулю; Эйлеровы уравненія (617) принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - (B-C)\,\omega_2\omega_3 = 0 \\ B\frac{d\omega_2}{dt} - (C-A)\,\omega_3\omega_1 = 0 \\ C\frac{d\omega_3}{dt} - (A-B)\,\omega_1\omega_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (618)$$

и могутъ быть интегрированы слѣдующимъ образомъ.

Помножимъ 1-ое изъ этихъ уравненій (618) на ω_1, второе на ω_2, третье на ω_3 и сложимъ, получимъ:

$$A\omega_1\frac{d\omega_1}{dt} + B\omega_2\frac{d\omega_2}{dt} + C\omega_3\frac{d\omega_3}{dt} = 0.$$

Интегрируя, получимъ:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T \quad \ldots\ldots (619)$$

гдѣ T есть постоянное интеграціи.

Помножимъ теперь 1-ое изъ уравненій (618) на $A\omega_1$, 2-ое на $B\omega_2$ 3-е на $C\omega_3$ и сложимъ. Получимъ:

$$A^2\omega_1\frac{d\omega_1}{dt} + B^2\omega_2\frac{d\omega_1}{dt} + C^2\frac{d\omega_3}{dt} =$$

$$= \omega_1\omega_2\omega_3\,[A(B-C) + B(C-A) + C(A-B)] = 0.$$

Интегрируя, получимъ:

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2 \quad \ldots\ldots (620)$$

гдѣ G есть постоянное интеграціи.

Замѣтимъ, что

$$\omega_1^2 + \omega_1^2 + \omega_3^2 = \omega^2 \quad \ldots\ldots (621)$$

Отсюда:

$$\omega_1\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\frac{d\omega_3}{dt} = \omega\frac{d\omega}{dt} \quad \ldots (622)$$

Помножимъ 1-ое изъ уравненій (618) на $\frac{\omega_1}{A}$, на 2-е $\frac{\omega_2}{B}$, 3-е на $\frac{\omega_3}{C}$ и

сложимъ. Получимъ, благодаря (622):

$$\omega\frac{d\omega}{dt}=\left[\frac{B-C}{A}+\frac{C-A}{A}+\frac{A-B}{C}\right]\omega_1\omega_2\omega_3=-$$

$$=-\frac{(B-C)\,(C-A)\,(A-B)}{ABC}\,\omega_1\omega_2\omega_3\;.\;.\;.\;.\;.\;(623)$$

Но изъ (619), (620) и (622) получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1{}^2&=\frac{BC}{(A-C)\,(A-B)}\cdot(-\lambda_1+\omega^2)\\ \omega_2{}^2&=\frac{CA}{(B-A)\,(B-C)}\cdot(-\lambda_3+\omega^2)\\ \omega_3{}^2&=\frac{AB}{(C-B)\,(C-A)}\cdot(-\lambda_3+\omega^2)\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(624)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{T\,(B+C)-G^2}{BC}\\ \lambda_2&=\frac{T\,(C+A)-G^2}{AC}\\ \lambda_3&=\frac{T\,(A+B)-G^2}{AB}\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(625)$$

Подставляя найденныя величины ω_1, ω_2, ω_3, изъ (624) въ (623), получимъ:

$$\omega\frac{d\omega}{dt}=\sqrt{(\lambda_1-\omega^2)\,(\lambda_2-\omega^2)\,(\lambda_3-\omega^2)}\;.\;.\;.\;.\;.\;(626)$$

или

$$dt=\frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\lambda_1-\omega^2)\,(\lambda_2-\omega^2)\,(\lambda_3-\omega^2)}}\;.\;.\;.\;.\;.\;(627)$$

Отсюда:

$$t=\int\frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\lambda_1-\omega^2)\,(\lambda_2-\omega^2)\,(\lambda_3-\omega^2)}}\;.\;.\;.\;.\;.\;(628)$$

Этотъ интегралъ можетъ быть приведенъ къ хорошо изслѣдованному эллиптическому интегралу.

Итакъ мы получали три *первыхъ* интеграла дифференціальныхъ уравненій (618), именно: (619), (620) и (628).

Впослѣдствіи мы покажемъ, какъ, пользуясь только интегралами (619) и (620), Poinsot далъ полную геометрическую картину движенія, опредѣляемаго дифференціальными уравненіями (618), а теперь изложимъ полное интегрированіе уравненій (618) по способу Kirchhoff'a.

§ 277. Интегрированіе уравненій движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла по способу Кирхгофа. Одинъ изъ полученныхъ нами интегра-

ловъ уравненій (618) приводится къ эллиптическому интегралу. Слѣдова тельно окончательное интегрированіе уравненій (618) можетъ быть произведено, въ общемъ случаѣ, только при помощи эллиптическихъ функцій. Но читатель, незнакомый съ теоріею эллиптическихъ функцій, можетъ свободно понять содержаніе настоящаго параграфа, если мы предпошлемъ слѣдующія краткія свѣдѣнія по этой теоріи.

Интегралъ

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(629)$$

называется *эллиптическимъ*. Знаменатель выраженія, стоящаго подъ знакомъ этого интеграла обозначается символомъ $\Delta(\varphi)$, такъ что

$$\Delta(\varphi)=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\quad\ldots\ldots\ldots(630)$$

Самъ эллиптическій интегралъ, какъ не трудно видѣть, есть нѣкоторая функція отъ φ, такъ что:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi}}=F(\varphi)\quad\ldots\ldots\ldots(631)$$

Постоянная величина k называется *модулемъ*. Верхній предѣлъ φ эллиптическаго интеграла называется его *амплитудою* и обозначается знакомъ am, такъ что:

$$\varphi=am\,F=\text{амплитуда }F.$$

Отъ этой амплитуды, какъ отъ угла, берутся синусы и косинусы, называемые такъ:

$\sin\varphi=\sin am\,F$=синусъ амплитуды F (то-есть: синусъ амплитуды отъ F)

$\cos\varphi=\cos am\,F$=косинусъ амплитуды F (то-есть: косинусъ амплитуды отъ F)

Эти $\sin am\,F$ и $\cos am\,F$ называются *эллиптическими функціями* величины F.

Еще употребляется третья эллиптическая функція, такъ называемая *дельта амплитуды* F, обозначаемая $\Delta am F$, и равная $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, такъ что:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\Delta(\varphi)=\Delta am F=\text{дельта амплитуды }F.$$

Дифференцируя $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ и $\Delta(\varphi)$ и сообразуясь съ (631), получимъ,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\cos\varphi}{dF}&=-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dF}=-\sin\varphi\,.\,\Delta(\varphi)\\ \frac{d\sin\varphi}{dF}&=\cos\varphi\frac{d\varphi}{dF}=\cos\varphi\,.\,\Delta(\varphi)\\ \frac{d\Delta(\varphi)}{dF}&=-\frac{k^2\sin\varphi\,.\,\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}.\frac{d\varphi}{dF}=-k^2\sin\varphi\,.\,\cos\varphi\end{aligned}\right\}\quad\ldots(632)$$

Если опредѣлимъ ω_1, ω_2, ω_3 изъ формулъ:

$$F(\varphi) = (t - \tau)\lambda$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= a\Delta am\,(t-\tau)\lambda \\ \omega_2 &= b\,.\,sin\,am\,(t-\tau)\lambda \\ \omega_3 &= c\,.\,cos\,am\,(t-\tau)\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (633)$$

то этими значеніями удовлетворятся дифференціальныя уравненія (618). Дѣйствительно, вставляя ω_1, ω_2, ω_3, опредѣляемыя изъ (633) въ (618), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda Aak^2\,sin\varphi\,.\,cos\varphi &= (B-C)\,bc\,.\,sin\varphi\,.\,cos\varphi \\ -\lambda Bb\,.\,cos\varphi\,.\,\Delta(\varphi) &= (A-C)\,ac\,.\,\Delta(\varphi)\,.\,cos\varphi \\ -\lambda Cc\,.\,sin\varphi\,.\,\Delta(\varphi) &= (A-B)\,ab\,.\,sin\varphi\,.\,\Delta(\varphi) \end{aligned}\right\} \ldots (634)$$

которыя окажутся тождествами, если выберемъ введенныя нами постоянныя a, b, c, λ такъ, чтобы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{(A-B)}{C} &= -\frac{c\lambda}{ab} \\ \frac{(A-C)}{B} &= -\frac{b\lambda}{ac} \\ \frac{(B-C)}{A} &= -k^2\frac{a\lambda}{bc} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (635)$$

Такой выборъ постоянныхъ возможенъ. Дѣйствительно, полагая $t = \tau$ получимъ изъ (633):

$$\omega_1 = a; \quad \omega_2 = 0; \quad \omega_3 = c,$$

такъ что (619) и (620) дадутъ

$$\left.\begin{aligned} Aa^2 + C c^2 &= T \\ A^2a^2 + C^2c^2 &= G^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (636)$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{g^2 - CT}{A\,(A-C)} \\ C^2 &= \frac{AT - G^2}{C\,(A-C)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (637)$$

Дѣля 2-ое уравненіе изъ (635) на 1-ое, получимъ:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{(A-C)\,C}{(A-B)\,B}.$$

Слѣдовательно сообразно съ (637):

$$b^2 = \frac{AT - G^2}{B\,(A-B)} \ldots\ldots\ldots\ldots (638)$$

Перемноживъ 1-ое и 2-ое уравненія (635) и сообразуясь съ (637) и (638), получимъ:

$$\lambda^2 = \frac{(A-B)(G^2-CT)}{ABC} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (639)$$

Изъ (635) получимъ:

$$k^2 = \frac{(B-C)(AT-G^2)}{(A-B)(G^2-CT)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (640)$$

Если $G^2 > BT$ и если $A > B > C$, то получаемъ дѣйствительныя рѣшенія для постоянныхъ a, b, c, λ, k. Вставляя ихъ въ (633), получимъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ въ конечной формѣ. Уравненія (633) и суть окончательные интегралы дифференціальныхъ уравненій (618).

§ 278. Моменты количества движенія относительно неподвижныхъ осей. Въ 143-мъ мы видѣли, что моментъ количества движенія около неподвижной оси z равенъ

$$\Sigma m \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (641)$$

Опредѣляя моментъ количества движенія тѣла, вращающагося около неподвижной точки, то-есть полагая $u = v = w = 0$, получимъ изъ (597)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= z\omega_y - y\omega_z \\ \frac{dy}{dt} &= x\omega_z - z\omega_x \\ \frac{dz}{dt} &= y\omega_x - x\omega_y \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (642)$$

Вставляя въ (641) получимъ:

$$\Sigma m \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m\,(x^2 + y^2) \,.\, \omega_z - (\Sigma mxz)\,\omega_x - (\Sigma myz)\,\omega_y.$$

Точно также выведемъ моменты количествъ движенія около осей y и x. Называя ихъ чрезъ h_x, h_y, h_z, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} h_x &= \Sigma m \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} \right) = [\Sigma m\,(y^2 + z^2)]\,\omega_x - (\Sigma myx)\,\omega_y - (\Sigma myz)\,\omega_z \\ h_y &= \Sigma m \left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} \right) = [\Sigma m\,(z^2 + x^2)]\,\omega_y - (\Sigma mzy)\,\omega_z - (\Sigma mxy)\,\omega_x \\ h_z &= \Sigma m \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right) = [\Sigma m\,(x^2 + y^2)]\,\omega_z - (\Sigma mxz)\,\omega_x - (\Sigma myz)\,\omega_y \end{aligned}\right\} (643)$$

§ 279. Моменты количества движенія относительно главныхъ центральныхъ осей инерціи. Если за подвижныя оси изберемъ главныя центральныя оси инерціи тѣла, движущагося около центра тяжести, а за непод-

вижныя оси изберемъ такія, которыя совпадаютъ съ подвижными въ моментъ t, то уравненія (643) дадутъ моменты количества движенія h_1, h_2, h_3 около главныхъ центральныхъ осей инерціи, если въ правыхъ частяхъ каждаго уравненія послѣдніе члены отбросимъ, а въ первыхъ сдѣлаемъ замѣну по формуламъ (336). Получимъ:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= A\omega_1 \\ h_2 &= B\omega_2 \\ h_3 &= C\omega_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (644)$$

§ 280. Начало площадей въ движеніи тяжелаго абсолютно-твердаго тѣла около центра тяжести. Абсолютно твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку въ центрѣ тяжести, можетъ совершать вращенія около всякой оси, проходящей чрезъ центръ тяжести, и потому движеніе такого тѣла подчиняется закону площадей. Но на основаніи этого закона, согласно (323) моменты количества движенія около неподвижныхъ осей координатъ остаются *постоянными* въ теченіи всего движенія и могутъ быть разсматриваемы какъ проложенія, на неподвижныя оси координатъ, момента количества движенія около нѣкоторой неподвижной оси, проходящей чрезъ начало и перпендикулярной, слѣдовательно, къ *неизмѣняемой* плоскости.

Слѣдовательно, моментъ количества движенія около такой неподвижной оси (*главный моментъ* количества движенія) тоже постояненъ, потому что проложенія его постоянны.

Положимъ, что тяжелое абсолютно твердое тѣло, подпертое въ центрѣ тяжести, приведено въ движеніе парою силъ мгновенныхъ (импульсивною парою), моментъ которой G.

Моментъ количества движенія будетъ равенъ моменту G импульсивной пары въ началѣ движенія. Но и въ теченіи всего послѣдующаго времени главный моментъ количества движенія останется, согласно сказанному въ настоящемъ параграфѣ, равнымъ G и направленъ перпендикулярно къ неподвижной плоскости.

Обозначимъ чрезъ α, β, γ углы, составляемые моментомъ G съ главными центральными осями инерціи тѣла. Тогда, согласно (644):

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1 &= G\cos\alpha \\ B\omega_2 &= G\cos\beta \\ C\omega_3 &= G\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (645)$$

Возведя эти равенства въ квадратъ и сложивъ получимъ:

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2.$$

Итакъ, уравненіе (620), выведенное въ § 276-мъ, есть не что иное, какъ *интегралъ площадей* отъ дифференціальныхъ уравненій (618).

Мы видимъ изъ сказаннаго въ этомъ параграфѣ, что количество движенія остается постоянно эквивалентнымъ импульсивной парѣ G, сообщившей тѣлу движеніе. Отсюда слѣдуетъ, что въ каждый послѣдующій моментъ движеніе можетъ быть остановлено импульсивною парою $(-G)$.

Косинусы угловъ наклоненія мгновенной оси вращенія къ главнымъ: центральнымъ осямъ инерціи тѣла пропорціональны ω_1, ω_2, ω_3.

Изъ (645), поэтому, слѣдуетъ: если движеніе тѣлу сообщено было вращеніемъ около оси, составлявшей съ главными центральными осями углы, косинусы которыхъ равны l, m, n, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ пропорціональны Al, Bm, Cn.

§ 281. Начало сохраненія живой силы въ движеніи тяжелаго абсолютно твердаго тѣла, вращающагося около центра тяжести. Согласно (335):

$$\frac{A\omega_1^2}{2} = \text{живая сила вращенія } \omega_1$$

$$\frac{B\omega_2^2}{2} = \text{живая сила вращенія } \omega_2$$

$$\frac{C\omega_3^2}{2} = \text{живая сила вращенія } \omega_3$$

Слѣдовательно живая сила изслѣдуемаго движенія равна

$$\frac{1}{2}\left[A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right].$$

Но сила тяжести уничтожается, въ разсматриваемомъ случаѣ, сопротивленіемъ точки опоры, помѣщенной въ центрѣ тяжести. Поэтому на тѣло не дѣйствуютъ никакія силы; работа внѣшнихъ силъ равна нулю, и потому, согласно (306) живая сила остается постоянною; обозначая ее черезъ $\frac{T}{2}$, получимъ:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T \quad \ldots\ldots\ldots (619)$$

уравненіе, выведенное нами въ § 275-омъ.

§ 282. Геометрическое представленіе движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около центра тяжести. Пользуясь только интеграломъ живой силы (619):

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T$$

и интеграломъ площадей (620):

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2$$

можно дать полную картину движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки, какъ это показалъ Poinsot и какъ это сейчасъ мы покажемъ.

Положимъ, что уравненіе центральнаго эллипсоида инерціи тѣла таково:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k \quad \ldots\ldots\ldots (646)$$

Пусть:

r = радіусъ-векторъ эллипсоида инерціи, направленный по мгновенной оси вращенія;

p = длина перпендикуляра, опущеннаго изъ центра этого эллипсоида на касательную къ нему плоскость, касающуюся въ концѣ r.

x, y, z = координаты конца радіуса-вектора r.

Уравненіе мгновенной оси будетъ

$$\frac{x}{\omega_1} = \frac{y}{\omega_2} = \frac{z}{\omega_3} = \frac{r}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots (647)$$

Подставляя въ (646) величины x, y, z изъ (647) получимъ:

$$(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2)\,\frac{r^2}{\omega^2} = k \quad \ldots\ldots (648)$$

Отсюда, согласно съ (619):

$$\frac{\omega}{r} = \sqrt{\frac{T}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots (649)$$

Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ (x, y, z) будетъ:

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = k,$$

гдѣ ξ, η, ζ текущія координаты плоскости.

Уравненіе перпендикуляра p будетъ, слѣдовательно:

$$\frac{\xi}{A\omega_1} = \frac{\eta}{B\omega_2} = \frac{\zeta}{C\omega_3} \quad \ldots\ldots\ldots (650)$$

Согласно съ (645) уравненіе (650) есть уравненіе перпендикуляра, возставленнаго изъ центра тяжести къ неизмѣняемой плоскости. Этотъ *перпендикуляръ*, слѣдовательно, *неподвиженъ.*

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что длина перпендикуляра p опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)}{k^2} \quad \ldots\ldots (651)$$

Отсюда, согласно съ (620), (647) и (649):

$$p^2 = k\frac{T}{G^2} \quad \ldots\ldots\ldots (652)$$

Итакъ: *перпендикуляръ p неподвиженъ, длина его постоянна и онъ перпендикуляренъ къ неизмѣняемой плоскости и къ касательной плоскости, проведенной въ концѣ мгновенной оси r (фиг. 102), такъ что эта касательная плоскость параллельна неизмѣняемой плоскости, и потому тоже неподвижна.*

Слѣдовательно: *движеніе происходитъ такъ, что эллипсоидъ инерціи тѣла постоянно касается неподвижной касательной плоскости, вра-*

щаясь около своего неподвижнаго центра, и мгновенною осью служитъ радіусъ-векторъ r проведенный въ точку касанія.

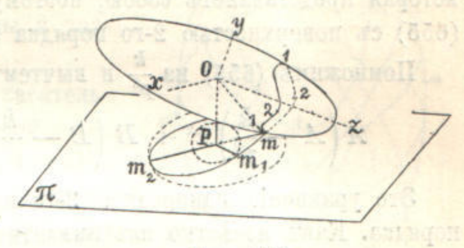
Изъ (649) имѣемъ:

$$\omega = r\sqrt{\frac{T}{k}} \qquad (653)$$

Слѣдовательно: *вращательная скорость ω около мгновенной оси r пропорціональна радіусу-вектору r эллипсоида инерціи.*

Согласно съ § 280-мъ *неподвижная касательная плоскость перпендикулярна къ моменту G импульсивной пары, сообщившей тѣлу движеніе.*

Точка прикосновенія касательной плоскости, представляющая собою конецъ радіуса-вектора, направленнаго по мгновенной оси, называется *полюсомъ.*



Фиг. 102.

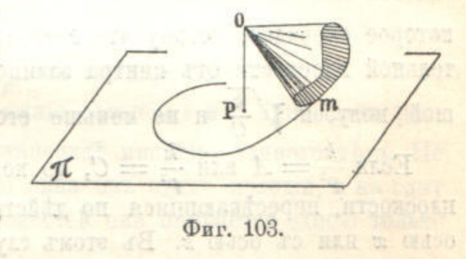
Кривая, описываемая *полюсомъ* на эллипсоидѣ инерціи, называется *полодіею* (фиг. 102).

Кривая, описываемая полюсомъ на неподвижной плоскости, называется *герполодіею* (фиг. 102).

§ 283. Аксоиды въ движеніи тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около центра тяжести. Соединивъ прямыми всѣ точки полодіи съ центромъ тяжести, который, согласно нашему предположенію, неподвиженъ, получимъ конусъ, описываемый *въ тѣлѣ* мгновенною осью r.

Соединивъ прямыми всѣ точки герполодіи съ центромъ тяжести, получимъ неподвижный конусъ, описываемый мгновенною осью *r въ пространствѣ.*

Конусъ, опирающійся на полодію, называется *подвижнымъ аксоидомъ*. Конусъ, опирающійся на герполодію, называется *неподвижнымъ аксоидомъ.*



Фиг. 103.

Въ каждый данный моментъ тѣло вращается на безконечно-малый уголъ около мгновенной оси, и потому въ теченіи безконечно-малаго времени dt мгновенная ось, по которой аксоиды касаются одинъ съ другимъ, остается неподвижною. Слѣдовательно во время движенія тѣла, неизмѣняемо соединенный съ нимъ *подвижной* аксоидъ катится по *неподвижному* аксоиду. При этомъ полодія катится по герполодіи, такъ что дуги, проходимыя полюсомъ по полодіи и по герполодіи одновременно, равны между собою.

Если ограничимъ подвижный конусъ полодіею, какъ это изображено на чертежѣ (фиг. 103), то движеніе можетъ быть представлено еще тѣмъ, что подвижный аксоидъ, имѣющій вершину въ неподвижномъ центрѣ тя-

жести, катится своимъ краемъ (полодіею) по герполодіи, лежащей въ неподвижной плоскости касательной къ эллипсоиду инерціи.

§ 284. Полодія. Изъ (651) слѣдуетъ:

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{k^2}{p^2} \quad \ldots \ldots \ldots (654)$$

Этому уравненію и уравненію эллипсоида инерціи

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k \quad \ldots \ldots \ldots (655)$$

должны удовлетворять координаты (x, y, z), которыя мы приняли за координаты полюса. Слѣдовательно (654) и (655) суть уравненія полодіи, которая представляетъ собою, поэтому, пересѣченіе эллипсоида инерціи (655) съ поверхностью 2-го порядка (654).

Помножимъ (655) на $\frac{k}{p^2}$ и вычтемъ изъ (654). Получимъ:

$$A\left(A - \frac{k}{p^2}\right)x^2 + B\left(B - \frac{k}{p^2}\right)y^2 + C\left(C - \frac{k}{p^2}\right)z^2 = 0 \ . (656)$$

Это уравненіе однородное 2-го порядка есть уравненіе конуса 2-го порядка. Какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, кривая, представляемая системою (654) и (655), представляется также системою (655) и уравненія (656), выводимаго изъ (654) и (655). Итакъ: полодія представляетъ собою пересѣченіе эллипсоида инерціи (655) съ конусомъ 2-го порядка (656).

Для того, чтобы конусъ (656) не былъ мнимымъ, необходимо соблюденіе условія:

$$A \geqq \frac{k}{p^2} \geqq C$$

которое равносильно такому условію:

$$\sqrt{\frac{k}{C}} \geqq p > \sqrt{\frac{k}{A}}$$

которое очевидно, потому что состоитъ въ томъ, что разстояніе p касательной плоскости отъ центра эллипсоида было бы не больше его большой полуоси $\sqrt{\frac{k}{C}}$ и не меньше его меньшей полуоси $\sqrt{\frac{k}{A}}$.

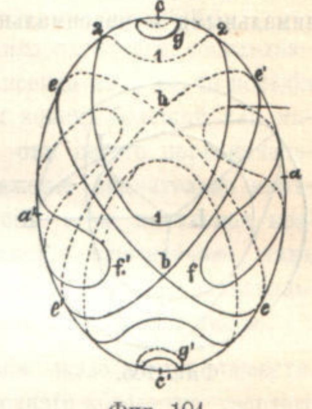
Если $\frac{k}{p^2} = A$ или $\frac{k}{p^2} = C$, то конусъ вырождается въ двѣ мнимыя плоскости, пересѣкающіяся по дѣйствительной прямой, совпадающей съ осью x или съ осью z. Въ этомъ случаѣ полодія превращается или въ точки c, c', лежащія въ концахъ большой оси или въ точки a, a', лежащія въ концѣ малой оси (фиг. 104).

Если $\frac{k}{p^2} = B$, то конусъ вырождается въ пару плоскостей, опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$x = \pm z\sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}} \quad \ldots \ldots \ldots (657)$$

и проходящихъ чрезъ среднюю ось. Въ этомъ случаѣ полодія состоитъ изъ эллипсовъ e и e' (фиг. 104).

Такъ какъ конусъ (656) имѣетъ тѣ же плоскости симметріи, какъ и эллипсоидъ, то каждая изъ остальныхъ полодій состоитъ изъ двухъ замкнутыхъ вѣтвей, симметрично расположенныхъ относительно діаметральныхъ плоскостей эллипсоида. Каждая такая вѣтвь имѣетъ *четыре* вершины 1, 2, 1,2 (фиг. 104), для которыхъ радіусъ векторъ принимаетъ минимальныя и максимальныя значенія. Въ теченіи движенія тѣла одна изъ вѣтвей полодіи катится по касательной плоскости, и ее именно мы и разсматриваемъ.



Фиг. 104.

Другая вѣтвь катится по другой касательной плоскости параллельной къ первой.

Мы полагаемъ, что $A > B > C$ и, соотвѣтственно этому, большая ось эллипсоида совпадаетъ съ осью z, средняя съ осью y, малая съ осью x. Обозначимъ вершины эллипсоида чрезъ a, a', b, b', c, c'. Сообразно съ тѣмъ, какъ направленъ моментъ G импульсивной пары, сообщившей тѣлу движеніе, и какъ великъ этотъ моментъ, получаемъ изъ (652) и различныя величины для p и для $\frac{k}{p^2}$.

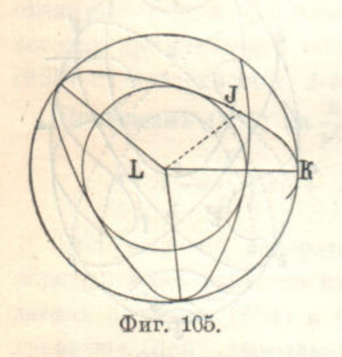
Если $\frac{k}{p^2} = A$, то конусъ (656) вырождается въ ось x, и полодія превращается въ вершину a или a'. Если $\frac{k}{p^2}$ немного меньше A, то полодія состоитъ изъ небольшой замкнутой кривой f, окружающей a, и изъ симметричной ей кривой f', окружающей a'. Съ уменьшеніемъ $\frac{k}{p^2}$ эти кривыя удаляются отъ a и a'. При $\frac{k}{p^2} = B$ полодія представляетъ собою два эллипса e и e'. Точно такъ же: при $\frac{k}{p^2} = C$ полодія состоитъ изъ точекъ c и c'; съ увеличеніемъ $\frac{k}{p^2}$ она обращается въ двѣ кривыя окружающія c и c'; съ дальнѣйшимъ увеличеніемъ $\frac{k}{p^2}$ эти кривыя удаляются отъ c и c'. Наконецъ при $\frac{k}{p^2} = B$ получаются прежніе эллипсы e и e'. Вотъ какъ расположены различныя полодіи на эллипсоидѣ инерціи даннаго тѣла. Но для даннаго движенія служитъ только одна изъ этихъ полодій, и на одну изъ неподвижныхъ касательныхъ плоскостей она опирается одною только вѣтвью.

Чрезъ каждую точку поверхности эллипсоида инерціи проходитъ одна какая-нибудь полодія. Изъ всѣхъ этихъ полодій опредѣляетъ данное движеніе та, которая проходитъ чрезъ точку m_0, въ которой эллипсоидъ инерціи пересѣкался мгновенною осью въ началѣ движенія. Эта полодія будетъ опираться въ теченіи движенія на ту касательную плоскость, которая касалась съ эллипсоидомъ инерціи въ точкѣ m_0 въ началѣ движенія.

§ 285. **Герполодія.** Радіусъ - векторъ ρ герполодіи, проведенный изъ основанія P перпендикуляра, опущеннаго изъ центра тяжести на неподвижную плоскость, служитъ катетомъ въ треугольникѣ, другой катетъ котораго p и гипотенуза r. Поэтому

$$\rho = \sqrt{r^2 - p^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (658)$$

Изъ теоріи полодіи мы видѣли, что r измѣняется между своими минимальными и максимальными значеніями, соотвѣтствующими вершинамъ эллипсоида. Слѣдовательно радіусъ-векторъ ρ герполодіи имѣетъ максимумъ и минимумъ ρ_1 и ρ_2. Поэтому герполодія заключается между концентрическими окружностями, описанными радіусами ρ_1 и ρ_2 изъ точки P (фиг. 105), и послѣдовательно касается этихъ окружностей.



Фиг. 105.

При этомъ, какъ это показали Hess и Sparre (Comptes rendus, 1884), герполодія не имѣетъ точекъ перегиба и обращена вогнутостью къ основанію P перпендикуляра.

Дуга m_1, m_2 герполодіи отъ точки соприкосновенія съ внутреннею окружностью до точки соприкосновенія съ внѣшнею окружностью проходится полюсомъ въ то время, какъ на полодіи онъ проходитъ дугу отъ одной ея вершины до слѣдующей, и потому равна $\frac{1}{4}$ всей полодіи. Поэтому, когда полюсъ пройдетъ на эллипсоидѣ всю полодію, онъ пройдетъ на герполодіи дугу, на которую опирается уголъ $4\,(m_1\,Pm_2)$. Если этотъ уголъ несоизмѣримъ съ π, то герполодія *не замкнутая* кривая. Если же этотъ уголъ *соизмѣримъ* съ π, то герполодія замкнута.

Если $\frac{k}{p^2} = A$ или $\frac{k}{p^2} = C$, то полодія представляетъ собою точку (вершину одной изъ осей эллипсоида) и герполодія представляетъ собою тоже точку, и тѣло вращается около оси, проходящей чрезъ эту точку.

Если $\frac{k}{p^2} = B$, то полодія, какъ мы видѣли, представляетъ собою эллипсъ, малая ось котораго равна $\sqrt{\frac{k}{B}}$. Движеніе происходитъ такъ, что этотъ эллипсъ опирается на неподвижную касательную плоскость, постоянно уменьшается, герполодія обращается въ спираль ассимптотически приближающуюся къ P; или r увеличивается до соприкосновенія герполодіи съ внѣшнею окружностью и потомъ уменьшается, приближаясь ассимптотически къ P; вся герполодія представляется кривою, состоящею изъ двухъ симметрично расположенныхъ спиралей.

Если эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія, то и полодія и герполодія суть окружности.

Если эллипсоидъ инерціи есть сфера, то полодія и герполодія суть точки.

§ 286. Устойчивость движенія около главныхъ осей. Если первоначальный импульсъ направленъ такъ, что тѣло начинаетъ вращаться около оси, составляющей весьма малый уголъ съ большою или съ малою осью эллипсоида инерціи, то полодія, какъ мы видѣли, представится маленькою замкнутою кривою, окружающею конецъ большой или малой оси. Слѣдовательно: если начальное вращеніе происходило около *большой* или *малой* оси, то такое движеніе *устойчиво*, такъ какъ, при малыхъ отклоненіяхъ оси вращенія, не произойдетъ большого измѣненія въ движеніи.

Если же первоначальное движеніе происходило около оси, составляющей весьма малый уголъ со среднею осью эллипсоида инерціи, то полодія будетъ большая замкнутая кривая, окружающая конецъ большой или малой оси; полюсъ, идя по этой кривой, уходитъ отъ своего первоначальнаго положенія на конечное разстояніе, и движеніе значительно измѣняетъ свой первоначальный характеръ. Поэтому, если начальное вращеніе происходило около *средней* оси, то движеніе *неустойчиво*, такъ какъ, при малѣйшемъ отклоненіи оси вращенія отъ своего первоначальнаго положенія, она будетъ отклоняться отъ него все болѣе и болѣе.

§ 287. Независимость вращательнаго движенія около центра тяжести. Перейдемъ къ какому угодно движенію свободнаго абсолютно твердаго тѣла, не имѣющаго ни одной неподвижной точки и подверженнаго дѣйствію какихъ угодно силъ.

Свободное тѣло способно вращаться около любой оси. Поэтому къ нему приложимо начало площадей, которое, по отношенію къ оси z, выражается уравненіемъ:

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma m\,(xY-yX)$$

Обозначая чрез $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, координаты центра тяжести и полагая

$$x=\bar{x}+x'$$

$$y=\bar{y}+y'$$

$$z=\bar{z}+z'$$

получимъ:

$$\Sigma m\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2}-y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)+\left(\bar{x}\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}-\bar{y}\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\right)\Sigma m=\Sigma m\,(xY-yX)$$

такъ какъ лѣвая часть измѣнится отъ перенесенія начала координатъ

Первоначальное положеніе начала координатъ произвольно, и мы можемъ его выбрать такъ, чтобы оно въ данный моментъ совпадало съ центромъ тяжести. Тогда $\bar{x}=0$; $\bar{y}=0$, и получимъ:

$$\Sigma m\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2}-y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)=\Sigma m\,(x'Y-y'X).$$

Такія же уравненія получимъ для моментовъ паръ направленныхъ по осямъ x и y. Эти уравненія совершенно такія, какія бы мы получили, если бы центръ тяжести былъ неподвиженъ въ началѣ координатъ. Но имэнно ими и опредѣляется вращеніе около центра тяжести.

Итакъ: *подъ вліяніемъ какихъ бы то ни было силъ вращеніе около центра тяжести происходитъ такъ, какъ будто бы онъ былъ неподвиженъ.*

Вотъ почему содержащееся въ предшествующихъ параграфахъ изслѣдованіе движенія около центра тяжести имѣетъ особенно важное значеніе оно особенно важно вслѣдствіе слѣдующихъ соображеній. Согласно началу; сохраненія движенія центра тяжести онъ движется такъ, какъ будто бы масса всего тѣла была сосредоточена въ немъ—какъ будто бы всѣ силы были приложены къ нему именно. Поэтому движеніе свободнаго твердаго тѣла можно изслѣдовать такъ: опредѣлить движеніе центра тяжести, какъ будто масса тѣла была въ немъ сосредоточена и всѣ дѣйствующія силы перенесены параллельно самимъ себѣ такъ, что точка ихъ приложенія находится въ центрѣ тяжести. Затѣмъ останется разсмотрѣть движеніе тѣла, уже свободнаго отъ дѣйствія силъ, около центра тяжести какъ около неподвижнаго и сложить оба эти движенія. Движеніе же около центра тяжести безъ вліянія внѣшнихъ силъ именно таково, какъ движеніе тяжелаго тѣла около центра тяжести, такъ какъ дѣйствіе тяжести въ этомъ случаѣ уничтожается противодѣйствіемъ точки опоры.

§ 288. Движеніе тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки, помѣщенной не въ центрѣ тяжести. Итакъ, изслѣдованіе движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около центра тяжести, изложенное въ §§ 275—286, представляетъ общій интересъ какъ главная часть изслѣдованія какого бы то ни было движенія свободнаго твердаго тѣла.

Но и движеніе тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки, несовпадающей съ центромъ тяжести весьма интересно, потому что таково движеніе коническаго маятника, жироскоповъ и волчковъ, а также въ особенности потому, что аналитическая механика въ своемъ постепенномъ развитіи сталкивается съ необходимостью рѣшить эту задачу, представляющую собою интегрированіе дифференціальныхъ уравненій (617) въ томъ случаѣ, когда правыя ихъ части не равны нулю. Это интегрированіе въ настоящее время исполнено только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

1) *Случай Poinsot*: движеніе около центра тяжести, изслѣдованное въ §§ 275—286. Въ этомъ случаѣ правыя части уравненій (617) равны нулю и (617) принимаютъ видъ (618). Этотъ случай особенно важенъ, какъ основаніе изслѣдованія какого-бы то ни было движенія свободнаго твердаго тѣла (планетъ, артиллерійскихъ снарядовъ, коническихъ пуль и пр.).

Случай Lagrange'а. Неподвижная точка находится на оси эллипсоида инерціи, который, для неподвижной точки, есть эллипсоидъ враще-

нія. Лагранжъ далъ полное аналитическое рѣшеніе этой задачи. Якоби далъ геометрическое представленіе, заключающееся въ слѣдующемъ:

Теорема Якоби. *Въ случаѣ Лагранжа тѣло движется по законамъ случая Пуансо въ другомъ воображаемомъ тѣлѣ, которое само движется по законамъ случая Пуансо.*

3) *Случай Ковалевской.* Наша соотечественница С. В. Ковалевская дала аналитическое рѣшеніе того случая, когда эллипсоидъ инерціи для точки опоры есть эллипсоидъ вращенія. такъ что $A = B = 2C$ и центръ тяжести лежитъ въ экваторіальной плоскости этого эллипсоида [1]). За свой мемуаръ Ковалевская получила большую премію Парижской Академіи Наукъ. Главная заслуга этого мемуара заключается въ томъ, что Ковалевская нашла, кромѣ извѣстныхъ интеграловъ площадей и живой силы, еще третій алгебраическій интегралъ. Авторъ настоящаго курса [2]) показалъ, что этотъ интегралъ, въ частномъ случаѣ, распадается на два интеграла, такъ что всего получается 4 алгебраическихъ интеграла достаточныхъ для опредѣленія обоихъ аксоидовъ. Проф. Г. Г. Аппельротъ показалъ [3]), что въ этомъ случаѣ нѣкоторая прямая равномѣрно вращается около неподвижной точки въ нѣкоторой плоскести.

Проф. Б. К. Млодзѣевскій [4]) показалъ, что въ нѣкоторомъ еще болѣе частномъ случаѣ ω_1, ω_2, ω_3 выражаются алгебраически чрезъ время t, такъ что, съ математической точки зрѣнія, движеніе въ случаѣ проф. Млодзѣевскаго проще движенія математическаго маятника (опредѣляемаго эллиптическими функціями). Проф. Н. Е. Жуковскій [5]) нащелъ геометрическое значеніе постояннаго k въ случаѣ Ковалевэкой, Такимъ образомъ работа С. В. Ковалевской получила широкое развитіе въ трудахъ русскихъ ученыхъ.

4) *Случай Hess'a.* Гессъ [6]) нашелъ также третій интегралъ въ томъ

---

[1]) *S. Kowalewski.* «Sur le problème de la retation d'un corps solide autour d'un point fixe». Acta Mathematica. XII, 1889.

[2]) *Н. Б. Делоне*: «Къ вопросу о геометрическомъ истолкованіи интсграловъ движенія твердаго тѣла около неподвижной точки, данныхъ С. В. Ковалев скою». Матем. Сборн. XIV.

«Алгебраическіе интегралы движенія тяжелаго твердаго тѣла». Спб. 1892

[3]) *Г. Г. Аппельротъ*: «Нѣкоторыя дополненія къ сочиненію Н. Б. елоне» Труд. Отд. Физ. Наук. Общ. Любит. Естествозн. VI.

«Задача о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки» Москва, 1893.

[4]) *Б. К. Млодзѣевскій.* «Объ одномъ случаѣ движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки». Матем. Сборн. XVIII.

[5]) *Н. Е. Жуковскій.* «Геометрическая интерпретація разсмотрѣннаго С. В. Ковалевскою случая движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки. Матем. Сборн. XXI.

[6]) *Hess.* Mathematische Annalen. t. 37.

случаѣ, когда

$$y_0 = 0;\quad A(B-C)\,x_0^{\,2} = C(A-B)\,z_0^{\,2};\quad A > B > C$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 координаты центра тяжести относительно главныхъ осей инерціи точки подвѣса; A, B, C моменты инерціи относительно этихъ осей. Этотъ случай былъ изслѣдованъ съ необыкновенною полнотою опять-таки русскими математиками [1]), при чемъ Б. К. Млодзѣевскій и П. А. Некрасовъ показали, что въ этомъ случаѣ задача приводится не къ однозначнымъ, а къ *многозначнымъ* функціямъ времени. Н. Е. Жуковскій показалъ, что движеніе тѣла въ этомъ случаѣ управляется движеніемъ сферическаго маятника и нѣкоторымъ локсодромическимъ движеніемъ.

Теорія движенія твердаго тѣла около неподвижной точки необыкновенно ясно и красиво изложена въ книгѣ Клейна (Theorie des Kreisels. von Klein und Sommerfeld), въ которой авторы попутно знакомятъ читателя съ общею теоріею функцій и съ теоріею эллиптическихъ функцій.

§ 289. Аналитическое изслѣдованіе движенія абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки. Теперь познакомимся съ формулами движенія абсолютно твердаго тѣла, употребляемыми въ большинствѣ сочиненій по механикѣ. Знакомство съ ними необходимо во-первыхъ потому, что это формулы классическія, и во-вторыхъ потому, что онѣ намъ понадобятся впослѣдствіи.

Изберемъ подвижную систему осей координатъ $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, неизмѣняемо соединенную съ тѣломъ, и неподвижную свстему осей координатъ Ox, Oy, Oz, имѣющую начало тоже въ неподвижной точкѣ. Имѣемъ формулы преобразованія координатъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta \\ y &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta \\ z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (659)$$

гдѣ a. b, c, a', b', c', a'', b'', c'', — суть косинусы угловъ, составляамыхъ подвижными осями координатъ съ неподвижными. Между этими косинусами, какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, существуютъ соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b^{2''} + c^{2''} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (660)$$

---

[1]) *П. А. Некрасовъ.* Матем. Сборн. XVI, XVIII.

Б. К. Млодзѣевскій и *П. А. Некрасовъ*: «Объ условіяхъ существованія ассимптотическихъ періодическихъ движеній въ задачѣ Гесса». (Труд. Отд. Физ. Наук. Общ. Люб. Еств.) VI, 1893.

Н. Е. Жуковскій. «Локсодромическій маятникъ Гесса». (Труд. Отд. Физ. Наук. Общ. Люб. Еств.), V,1893.

$$\left.\begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''a + b''b + c''c &= 0 \\ aa' + bb' + cc' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (661)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (662)$$

$$\left.\begin{aligned} bc + b'c' + b''c'' &= 0 \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0 \\ ab + a'b + a''b'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (663)$$

$$\left.\begin{aligned} a &= b'c'' - c'b''; \quad a' = b''c - c''b; \quad a'' = bc' - c'b \\ b &= c'a'' - a'c''; \quad b' = c''a - a''c; \quad b'' = ca' - b'c \\ c &= a'b'' - a''b'; \quad c' = a''b - b''a; \quad c'' = ab' - b'a \end{aligned}\right\} \quad \ldots (664)$$

Продифференцируемъ по t уравненія (659), принимая во вним что ξ, η, ζ, какъ координаты точки твердаго тѣла относительно осей неизмѣняемо соединенныхъ съ тѣломъ, не измѣняются. Получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \xi\frac{da'}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{dc'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \xi\frac{da''}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (665)$$

Производныя, стоящія въ лѣвыхъ частяхъ этихъ уравненій. суть проложенія скорости точки m на *неподвижныя* оси. Обозначая чрезъ u, v, w проложенія этой скорости на оси *подвижныя*, получимъ по правиламъ аналитической геометріи:

$$\left.\begin{aligned} u &= a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} \\ v &= b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt} \\ w &= c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (666)$$

Дифференцируя 1-ое изъ уравненій (663), получимъ:

$$c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = -(b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc'').$$

Называя чрезъ pdt каждую изъ величинъ, стоящую въ одной части этого уравненія и называя pdt и rdt части такихъ же уравненій получаемыхъ изъ остальныхъ двухъ уравненій (663) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} pdt &= cdb + c'db' + c''db'' = -(bdc + b'dc' + b''dc'' \\ qdt &= adc + a'dc' + a''cd'' = -(cda + c'da' + c''da'' \\ rdt &= bda + 'bda' + b''da'' = -(adb + a'pb' + a''db'' \end{aligned}\right\} \quad (667)$$

Дифференцируя (662), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} ada + a'da' + a''da'' &= 0 \\ bdb + b'db' + b''db'' &= 0 \\ cdc + c'dc' + c''dc'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (668)$$

Помноживъ 1-ое изъ уравненій (665) на a, 2-ое на a', 3-е на a'' сложивъ и сообразуясь съ (667) и (668), получимъ:

$$u = q\zeta - r\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (669)$$

Такимъ же образомъ найдемъ два другія подобныя же уравненія, получаемыя также изъ (669) циклическою перестановкою. Всего получимъ три уравненія:

$$\left.\begin{aligned} u &= q\zeta - r\eta \\ v &= r\xi - p\zeta \\ w &= p\eta - q\xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (670)$$

Найдемъ теперь точки, не имѣющія скорости въ моментъ t, для которыхъ, слѣдовательно: $u = 0$; $v = 0$; $w = 0$. Для такихъ точекъ уравнерія (670) дадутъ:

$$\left.\begin{aligned} q\zeta - r\eta &= 0 \\ r\xi - p\zeta &= 0 \\ p\eta - q\xi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (671)$$

Отсюда:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (672)$$

Эти уравненія (672) показываютъ, что точки, неимѣющія скорости въ моментъ t, расположены на прямой, выражаемой этими уравненіями (672). Эта прямая и есть то, что мы называли мгновенно осью. Полагая $p^2 + q^2 + r^2 = n^2$ видимъ, что мгновенная ось составляетъ съ осями

координатъ углы, косинусы которыхъ равны

$$\frac{p}{n};\ \frac{q}{n};\ \frac{r}{n}.$$

Скорость V точки m получимъ изъ:

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 = (q\zeta - r\eta)^2 + (r\xi - p\zeta)^2 + (p\eta - q\xi)^2$$
$$= (p^2 + q^2 + r^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (p\xi + q\eta + r\zeta^2).$$

Если разстояніе точки m отъ O обозначимъ чрезъ R, то:

$$V^2 = n^2R^2 - n^2R^2\left(\frac{p\xi}{nR} + \frac{q\eta}{nR} + \frac{r\zeta}{nR}\right)^2$$
$$= n^2R^2\,[1 - cos^2\,(R, n)]$$
$$= n^2R^2\,sin^2\,(R, n).$$

Отсюда

$$V = nR\,sin\,(R, n).$$

Но $R\,sin\,(R, n)$ есть разстояніе δ точки отъ мгновенной оси. Слѣдовательно

$$V = \delta\,.\,n.$$

Но если ω есть угловая скорость около мгновенной оси, то:

$$V = \delta\omega.$$

Итакъ $n = \omega$. Поэтому p, q, r суть тѣ самыя проложенія угловой скорости ω на оси ξ, η, ζ, которыя мы обозначили чрезъ ω_1, ω_2, ω_3. Ихъ иначе называютъ вращеніями около осей ξ, η и ζ.

Пользуясь формулами этого параграфа, можно было бы изложить всю теорію вращенія тѣла около неподвижной точки, которую мы вывели, пользуясь пріемами англійскихъ математиковъ.

§ 290. Эйлеровы независимые углы. Формулы предыдущаго параграфа очень симметричны, но содержащіеся въ нихъ 9 косинусовъ a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' связаны между собою равенствами (660)—(664).

Эйлеръ показалъ, что достаточно трехъ угловъ для полнаго опредѣленія положенія подвижной системы осей координатъ, имѣющихъ общее начало съ неподвижными осями координатъ. Эти углы суть слѣдующіе (фиг. 106):

θ—составляемый осями z и ζ;

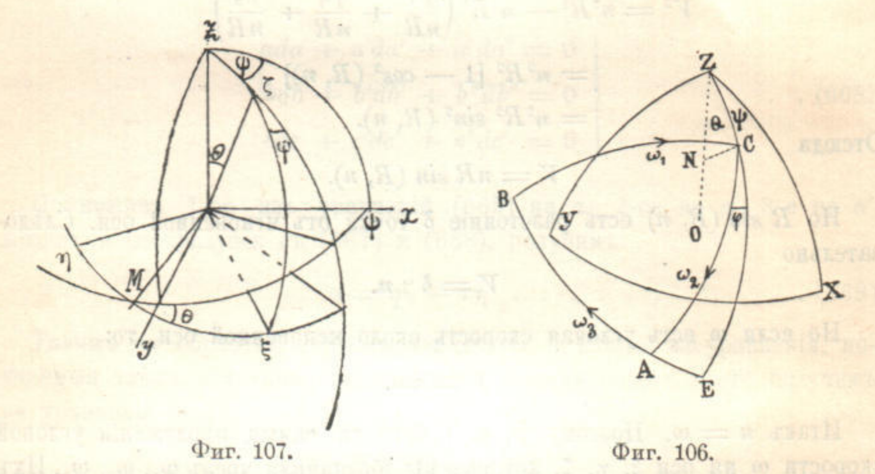
φ—составляемый плоскостью (z, ζ) съ плоскостью (ζ, ξ),

ψ—составляемый плоскостью (z, ζ) съ плоскостью (z, x).

Представимъ себѣ, для поясненія, что сфера описанная около O радіусомъ равнымъ единицѣ, пересѣкаетъ подвижныя оси ξ, η, ζ соотвѣтственно въ точкахъ A, B, C (фиг. 107), а неподвижныя оси x, y, z соотвѣтственно въ точкахъ X, Y, Z.

Если подвижныя оси совпадали прежде съ неподвижными, то мы, пользуясь только поворотами на углы ψ, θ, φ, можемъ привести подвижную систему въ настоящее ея положеніе (фиг. 106); для этого: 1) отодвинемъ плоскость (ζ, ξ) на уголъ ψ отъ плоскости (z, x) вращеніемъ подвижной системы около совпадающихъ осей ζ и z; 2) отодвинемъ, затѣмъ, ось ζ отъ оси z на уголъ θ вращеніемъ около оси η, и 3) отодвинемъ плоскость (ζ, ξ) отъ плоскости (z, ζ) на уголъ φ вращеніемъ около оси ζ на уголъ φ.

Условившись въ направленіи этихъ вращеній, получимъ вполнѣ опредѣленное положеніе подвижныхъ осей, совпадающее съ даннымъ. Слѣдовательно достаточно трехъ Эйлеровыхъ угловъ для опредѣленія положенія подвижныхъ осей. Эйлеровы углы независимы между собою; въ этомъ заключается большое ихъ преимущество, но недостатокъ ихъ въ томъ, что они даютъ менѣе симметричныя формулы.



Фиг. 107. Фиг. 106.

Найдемъ теперь соотношенія между ω_1, ω_2, ω_3 и θ, φ, ψ.

Опустимъ перпендикуляръ CN изъ C на OZ.

Слагающая скорости точки C перпендикулярная къ плоскости COZ равна $CN\,\frac{d\psi}{dt}$ или, что то же, $\sin\theta\,.\,\frac{d\psi}{dt}$.

Слагающая скорости точки C по ZC равна $\frac{d\theta}{dt}$.

Но движеніе точки C опредѣляется также вращеніями ω_1 и ω_2.

Поэтому взаимно перпендикулярныя скорости $\frac{d\theta}{dt}$ и $\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}$ изображаютъ ту же скорость точки C, какъ и взаимно перпендикулярная скорости ω_1 и ω_2. Слѣдовательно между тѣми и другими скоростями существуютъ такія же соотношенія, какъ между двумя системами плоскихъ координатъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi \\ \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} &= -\,\omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (673)$$

и наоборотъ:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{d\theta}{dt} \,.\, \sin\varphi - \frac{d\psi}{di} \sin\theta \,.\, \cos\varphi \\ \omega_2 &= \frac{d\theta}{dt} \,.\, \cos\varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin\theta \,.\, \sin\varphi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (674)$$

Опустивъ перпендикуляръ на OZ изъ точки пересѣченія E плоскостей (z, ζ) и (ξ, η) видимъ, что слагающая скорости точки E перпендикулярная къ ZE равна $\frac{d\varphi}{dt} \,.\, \sin(Z, E)$ или, что то же $\frac{d\psi}{dt} \cos\theta$.

Скорость точки A относительно E по EA равна $\frac{d\varphi}{dt} \,.\, \sin(C, A)$ или, что то же $\frac{d\varphi}{dt}$. Полная скорость точки A по AB равна, поэтому

$$\frac{d\psi}{dt} \cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Но она равна также ω_3. Поэтому

$$\omega_3 = \frac{d\psi}{dt} \cos\theta + \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (675)$$

Уравненія (674) и (675) представляютъ собою зависимость между эйлеровыми углами θ, φ, ψ, опредѣляющими положеніе тѣла въ пространствѣ и угловыми скоростями ω_1, ω_2, ω_2 около подвижныхъ осей.

Скорости ω_1, ω_2, ω_3 находятся путемъ указаннымъ въ §§ 274 и 275, то-есть интегрированіемъ уравненій (617). Положеніе тѣла въ данный моментъ находится затѣмъ интегрированіемъ уравненій (674) и (675) и опредѣленіемъ изъ нихъ эйлеровыхъ угловъ по полученнымъ ω_1, ω_2, ω_3 и по начальнымъ даннымъ.

Зная же эйлеровы углы, можно или непосредственно по нимъ представить себѣ положеніе твердаго тѣла, неизмѣняемо соединеннаго съ подвижными осями, или, если это нужно, опредѣлить по θ, φ, ψ косинусы a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' по формуламъ, приводимымъ въ аналитической геометріи. Эти формулы выводятся по извѣстной формулѣ сферической тригонометріи

$$\cos\alpha = \cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos A \quad \ldots\ldots \quad (676)$$

гдѣ α, β, γ—суть стороны сферическаго треугольника; A, B, C—противулежащіе углы.

Продолжимъ дугу (x, y) (фиг. 106) до пересѣченія M съ плоскостью $(\xi\eta)$. Тогда уголъ

$$xM\xi = \theta;\ My = \psi;\ Mx = 90^\circ + \psi;\ M\xi = 90^\circ - \varphi.$$

Прилагая формулу (676) къ сферическому треугольнику $xM\xi$, получимъ:

$$a = \cos(x, \xi) = -\sin\psi \,.\, \sin\varphi + \cos\psi \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\theta.$$

Прилагая (676) къ другимъ сферическимъ треугольникамъ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\sin\psi \,.\, \sin\varphi + \cos\psi \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\theta \\ a' &= \cos\psi \,.\, \sin\varphi + \sin\psi \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\theta \\ a'' &= -\sin\theta \,.\, \cos\varphi \\ b &= -\sin\psi \,.\, \cos\varphi - \cos\psi \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\theta \\ b' &= \cos\psi \,.\, \cos\varphi - \sin\psi \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\theta \\ b'' &= \sin\theta \,.\, \sin\varphi \\ c &= \sin\theta \,.\, \cos\psi \\ c' &= \sin\theta \,.\, \sin\psi \\ c'' &= \cos\theta \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; (677)$$

ОТДѢЛЪ V.

Относительное движеніе.

ГЛАВА I.

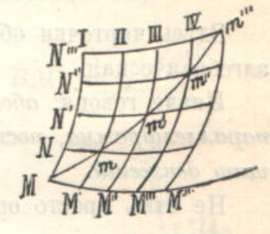
Относительное движеніе точки.

§ 291. Движеніе точки по линіи, которая сама движется. Представимъ себѣ, что точка m движется по кривой MN''' такъ, что въ послѣдовательные безконечно близкіе моменты оказывается въ M, N, N', N'', N'''. Положимъ (фиг. 108), что въ то же самое время кривая MN''' сама движется такъ, что въ моменты, упомянутые выше, принимаетъ положенія I, II, III, IV. Такое двоякое движеніе заставляетъ точку находиться послѣдовательно въ положеніяхъ M, m, m', m'', m'''.

Движеніе точки m по кривой MN''' называется *относительнымъ*.

Движеніе самой кривой MN''' называется *уносящимъ*.

Истинное движеніе точки чрезъ положенія M, m, m', m', m''' называется *абсолютнымъ*.



Фиг. 108.

Муха, летящая въ вагонѣ движущагося поѣзда, совершаетъ, относительно вагона движеніе (относительное). Движеніе вагона есть движеніе *уносящее*. Вслѣдствіе совокупности этихъ двухъ движеній муха совершаетъ, относительно мѣстности, по которой вагонъ ѣдетъ, *абсолютное* движеніе.

Лодка переправляющаяся чрезъ рѣку, совершаетъ движеніе *относительное* по водѣ, *уносящее* движеніе которой, слагаясь съ относительнымъ движеніемъ лодки, заставляетъ лодку выполнять *абсолютное* движеніе по отношенію къ берегамъ.

Можно сказать, что мы наблюдаемъ только относительныя движенія, потому что самая земля совершаетъ весьма сложное движеніе обращаясь около солнца, вращаясь около оси и участвуя въ общемъ полетѣ солнечной системы среди звѣздныхъ міровъ. Поэтому изслѣдованіе относительнаго движенія чрезвычайно важно для пониманія наблюдаемыхъ явленій.

§ 292. **Скорость въ относительномъ движенiи точки.** Обозначивъ чрезъ dt безконечно-малый промежутокъ времени, въ теченiи котораго точка проходитъ по относительной траекторiи (по движущейся кривой) элементъ MN (фиг. 108) и по абсолютной траекторiи элементъ Mm, замѣчаемъ, что въ предѣлѣ элементы MN, Mm и MM' можно разсматривать какъ прямолинейные, какъ элементы касательныхъ проведенныхъ въ M къ кривымъ MN''' и Mm''' и MM''' и что скорости;

v_r—относительнаго движенiя,

v_e—уносящаго движенiя и

v_a—абсолютнаго движенiя;

выражаются какъ:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= Lim\frac{MN}{dt} \\ v_e &= Lim\frac{MM'}{dt} \\ v_a &= Lim\frac{Mn}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (578)$$

Слѣдовательно скорости v_r и v_e пропорцiональны сторонамъ параллелограмма $MNmM$, скорость же v_a пропорцiональна его дiагонали.

Поэтому: *v_a есть геометрическая сумма скоростей v_r и v_e*, то-есть

$$\overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_e}$$

Здѣсь черточки обозначаютъ, что сумма берется геометрическая, а не алгебраическая.

Иначе говоря: *абсолютная скорость точки выражается дiагональю параллелограмма, построенною на скоростяхъ относительнаго и уносящаго движенiй.*

Не такъ просто опредѣляется ускоренiе абсолютнаго движенiя.

§ 293. **Ускоренiе абсолютнаго движенiя. Теорема Корiолиса.** Представимъ себѣ, что точка m проходитъ по относительной траекторiи MN (фиг. 109), въ теченiи безконечно-малаго промежутка времени dt, путь MN; сама же относительная траекторiя принимаетъ, въ концѣ этого промежутка времени, положенiе $M'N''$. Это перемѣщенiе относительной траекторiи можно разсматривать происшедшимъ отъ перенесенiя ея въ параллельное положенiе $M'N'$ и отъ поворота изъ положенiя $M'N'$ въ положенiе $M'N''$ около оси MO'.

Если бы на точку не дѣйствовали никакiя силы, а она двигалась бы только подъ влiянiемъ скоростей v_r, v_e, v_a, то она прошла бы равномѣрно и прямолинейно пути:

$$\left.\begin{aligned} MD &= V_r\,.\,dt \text{—въ относительномъ движенiи,} \\ MB &= V_e\,.\,dt \text{—въ уносящемъ движенiи} \\ MA &= V_a\,.\,dt \text{—въ абсолютномъ движенiи,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (680)$$

Подъ дѣйствіемъ же силъ точка пройдетъ другіе пути: ея скорости получатъ приращенія. Благодаря малости dt можно допустить, что въ теченіи dt силы не измѣняются ни по величинѣ, ни по направленію, вслѣдствіе чего движеніе происходитъ въ теченіи dt равномѣрно ускоренно, и, согласно (30), подъ вліяніемъ силъ точка m проходитъ еще пути:

$$DN = j_r \cdot \frac{(dt)^2}{2} \text{ въ относительномъ движеніи,}$$

$$AM' = j_e \cdot \frac{(dt)^2}{2} \text{ въ уносящемъ движеніи,}$$

$$AN'' = j_a \cdot \frac{(dt)^2}{2} \text{ въ абсолютномъ движеніи,}$$

гдѣ j_r, j_e, j_a—суть ускоренія въ этихъ движеніяхъ.

Эти пути, слагаясь съ путями (680), и приведутъ точку въ ея положенія N, M' и N''.

Соединимъ N съ N' прямою и построимъ параллелограммъ $DNN'C$. Фигура $M'CN'$, согласно построенію, равна фигурѣ MDN и всѣ соотвѣтствующія части этихъ фигуръ взаимно параллельны. Слѣдовательно AC и BM', какъ прямыя, соединяющія концы равныхъ и взаимно-параллельныхъ прямыхъ $M'C$ и BA, равны и взаимно параллельны такъ что:

$$AC = BM' = j_e \cdot \frac{(dt)^2}{2}.$$

Фиг. 109.

Фиг. 110.

Начертимъ, для ясности, отдѣльно (фиг. 110) фигуру $AN''N'C$. Здѣсь:

$$AN'' = j_a \frac{(dt)^2}{2}$$

$$CN' = DN = j_r \cdot \frac{(dt)^2}{2}$$

$$AC = j_e \cdot \frac{(dt)^2}{2}.$$

Опредѣлимъ сторону $N'N''$. Если мы примемъ за направленіе этого вектора направленіе отъ N' къ N'', то, припоминая, что послѣдняя сторона многоугольника равна геометрической суммѣ остальныхъ сторонъ, считаемыхъ въ обратномъ направленіи, получимъ изъ фиг. 110.

$$\overline{j_a \frac{(dt)^2}{2}} = \overline{j_e \frac{(dt)^2}{2}} + \overline{j_r \cdot \frac{(dt)^2}{2}} + \overline{N'N''} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (681)$$

Обозначивъ чрезъ $\omega \,.\, dt$ уголъ, на который $M'N'$ повертывается около оси OM', чтобы придти въ положеніе $M'N''$ и опустимъ изъ N'' перпендикуляръ $N''O$ на ось OM' (фиг. 109).

Тогда:

$$N'N'' = ON'' \,.\, \omega \,.\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (682)$$

гдѣ ω есть скорость вращенія, приводящаго $M'N'$ до совпаденія съ $M'N''$

Обозначимъ чрезъ α уголъ наклоненія элемента $M'N''$ къ оси OM., Изъ треугольника $OM'N''$ имѣемъ:

$$ON'' = M'N'' \,.\, \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (683)$$

Въ предѣлѣ $M'N''$ равно пути, пройденному точкою по относительной траекторіи равному $v_r dt$. Слѣдовательно (683) обращается въ

$$ON'' = v_r \,.\, \sin\alpha \,.\, dt$$

Подставивъ эту величину въ (682), найдемъ:

$$N'N'' = v_r \,.\, \sin\alpha \,.\, dt \,.\, \omega \,.\, dt = \omega \,.\, v_r \,.\, \sin\alpha \,.\, (dt)^2.$$

Поэтому (681) приметъ видъ:

$$\overline{j_a \,.\, \frac{(dt)^2}{2}} = \overline{j_e \,.\, \frac{(dt)^2}{2}} + \overline{j_r \,.\, \frac{(dt)^2}{2}} + \overline{\omega \,.\, v_r \,.\, \sin\alpha\,(dt)^2}$$

или:

$$\overline{j_a} = \overline{j_e} + \overline{j_r} + 2\,v_r\,\omega \,.\, \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (684)$$

Это уравненіе и выражаетъ собою слѣдующую теорему Коріолиса: *ускореніе абсолютнаго движенія равно геометрической суммѣ трехъ ускореній: ускоренія j_e уносящаго движенія, ускоренія j_r относительнаго движенія и особаго ускоренія $2v_r \,.\, \omega \,.\, \sin\alpha$.*

Итакъ: при относительномъ движеніи появляется особое ускореніе $2v_r \,.\, \omega \,.\, \sin\alpha$ равное удвоенному произведенію скоростей относительной v_r, вращательной ω и синуса угла α, составляемаго относительною скоростью съ осью вращенія относительной траекторіи.

Изъ чертежа (фиг. 109) замѣчаемъ слѣдующее:

ускореніе $2v_r \,.\, \omega \sin\alpha$ перпендикулярно къ относительной скорости v_r и къ оси вращенія OM' и направлено въ ту сторону, въ которую вращеніе перемѣщаетъ стрѣлку, направленную по относительной скорости.

§ 294. Сложное центробѣжное ускореніе. Изъ (684) слѣдуетъ:

$$j_r = j_a + (-j_e) + (-2v_r \,.\, \omega \,.\, \sin\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (685)$$

Величина $(-2v_r \,.\, \omega \,.\, \sin\alpha)$ называется *сложнымъ центробѣжнымъ ускореніемъ* или *ускореніемъ Коріолиса.* Согласно § 293: *сложное центробѣжное ускореніе перпендикулярно къ v_r и къ OM' и направлено въ сторону противуположную той, куда повертывается стрѣлка направленная по относительной скорости.*

Если мы будемъ считать его положительнымъ по этому направленію (въ сторону противуположную той, куда повертывается относительная скорость), то его величина равна:

$$+2v_r\,\omega \,.\, \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (686)$$

Итакъ, при относительномъ движеніи точки, имѣющей массу m, появляется особая сила равная $2mv_r \,.\, \omega \,.\, \sin\alpha$.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно ожидать появленія этой силы съ перваго взгляда на наблюдаемое явленіе. Положимъ, напримѣръ, что стрѣлокъ стрѣляетъ пулей изъ ружья, держа стволъ ружья горизонтально и, во время выстрѣла, быстро повертывается слѣва направо. Разсмотримъ движеніе пули, пока она идетъ въ стволѣ. Относительная ея траекторія въ стволѣ прямолинейна. Абсолютная траекторія, благодаря вращенію ствола, криволинейна. Понятно, что пуля, стремящаяся по основному закону Ньютона двигаться прямолинейно и принуждаемая вращеніемъ ствола описывать криволинейную абсолютную траекторію, будетъ давить на стѣнку ствола, и, при вращеніи стрѣлка́ *вправо*, давленіе это будетъ происходить на *лѣвую* стѣнку ствола. Это давленіе и есть та новая сила, которую даетъ ускореніе Коріолиса.

Разберемъ теперь это явленіе съ точки зрѣнія изложенной теоріи. Коріолисово ускореніе дѣйствуетъ въ сторону противуположную той, куда повертывается относительная скорость: вращали стволъ вправо—давленіе должно быть направлено влѣво. Ось, около которой вращался стрѣлокъ съ ружьемъ, была вертикальна, а стволъ горизонталенъ, слѣдовательно уголъ $\alpha = 90^\circ$ и $\sin\alpha = 1$. Давленіе пули на стволъ равно, слѣдовательно, $2\,V_r \,.\, \omega \,.\, m$, гдѣ V_r скорость пули въ стволѣ, m масса пули, ω угловая скорость вращенія стрѣлка́. Если положимъ, напримѣръ, что вѣсъ пули равенъ 20 грам. $=$ 0,02 килограм., скорость ω такова, что конецъ ствола, отстоящій отъ оси вращенія на 1 метръ, обладаетъ линейною скоростью $V = 1$ метръ въ секунду и скорость пули равна 100 метр. въ 1 секунду, то $\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{1} = 1$, масса m, согласно (14), равна $\frac{0{,}02}{0{,}981}$ килограммъ.

$$\alpha = 90^\circ, \quad \sin\alpha = 1$$

$$2\,V_r \,.\, \omega \,.\, \sin\alpha \,.\, m = \frac{2\,.\,100\,.\,1\,.\,1\,.\,0{,}02}{0{,}981} = \frac{4}{0{,}981} = 4{,}077 = \text{вѣсу 4077 грамм.}$$

Давленіе на стволъ происходитъ съ силою равною 4077 грамм., то есть немного большею чѣмъ вѣсъ 4 килограмм.

Замѣтимъ, однако, что давленіе на стволъ происходитъ только благодаря вращательному движенію. Дѣйствительно, посмотримъ, производитъ ли пуля давленіе на стволъ ружья, если ружье, какъ бы то ни было скоро, перемѣщается *поступательно* въ направленіи перпендикулярномъ къ стволу съ равномѣрною скоростью V. Отрѣшимся отъ дѣйствія тяжести. Съ точки зрѣнія теоремы Коріолиса здѣсь: $j_r = 0$; $j_e = 0$; $\omega = 0$, а потому и $j_a = 0$. Давленіе на стволъ равно нулю.

Но положимъ, что мы не довѣряемъ теоремѣ Коріолиса. Изслѣдуемъ движеніе способомъ, указаннымъ въ § 62-мъ. Возьмемъ ось z вертикально, ось y по первоначальному направленію ствола, ось x по направленію поступательнаго движенія ствола.

Уравненіе связи (ствола) будетъ

$$x = Vt$$

$$z = 0.$$

или

$$f(x, y, z) = x - Vt = 0$$

$$F(x, y, z) = z = 0.$$

Поэтому:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1; \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

Формулы подобныя формуламъ (164) дадутъ:

$$\cos(N', x) = 1 \;;\; \cos(N', y) = 0 \;;\; \cos(N', z) = 0$$

$$\cos(N'', x) = 0 \;;\; \cos(N'', y) = 0 \;;\; \cos(N'', z) = 1$$

Слѣдовательно формулы (177) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= N' \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= N'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (687)$$

Но 1-ое изъ этихъ уравненій не стоитъ и интегрировать такъ какъ интегралъ его (конечное соотношеніе между x и t) уже данъ написаннымъ выше уравненіемъ

$$x = Vt$$

изъ котораго слѣдуетъ $\frac{dx}{dt} = V$, и такъ какъ V принято по условіямъ

задачи постояннымъ, то $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$. Поэтому (687) даетъ $N' = 0$. Третье уравненіе, благодаря условію $z = 0$, даетъ $N'' = 0$. Слѣдовательно *боковое давленіе на стволъ равно нулю*, какъ и по теоремѣ Коріолиса.

Изъ другихъ двухъ уравненій и изъ начальныхъ данныхъ получаемъ $\frac{dz}{dt} = 0$; $z = 0$; $\frac{dy}{dt} = v_r$; $y = v_r \cdot t$. Исключая t изъ послѣдняго уравненія и изъ уравненія ствола, то есть изъ

$$y = v_r \cdot t$$
$$x = V \cdot t$$

получимъ уравненіе абсолютной траекторіи

$$y = \frac{v_r}{V} \cdot x$$

v_r и V постоянны. Слѣдовательно абсолютная траекторія есть прямая линія, наклоненная къ оси x подъ угломъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{v_r}{V}$.

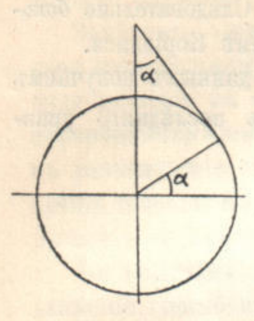
Какую же роль въ этой задачѣ играетъ основной законъ Ньютона? На первый взглядъ можетъ показаться, что движеніе было направлено по оси y и что, согласно 1-му и 2-му законамъ Ньютона, нужна особая сила, напримѣръ давленіе ствола на пулю для того, чтобы измѣнить траекторію по оси y въ траекторію $y = \frac{v_r}{V} x$. Но это только недоразумѣніе: скорость v_r по стволу не есть начальная скорость; начальная скорость слагается изъ скорости v_r по оси y и изъ скорости V по оси x; она равна поэтому $\sqrt{v_r^2 + V^2}$ и направлена по прямой, составляющей съ осью x такой уголъ φ, что $tg\varphi = \frac{v_r}{V}$, то есть какъ разъ по абсолютной прямолинейной траекторіи $y = \frac{v_r}{V} x$. Слѣдовательно точка движется именно по 1-му закону Ньютона: она получила начальную скорость $\sqrt{v_r^2 + V^2}$ по прямой $y = \frac{v_r}{V} x$ и движется равномѣрно по этой прямой.

Итакъ, сложное центробѣжное, или Коріолисово, ускореніе и возникающая съ нимъ сила происходятъ только отъ вращенія ω относительной траекторіи, какъ это показываетъ и формула этого ускоренія $2 v_r \omega \cdot sin\,\alpha$; если $\omega = 0$, то и это Коріолисово ускореніе равно нулю.

§ 295. Подмываніе береговъ рѣкъ. Коріолисовымъ ускореніемъ объясняется явленіе, наблюдаемое въ рѣкахъ, особенно въ тѣхъ, которыя имѣютъ меридіональное направленіе.

Положимъ, что рѣка течетъ прямо по меридіану съ сѣвера на югъ въ сѣверномъ полушаріи. Разсмотримъ движеніе частицы воды подъ географической широтою α. Изъ чертежа (фиг. 111) видимъ, что траекторія частицы m составляетъ съ осью вращенія земного шара уголъ α. Если скорость движенія частицы по теченію обозначимъ чрезъ v_r, то Коріолисово ускореніе будетъ $2 v_r \omega \cdot sin\,\alpha$. Оно вызоветъ силу $2 m v_r \cdot \omega \cdot sin\,\alpha$

направленную перпендикулярно къ оси вращенія земного шара и перпендикулярно къ рѣкѣ въ сторону противуположную отклоненію рѣки, происходящему отъ суточнаго вращенія земли около оси, то есть съ востока на западъ или, иначе говоря, въ сторону праваго берега рѣки. Частицы идущія у праваго берега поэтому напираютъ на него и подмываютъ правый берегъ; мало по малу направленіе рѣки перемѣщается въ сторону праваго берега, какъ это замѣчается особенно рѣзко въ нижнемъ теченіи Волги и даже у Саратова. Чѣмъ ближе къ экватору, тѣмъ менѣе $\sin\alpha$ и Коріолисово ускореніе меньше.



Фиг. 111.

§ 296. Аналитическое изслѣдованіе относительнаго движенія. Теорема Коріолиса можетъ быть доказана аналитическимъ путемъ; но прежде чѣмъ приступить къ этому доказательству необходимо познакомиться съ нѣкоторыми кинематическими формулами.

Представимъ себѣ *подвижную* систему прямоугольныхъ координатъ $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$, имѣющую начало въ O'. Представимъ себѣ также *неподвижную* систему координатъ Ox, Oy, Oz, имѣющую начало въ O. Пусть (ξ, η, ζ) суть координаты разсматриваемой матерьяльной точки m относительно подвижной системы; (x, y, z) координаты точки m относительно неподвижной системы; x_0, y_0, z_0 координаты подвижнаго начала O.

Между этими координатами существуютъ слѣдующія формулы преобразованія:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta \\ y &= y_0 + a'\,\xi + b'\,\eta + c'\,\zeta \\ z &= z_0 + a''\,\xi + b''\,\eta + c''\,\zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (688)$$

Задача наша состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить соотношенія между *относительнымъ* движеніемъ точки m въ подвижной системѣ осей координатъ, *уносящимъ* движеніемъ самой этой системы и *абсолютнымъ* движеніемъ точки въ системѣ неподвижныхъ осей координатъ.

Продифференцируемъ (688) по t, соображаясь съ тѣмъ, что точка можетъ двигаться относительно осей ξ, η, ζ, такъ что координаты ξ, η, ζ тоже мѣняются со временемъ. Получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \left(\xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt}\right) + a\frac{d\xi}{dt} + b\frac{d\eta}{dt} + c\frac{d\zeta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + \left(\xi\frac{da'}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{dc'}{dt}\right) + a'\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + c'\frac{d\zeta}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + \left(\xi\frac{da''}{dt} + \eta\frac{db''}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt}\right) + a''\frac{d\xi}{dt} + b''\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt} \end{aligned}\right\} . (689)$$

Величины, стоящія въ лѣвыхъ частяхъ этихъ уравненій (689), суть проложенія *абсолютной скорости* точки (x, y, z).

Величины, стоящія до скобокъ и въ скобкахъ правыхъ частей этихъ уравненій, суть производныя по времени отъ x, y, z, взятыя такъ, какъ будто ξ, η, ζ были постоянными. Слѣдовательно это—проложенія скорости точки, неизмѣняемо соединенной съ подвижными осями и совпадающей въ моментъ t съ точкою m. Это, слѣдовательно, проложенія скорости *уносящаго* движенія.

Величины, стоящія послѣ скобокъ въ правыхъ частяхъ уравненій (689), суть производныя по времени отъ x, y, z взятыя такъ, какъ будто x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' были постоянны. Это—проложенія скорости *относительнаго* движенія.

Слѣдовательно уравненія (689) выражаютъ собою то же, что (679): скорость абсолютнаго движенія есть геометрическая сумма скоростей движеній уносящаго и относительнаго.

Продифференцируемъ уравненія (689). Найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x_0}{dt^2} + \xi\frac{d^2a}{dt^2} + \eta\frac{d^2b}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c}{dt^2} + a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + \\
&\quad + c\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \frac{db}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \frac{dc}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right) \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y_0}{dt^2} + \xi\frac{d^2a'}{dt^2} + \eta\frac{d^2b'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c'}{dt^2} + a'\frac{d^2\xi}{dt^2} + b'\frac{d^2\eta}{dt^2} + \\
&\quad + c'\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\left(\frac{da'}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \frac{db'}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \frac{dc'}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right) \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2z_0}{dt^2} + \xi\frac{d^2a''}{dt^2} + \eta\frac{d^2b''}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c''}{dt^2} + a''\frac{d^2\xi}{dt^2} + b''\frac{d^2\eta}{dt^2} + \\
&\quad + c''\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\left(\frac{da''}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \frac{db''}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \frac{dc''}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right).
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (690)$$

Здѣсь вторыя производныя, стоящія въ лѣвыхъ частяхъ, суть проложенія *абсолютнаго* ускоренія.

Суммы первыхъ четырехъ членовъ правыхъ частей суть вторыя производныя, взятыя отъ x, y, z, полагая ξ, η, ζ постоянными. Это—проложенія ускоренія *уносящаго* движенія.

Суммы слѣдующихъ трехъ членовъ суть вторыя производныя взятыя отъ x, y, z, полагая x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' постоянными. Это—проложенія ускоренія *относительнаго* движенія.

Остающіеся затѣмъ члены въ правыхъ частяхъ суть проложенія того вектора, который называется обратнымъ сложнымъ центробѣжнымъ ускореніемъ, или обратнымъ Коріолисовымъ ускореніемъ. Обозначимъ эти

проложенія обратнаго Коріолисова ускоренія чрезъ X, Y, Z, такъ что:

$$\left.\begin{aligned} X &= 2\left(\frac{da}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{db}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt}+\frac{dc}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ Y &= 2\left(\frac{da'}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{db'}{dt}\cdot\frac{d\eta'}{dt}+\frac{dc'}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ Z &= 2\left(\frac{da''}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{db''}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt}+\frac{dc''}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (691)$$

Уравненія (690) выражаютъ ту же теорему Коріолиса какъ и уравненіе (684).

Помножимъ 1-ое изъ уравненій (691) на a, 2-ое на a', 3-е на a'' и сложимъ. Въ лѣвой части получимъ проложеніе обрaтнаго Коріолисова ускоренія на ось ξ, въ правой части:

$$\frac{d\xi}{dt}\left(a\frac{da}{dt}+a'\frac{da'}{dt}+a''\frac{da''}{dt}\right)+\frac{d\eta}{dt}\left(\frac{adb+a'db'+a''db''}{dt}+\right.$$
$$\left.+\frac{d\zeta}{dt}\left(\frac{adc+a'dc'+a''dc''}{dt}\right)\right.\cdot$$

Называя проложенія обратнаго Коріолисова ускоренія на оси ξ, η, ζ чрезъ J'_x, J'_y, J'_z и сообразуясь съ формулами (667), (668), получимъ:

$$J'_x = 2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right)\cdot$$

Такія же формулы можно получить для J'_y и J'_z. Всего получимъ 3 уравненія:

$$\left.\begin{aligned} J'_x &= 2\left(q\frac{d\zeta}{dt}-r\frac{d\eta}{dt}\right) \\ J'_y &= 2\left(r\frac{d\xi}{dt}-p\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ J'_z &= 2\left(q\frac{d\eta}{dt}-q\frac{d\xi}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (691)$$

Полагая $J'^2_x + J'^2_y + J'^2_z = J'^2$ и складывая получимъ:

$$J'^2 = 4\left[(p^2+q^2+r^2)\left(\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta^2}{dt}+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right)-\left(p\frac{d\xi}{dt}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+q\frac{d\eta}{dt}+r\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (693)$$

Но въ § 288 мы видѣли, что p, q, r суть проложенія вращенія ω на подвижныя оси, такъ что:

$$p^2+q^2+r^2=\omega^2$$

Не трудно видѣть, что

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = v_r^{\ 2},$$

такъ какъ $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ суть проложенія относительной скорости на подвижныя оси. Поэтому еще:

$$p\frac{d\xi}{dt} + q\frac{d\eta}{dt} + r\frac{d\zeta}{dt} = \omega\ .\ v_r\ .\ cos\ (\omega,\ v_r).$$

Слѣдовательно (693) принимаетъ видъ:

$$J'^2 = 4\,\omega^2 v_r^{\ 2}\,(1 - cos^2\,(\omega,\ v_r))$$

или

$$J' = 2\,\omega\,v_r\,sin\,(\omega,\ v_r).$$

Называя уголъ, составляемый относительною скоростью v_r съ осью вращенія ω, черезъ α, получимъ:

$$J' = 2\omega v_r\ .\ sin\,\alpha = \text{обратное Коріолисово ускореніе}$$

совершенно согласно съ § 292 и 293.

§ 297. Уравненія относительнаго движенія точки. Обозначимъ чрезъ F равнодѣйствующую силъ дѣйствующихъ на точку m, такъ что

$$mj_a = F.$$

Тогда теорема Коріолиса даетъ геометрическое равенство:

$$\overline{F} = \overline{mj_r} + \overline{mj_e}\,\overline{mJ'}.$$

Отсюда

$$\overline{mj_r} = \overline{F} - \overline{mj_e} - \overline{mJ'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (694)$$

Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

x, y, z координаты точки относительно *подвижныхъ* осей (которыя мы прежде обозначали буквами ξ, η, ζ);

X, Y, Z проложенія силы F на *подвижныя* оси;

$(je)_x$, $(je)_y$, $(je)_z$ проложенія *уносящаго* ускоренія на подвижныя оси;

J'_x, J'_y, J'_z проложенія обратнаго Коріолисова ускоренія J' на подвижныя оси.

Геометрическое равенство (694) равносильно слѣдующимъ тремъ уравненіямъ между проложеніями:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X - m\,(je)_x - mJ'_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - m\,(je)_y - mJ'_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z - m\,(je)_z - mJ'_z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (695)$$

Векторъ $(-mj_e)$, равный и противуположный произведенію уносящаго ускоренія на массу, называется *уносящею силою* или *центробѣжною силою.*

Векторъ $(-mJ')$, равный произведенію Коріолисова ускоренія на массу, называется *Коріолисовою силою* или *сложною центробѣжною силою.*

Уравненія (695) суть уравненія относительнаго движенія. Ихъ составъ показываетъ слѣдующее: *уравненія относительнаго движенія точки, отнесенной къ подвижнымъ осямъ координатъ, таковы, какъ будто при неподвижности этихъ осей кромѣ данныхъ силъ еще дѣйствуютъ на точку: уносящая сила и Коріолисова сила.*

Задачи на относительное движеніе можно рѣшать такъ, какъ будто бы уносящаго движенія не было, но не забывать при этомъ добавить къ дѣйствующимъ силамъ еще двѣ: уносящую и Коріолисову. Тогда получимъ уравненія (695), въ которыхъ j_e и J' считаются данными. Интегрируя (695) получимъ x, y, z какъ функціи времени t, то есть уравненія относительнаго движенія точки въ конечномъ видѣ.

Замѣтимъ, что при обозначеніяхъ, принятыхъ въ этомъ параграфѣ, уравненія (692) дадутъ:

$$\left.\begin{aligned} -mJ'_x &= -2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) \\ -mJ'_y &= -2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) \\ -mJ'_z &= -2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (696)$$

§ 298. Живая сила относительнаго движенія. Помноживъ 1-ое изъ уравненій (695) на dx, 2-ое на dy, 3-е на dz и сложивъ, получимъ:

$$\frac{dmv_r^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz - m(je)_x dx - m(je)_y dy - m(je)_z dz \; . \; (697)$$

такъ какъ при этомъ уничтожатся члены содержащіе J'_x, J'_y, J'_z, (благодаря уравненіямъ 696).

(697) показываетъ, что *дифференціалъ живой силы относительнаго движенія равенъ суммѣ элементарной работы дѣйствующихъ и элементарной работы уносящей силы.*

§ 299. Относительное равновѣсіе точки. Полагая въ (695) и въ (696) равными нулю первыя и вторыя производныя по времени отъ x, y, z, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} X - m(ie)_x &= 0 \\ Y - m(je)_y &= 0 \\ Z - m(je)_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (698)$$

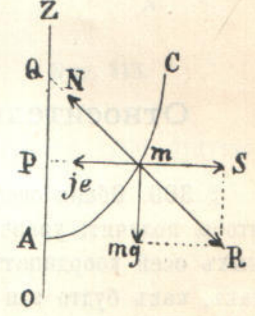
$$J' = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots (699)$$

Эти уравненія (698) и (699) можно разсматривать какъ уравненія относительнаго равновѣсія точки. Они показываютъ, что *въ относительномъ равновѣсіи точки равнодѣйствующая F данныхъ силъ уравновѣшивается уносящею (центробѣжною) силою.*

Въ относительномъ равновѣсіи точка m остается въ покоѣ на движущейся кривой, если не получаетъ начальной скорости.

Понятіе объ относительномъ равновѣсіи лучше всего выяснится на слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ. *Найти положеніе относительнаго равновѣсія точки m, находящейся на плоской кривой C, вращающейся около лежащей въ ея плоскости вертикали Oz съ равномѣрною скоростью ω, если между точкою m и кривою C не существуетъ тренія* (фиг. 112).



Фиг. 112.

Силы, дѣйствующія на точку m, суть: ея вѣсъ $(-mg)$ и давленіе N, оказываемое кривою C по ея нормали.

Согласно сказанному въ настоящемъ параграфѣ можно разсматривать кривую C какъ неподвижную и составить уравненіе равновѣсія между центробѣжною (уносящею) силою и дѣйствующими силами N и $(-mg)$.

Обозначимъ черезъ ρ разстояніе положенія равновѣсія точки m отъ оси Oz. Точка кривой C, совпадающая съ положеніемъ равновѣсія точки m, описываетъ горизонтальную окружность радіуса ρ. Поэтому ускореніе уносящаго движенія будетъ, согласно съ (112):

$$\omega^2\rho.$$

Оно направлено отъ m къ оси Oz. Слѣдовательно уносящая (центробѣжная) сила равна $m\omega^2\rho$ и направлена по Pm въ сторону отъ оси Oz. Для равновѣсія силъ $\omega m^2\rho$, $(-mg)$ и N необходимо и достаточно, чтобы $m\omega^2\rho$ и $(-mg)$ имѣли равнодѣйствующую направленную по нормали къ кривой C. Изъ подобныхъ треугольниковъ mPQ и mSR имѣемъ:

$$PQ = \frac{mg\rho}{m\omega^9\rho} = \frac{g}{\omega^2}.$$

Слѣдовательно, положенія относительнаго равновѣсія точки m находятся въ тѣхъ мѣстахъ кривой, гдѣ субнормаль равна $\frac{g}{\omega^2}$ и основаніе Q нормали лежитъ надъ основаніемъ P перпендикуляра mP.

Если кривая C есть парабола, ось которой вертикальна и нижняя точка лежитъ въ вершинѣ, то при скорости ω удовлетворяющей уравненію $p = \frac{g}{\omega^2}$ (гдѣ p параметръ параболы $x^2 = 2pz$), во всякой точкѣ параболы точка m будетъ въ равновѣсіи, если же p не равно $\frac{g}{\omega^2}$, то ни

въ какой точкѣ параболы точка m не находится въ равновѣсіи. Поэтому поверхность жидкости помѣщеній въ сосудѣ вращающемся около вертикали съ равномѣрною скоростью ω располагается по параболоиду вращенія, описанному параболою $x^2 = 2pz$, въ которой $p = \frac{g}{\omega^2}$.

Если кривая C есть окружность, то:

$$QP = R \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2}.$$

Съ увеличеніемъ ω увеличивается α. На этомъ основанъ регуляторъ Уатта для паровой машины.

ГЛАВА II.

Относительное движеніе и относительное равновѣсіе.

§ 300. Общія соображенія. Изъ предыдущей главы слѣдуетъ: для того чтобы получить уравненіе движенія системы точекъ относительно подвижныхъ осей координатъ Ox, Oy, Oz, можно составить уравненія движенія такъ, какъ будто эти оси были неподвижны, если только прибавить къ дѣйствующимъ силамъ еще, для каждой точки системы, силу ценробѣжную $(-mje)$ и силу Коріолисову $(-mJ')$.

Если система представляетъ собою абсолютно твердое тѣло, то, вообще говоря, центробѣжныя силы приводятся къ совокупности одной силы и одной пары. Но бываютъ случаи, когда центробѣжныя силы приводятся къ одной силѣ.

§ 301. Одинъ изъ случаевъ, когда центробѣжныя силы приводятся къ одной равнодѣйствующей. Положимъ, что заданное движеніе подвижныхъ осей Ox, Oy, Oz состоитъ въ томъ, что онѣ вращаются равномѣрно со скоростью ω около оси AB (фиг. 113) и что прямая Gz' проведенная чрезъ центръ тяжести даннаго твердаго тѣла параллельно AB есть одна изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи тѣла (фиг. 113).

Докажемъ, что въ этомъ случаѣ центробѣжныя силы приводятся къ одной равнодѣйствующей.

Примемъ Gz' и двѣ перпендикулярныя къ ней оси Gx', Gy' за оси координатъ. Пусть уравненія прямой AB будутъ:

$$x' = a$$
$$y' = b.$$

Центробѣжная сила, приложенная къ точкѣ m тѣла, будетъ:

$$m\omega^2 \,.\, \overline{mp}$$

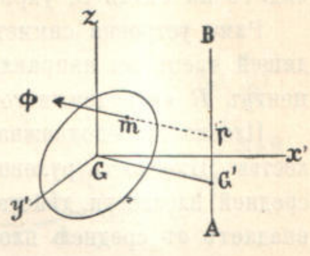
гдѣ mp разстояніе точки m отъ оси. AB. Проекціи этой центробѣжной

силы суть:

$$m\omega^2\,(x'-a)\colon m\omega^2\,(y'-b);\ 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (700)$$

слѣдовательно проложенія равнодѣйствующей всѣхъ такихъ силъ, дѣйствующихъ на всѣ точки тѣла, будутъ:

$$\Sigma\, m\omega^2\,(x'-a);\ \Sigma\, m\omega^2\,(y'-b);\ 0\ .\ (701)$$



Фиг. 113.

Но начало координатъ взято въ центрѣ тяжести. Поэтому

$$\Sigma\, mx' = 0;\ \Sigma\, my' = 0.$$

Слѣдовательно величины (701) получаютъ видъ:

$$-M\omega^2 a,\ -M\omega^2 b,\ 0,$$

гдѣ M—масса тѣла.

Проложенія момента равнодѣйствующей пары всѣхъ силъ (700) будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} -\Sigma\, m\omega^2 z'\,(y'-b) \\ -\Sigma\, m\omega^2 z'\,(x'-a) \\ -\Sigma\, m\omega^2\; ay'-bx') \end{array}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (702)$$

Но Gz', согласно условіямъ задачи, есть одна изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи; оси x' и y' можно взять по другимъ двумъ главнымъ центральнымъ осямъ; тогда

$$\Sigma\, mz'y' = 0;\ b\,\Sigma\, mz' = 0;\ \Sigma\, mz'x' = 0;\ a\,\Sigma\, mz' = 0;\ a\,\Sigma\, my' = 0;\ b\,\Sigma mx' = 0,$$

вслѣдствіе чего проложенія (702) момента равнодѣйствующей пары равны нулю. Что и требовалось доказать.

Итакъ, центробѣжныя силы приводятся въ данномъ случаѣ къ одной равнодѣйствующей, проложенія которой суть

$$-M\omega^2 a;\ -M\omega^2 b,\ 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (703)$$

Эта сила равна $M\omega^2\overline{GG'}$ и направлена по $\overline{GG'}$, гдѣ G' есть проекція центра тяжести G на ось AB.

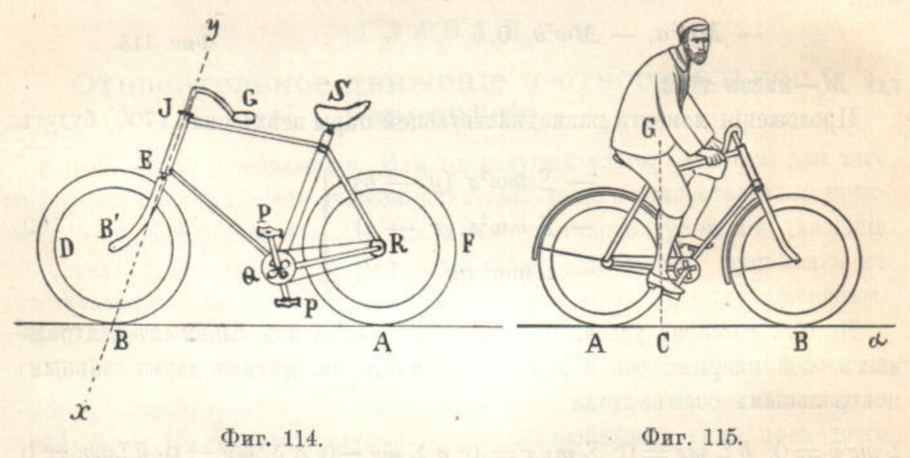
§ 302. Относительное равновѣсіе велосипеда. Приложимъ предыдущую теорію къ относительному равновѣсію велосипеда, изслѣдованному недавно въ интересной книгѣ Бурле (*Bourlet*, Traité des bicycles et bicyclettes).

Главная часть велосипеда, къ которой прикрѣпляются остальныя его части, состоитъ изъ пятиугольной *рамы* $RQEJS$ (фиг. 114). Сзади рамы находится ось R *«неподвижнаго»* (то-есть находящагося всегда въ плоскости рамы) колеса F. Впереди рамы находится *муфта* EJ, въ которую вставлена направляющая трубка, оканчивающаяся внизу, по выходѣ изъ

муфты вилкою EB', на которой насажена ось *«рулевого»* колеса D. Къ верхнему концу направляющей трубки прикрѣпленъ рулевой рычагъ, представляющій собою кривую почти горизонтальную трубку, оканчивающуюся рукоятками, которыя велосипедистъ держитъ въ рукахъ. Велосипедистъ сидитъ на сѣдлѣ S, укрѣпленномъ въ срединѣ верхней части рамы.

Рама устроена симметричною относительно *средней плоскости*, проходящей чрезъ ось направляющей трубки EJ, чрезъ центръ сѣдла S и чрезъ центръ R «неподвижнаго» колеса F.

Плоскость неподвижнаго колеса всегда совпадаетъ съ среднею плоскостью. Плоскость рулевого колеса велосипедистъ можетъ наклонять къ средней плоскости, дѣйствуя на рукоятки. Плоскость рулевого колеса совпадаетъ съ среднею плоскостью при такомъ положеніи рукоятокъ, когда

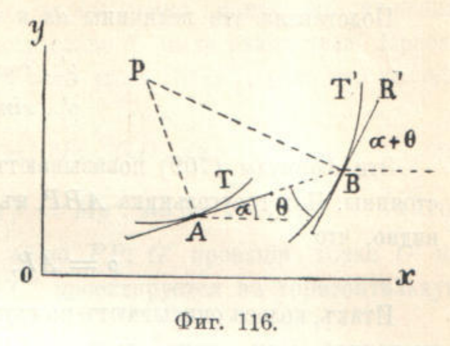


Фиг. 114. Фиг. 115.

онѣ одинаково удалены отъ средней плоскости, тогда средняя плоскость оказывается плоскостью симметріи всего снаряда, если пренебречь передаточною цѣпью и зубчатками, имѣющими сравнительно небольшую массу. Обозначимъ чрезъ A и B точки соприкосновенія задняго и рулевого колеса съ землею. Предположимъ, что ось xy направляющей трубки проходитъ чрезъ точку B, такъ что точка B есть точка, неизмѣнимо соединенная съ неподвижною среднею плоскостью, и длина AB не измѣняется отъ поворотовъ руля (состоящаго изъ рулевого колеса, направляющей трубки, рулевого рычага и рукоятокъ). Если грунтъ, по которому катится велосипедъ, плоскій, то AB есть пересѣченіе плоскости грунта со среднею плоскостью. Предположимъ (въ первомъ приближеніи), что велосипедистъ сидитъ спокойно, такъ что его центръ тяжести находится въ средней плоскости. Тогда общій центръ тяжести G всей машины, вмѣстѣ съ велосипедистомъ, неподвиженъ въ подвижной средней плоскости, и основаніе C (фиг. 115) вертикали, проходящей чрезъ G, неподвижно по отношенію къ точкамъ A и B.

Изслѣдуемъ прежде всего видъ линій, чертимыхъ колесами на землѣ

если плоскость рулевого колеса составляетъ постоянный уголъ со среднею плоскостью. Предположимъ, что грунтъ плоскій и примемъ плоскость грунта за плоскость чертежа (фиг. 116). Пусть A и B суть точки прикосновенія колесъ къ грунту; AR и BR' пересѣченія плоскостей колесъ съ плоскостью грунта. Согласно сказанному, направленія AR и AB совпадаютъ.



Фиг. 116.

Уголъ θ составляемый прямыми BR' и AB остается постояннымъ, при предположенномъ постоянствѣ наклоненія рулевого колеса къ средней плоскости, если наклоненіе средней плоскости къ вертикали не измѣняется. Прямыя AR и BR' направлены почти по касательнымъ къ линіямъ, чертимымъ колесами. Если принять ихъ за касательныя къ этимъ линіямъ, то можно показать, что точки A и B описываютъ окружности около общаго центра P (фиг. 116), находящагося на пересѣченіи перпендикуляровъ къ касательнымъ AR и BR'.

Дѣйствительно, пусть:

x, y — координаты точки A;

b = длина AB;

α — уголъ, составляемый прямою AB съ осью x;

$\alpha + \theta$ — уголъ, составляемый касательною BR' съ осью x;

x', y' — координаты точки B;

s и s' — дуги, описываемыя по грунту точками A и B.

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + b \,.\, \cos\alpha \\ y' &= y + b \,.\, \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (704)$$

Извѣстно, что

$$\left.\begin{aligned} dx &= ds \,.\, \cos\alpha; & dx' &= ds' \,.\, \cos(\alpha+\theta) \\ dy &= ds \,.\, \sin\alpha; & dy' &= ds' \,.\, \sin(\alpha+\theta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (705)$$

Поэтому дифференцируя (704), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} ds' \,.\, \cos(\alpha+\theta) &= ds \,.\, \cos\alpha - b \,.\, \sin\alpha \,.\, d\alpha \\ ds' \,.\, \sin(\alpha+\theta) &= ds \,.\, \sin\alpha + b \,.\, \cos\alpha \,.\, d\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots (706)$$

Изъ (706) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} ds' \,.\, \cos\theta &= ds \\ ds' \,.\, \sin\theta &= b d\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (707)$$

Если ρ и ρ' суть радіусы кривизны кривыхъ, чертимыхъ на грунтѣ

точками A и B, то, какъ извѣстно:

$$\left.\begin{array}{l} ds = \rho d\alpha \\ ds' = \rho' d\alpha \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (708)$$

Подставляя эти величины ds и ds' въ (707), получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \rho' \, . \, cos\,\theta = \rho \\ \rho' \, . \, sin\,\theta = b \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (709)$$

Эти формулы (709) показываютъ, что при θ постоянномъ ρ' и ρ постоянны. Изъ треугольника ABP, въ которомъ уголъ ABP равенъ $90°—\theta$, видно, что

$$\rho = AP, \quad \rho' = BP.$$

Итакъ, колеса описываютъ по грунту концентрическія окружности если θ постоянно. При этомъ прямая AB вращается около P съ постоянною скоростью, если скорость велосипеда не мѣняется.

Теперь изслѣдуемъ самое равновѣсіе велосипеда, если онъ совершаетъ описанное движеніе.

Изберемъ въ пространствѣ слѣдующую систему осей координатъ (фиг. 117). Примемъ за начало координатъ проекцію C общаго центра тяжести на грунтъ. Вертикаль, проходящую чрезъ C, примемъ за ось y; прямую AB за ось z; перпендикуляръ къ нимъ за ось x. Такимъ образомъ плоскость (x, y) перпендикулярна къ средней плоскости велосипеда и пересѣкаетъ ее по прямой CM, которая, положимъ, образуетъ съ вертикалью уголъ β = отклоненію велосипеда отъ вертикали. Замѣтимъ, что избранныя нами оси подвижны: онѣ слѣдуютъ за движеніемъ прямой AB, и слѣдовательно, при постоянствѣ угла θ, вращаются около оси, проходящей чрезъ P. Итакъ: *для того чтобы велосипедъ не упалъ и уголъ β оставался постояннымъ, необходимо и достаточно, чтобы велосипедъ былъ въ относительномъ равновѣсіи относительно осей x, y, z, вращающихся около вертикали, проходящей чрезъ P. Должно, слѣдовательно, существовать равновѣсіе между реакціею грунта, силою тяжести и центробѣжными силами.*

Сила тяжести равна Mg, гдѣ M масса велосипеда съ велосипедистомъ. Эту силу изобразимъ векторомъ GS (фиг. 118), приложеннымъ къ центру тяжести G.

Центробѣжныя силы приводятся (приблизительно) къ одной равнодѣйствующей F, приложенной къ G и направленной по $G'G$ перпендикулярно къ оси вращенія PP, согласно предыдущему параграфу. Такое допущеніе Бурле оправдываетъ слѣдующими соображеніями: ось CG можно принять приблизительно за ось симметріи; уголъ β обыкновенно не великъ, такъ что вертикаль GD можно приблизительно принять за ось симметріи, то-есть за одну изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи, и такимъ обра-

зомъ, согласно предыдущему параграфу, можно допустить, что центробѣжныя силы приводятся къ равнодѣйствующей.

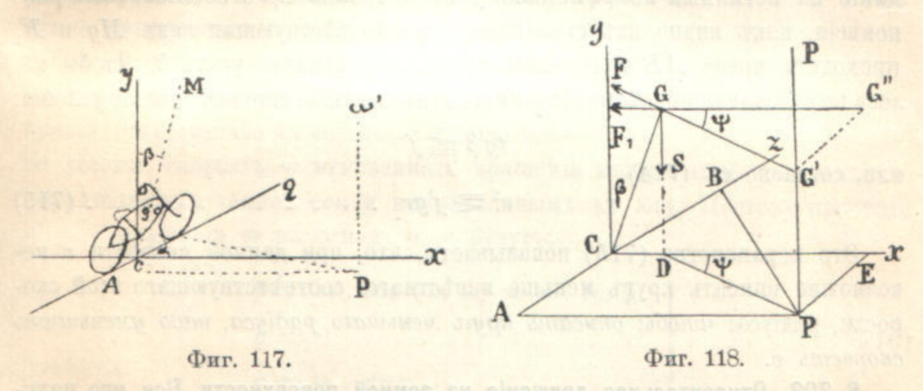
Для того чтобы исключить реакцію грунта, выразимъ, что статическій моментъ силъ F и Mg относительно оси AB долженъ быть равенъ нулю. Это все равно, что положить условіе, чтобы сумма моментовъ проекцій этихъ силъ на плоскость (x, y) относительно C была равна нулю. Проекція F_1 силы F равна $F \cos\psi$, гдѣ ψ есть уголъ FGF_1, такъ что условіе равновѣсія будетъ:

$$F \,.\, \cos\psi \,.\, \overline{GD} \,. = Mg \,.\, GD \,.\, tg\,\beta$$

или

$$F \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\beta = Mg \,.\, \sin\beta \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (710)$$

Пусть G' есть проекція точки G на PP; G'' проекція точки G' на плоскость (x, y). Треугольникъ $GG'G''$ проектируется на горизонтальную



Фиг. 117. Фиг. 118.

плоскость въ видѣ равнаго ему треугольника DPE, въ которомъ $DP = GG$ равно радіусу r окружности, описываемой центромъ тяжести G около оси PP; PE равно постоянной длинѣ AC, которую обозначимъ чрезъ c. Изъ треугольника DPE имѣемъ:

$$\sin\psi = \frac{c}{r} \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (711)$$

Центробѣжная сила F, согласно (106), равна $M\frac{v^2}{r}$:

$$F = M\,\frac{v^2}{r} \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (712)$$

Изъ (710), (711) и (712) получимъ:

$$tg\,\beta = \frac{v^2}{rg}\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}} \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (713)$$

Если r достаточно велико сравнительно съ c для того, чтобы можно было пренебречь величиною $\frac{c^2}{r^2}$ въ (713), то получимъ:

$$tg\,\beta = \frac{v^2}{rg} \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (714)$$

Равновѣсіе велосипеда *неустойчивое*. Дѣйствительно, если онъ отклоняется отъ вертикали, то β увеличивается, моментъ его вѣса $Mg\, GD\,.\, tg\,\beta$ увеличивается, моментъ $F\,.\, cos\,\psi\,.\, GD$ центробѣжной силы уменьшается уравненіе (710) разстраивается и β стремиться еще болѣе увеличиваться.

Для того чтобы не упасть, велосипедистъ поворачиваетъ рулевое колесо *въ ту сторону*, куда начинаетъ падать; этимъ онъ увеличиваетъ θ, вслѣдствіе чего точка P перемѣщается, AP, BP и r уменьшаются, центробѣжная сила $\frac{mv^2}{r}$ увеличивается, моментъ ея увеличивается и уравненіе (710) возстановляется.

Выведенное условіе равновѣсія было бы однако достаточно только въ случаѣ существованія безконечно большого тренія между колесами и грунтомъ, которое не давало бы колесамъ скользить въ сторону. Обратимъ вниманіе на истинный коэффиціентъ f этого тренія. Въ относительномъ равновѣсіи, какъ видно изъ сказаннаго, равнодѣйствующая силъ Mg и F_1 проходитъ чрезъ AB и составляетъ съ вертикалью уголъ β. Чтобы колеса не скользили вбокъ, необходимо, слѣдовательно, еще выполненіе условія:

$$tg\,\beta \leqq f$$

или, согласно съ (714)

$$v^2 \eqslantless fgr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (715)$$

Это неравенство (715) показываетъ, что, при данной скорости v невозможно описать кругъ меньше извѣстнаго, соотвѣтствующаго этой скорости, радіуса: *чтобы описать кругъ меньшаго радіуса, надо уменьшить скорость* v.

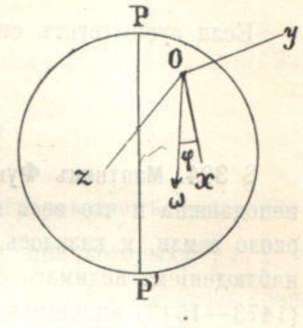
§ 303. Относительное движеніе на земной поверхности. Все, что находится на земной поверхности, участвуетъ въ сложномъ движеніи земного шара. До сихъ поръ, кромѣ сказаннаго въ § 295-мъ, мы не обращали вниманія на вліянія, оказываемыя движеніемъ земного шара на движеніе предметовъ близъ его поверхности. Обращеніе земли около солнца, поступательное движеніе всей солнечной системы вмѣстѣ съ землею среди звѣздныхъ міровъ, измѣненіе наклоненія земной оси къ эклиптикѣ и проч. — все это почти не оказываетъ вліянія на движеніе тѣлъ у земной поверхности. Но вращеніе земли около оси оказываетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ замѣтное вліяніе.

Разсмотримъ поэтому движеніе тѣлъ у земной поверхности, какъ относительное движеніе, при чемъ за уносящее движеніе примемъ только суточное вращеніе земли около оси. Пусть O (фиг. 119) есть точка неподвижная на земной поверхности (мѣсто наблюденія). Примемъ за ось z вертикаль, проходящую чрезъ O и направленную къ центру земного шара; за ось y примемъ касательную въ O къ параллельному кругу по направленію къ востоку; ось x проведемъ чрезъ O перпендикулярно къ осямъ y и z по направленію къ югу, полагая, что O находится въ сѣверномъ полушаріи. Разсмотримъ относительное движеніе точки m.

Данныя силы, дѣйствующія на m, суть: 1) притяженіе A землею; 2) равнодѣйствующая F заданныхъ силъ, проложенія которой обозначимъ чрезъ X, Y, Z.

Согласно изложенной теоріи можно считать земной шаръ неподвижнымъ, но прибавить при этомъ еще центробѣжную силу (mJe) и Коріолисову силу (mJ').

То, что мы называемъ вѣсомъ mg точки, есть равнодѣйствующая притяженія и центробѣжной силы ($-mJe$). Эта равнодѣйствующая направлена къ центру земли по вертикали.



Фиг. 119.

Опредѣлимъ Коріолисову силу. Обозначимъ чрезъ φ широту мѣста O и будемъ считать положительнымъ то вращеніе, которое, вращаетъ по направленію стрѣлки часовъ, если смотрѣть съ конца вектора, по которому оно откладывается, на начало этого вектора. Земля вращается съ запада на востокъ. Слѣдовательно угловая скорость ω мгновеннаго вращенія изобразится векторомъ $O\omega$ параллельнымъ земной оси и направленнымъ къ югу. Поэтому проекціи p, q, r вращенія ω на оси x, y, z будутъ:

$$\left.\begin{aligned} p &= \omega \, . \, \cos(\omega, x) = \omega \, . \, \cos\varphi \\ q &= 0 \\ r &= \omega \, . \, \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (716)$$

Поэтому, согласно (696), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} -mJ'_x &= 2m\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt} \\ -mJ'_y &= -2m\left(\sin\varphi \, . \, \frac{dx}{dt} - \cos\varphi \, . \, \frac{dz}{dt}\right) \\ -mJ'_z &= -2m\omega \, . \, \cos\varphi \, . \, \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (717)$$

Слѣдовательно уравненія относительнаго движенія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + 2m\omega \, . \, \sin\varphi \frac{dy}{dt} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - 2m\omega\left(\sin\varphi \frac{dx}{dt} - \cos\varphi \, . \, \frac{dz}{dt}\right) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= mg + Z - 2m\omega \, . \, \cos\varphi \, . \, \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (717)$$

Эти формулы вѣрны, конечно, только въ томъ случаѣ, если точка m настолько близка къ O, что ея вѣсъ можно считать равнымъ mg.

Для живой силы, согласно (697), получимъ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz + mgdz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (719)$$

Если существуетъ силовая функція U, то (719) принимаетъ видъ:

$$\frac{mv^2}{2} + U = mgz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (720)$$

§ **304. Маятникъ Фуко.** Было время, когда предполагали, что земля неподвижна и что весь небесный сводъ со всѣми звѣздами вращается около земли, и казалось, что такое мнѣніе оправдывается ежедневнымъ наблюденіемъ видимаго обращенія небесныхъ свѣтилъ. Только Коперникъ (1473—1543) впервые высказалъ мнѣніе, что суточное обращеніе свѣтилъ только кажущееся явленіе, а въ дѣйствительности земля обращается около оси. Галилея (1564—1642), защищавшаго идею Коперника, даже пытали за такое отступленіе отъ завѣтовъ Аристотеля и Птоломея. Во времена Коперника и Галилея доказательствомъ вращенія земли служила лишь необыкновенная простота движеній планетъ, вытекающая изъ предположенія о томъ, что всѣ планеты вмѣстѣ съ землею обращаются около солнца и земля вращается около оси. Впослѣдствіи, начиная съ Ньютона, было много попытокъ доказать вращеніе земли какимъ-либо опытомъ. Ньютону принадлежитъ идея доказательства, основаннаго на отклоненіи пути падающаго тѣла отъ вертикали, которое должно происходить вслѣдствіе вращенія земли. Но это отклоненіе чрезвычайно мало и потому трудно наблюдаемо.

Самое блестящее доказательство вращеніе земли далъ Фуко (Foucault) произведя въ пантеонѣ, въ Парижѣ, знаменитый опытъ съ маятникомъ. Фуко показалъ, что плоскость, въ которой качается маятникъ, состоящій изъ тяжелаго шара, подвѣшеннаго на длинной нити, должна, вслѣдствіе вращенія земли, вращаться со скоростью зависящею отъ скорости вращенія земли и отъ широты φ. Фуко произвелъ свой опытъ въ пантеонѣ съ маятникомъ, длина нити котораго была 67 метровъ, въ 1851 году. Изслѣдуемъ движеніе такого маятника.

Возьмемъ начало координатъ, расположенныхъ согласно § 303, въ точкѣ подвѣса маятника. Обозначимъ чрезъ l разстояніе отъ точки подвѣса до центра тяжести шара.

Кромѣ вѣса на маятникъ дѣйствуетъ натяженіе нити, которое мы обозначимъ чрезъ mN, гдѣ m масса шара. Вмѣсто шара лучше пользоваться, для уменьшенія сопротивленія оказываемаго воздухомъ, тяжелою чечевицею.

Проложенія натяженія mN нити суть:

$$-mN\frac{x}{l}\,;\quad -mN\frac{y}{l}\,;\quad -mN\frac{z}{l}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;\;(721)$$

Поэтому уравненія (718) примутъ въ настоящемъ случаѣ видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-N\frac{x}{l}+2\,.\,\omega\,.\,sin\varphi\,.\,\frac{dy}{dt}\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-N\frac{y}{l}-2\,\omega\left(sin\varphi\,.\,\frac{dx}{dt}-cos\varphi\,.\,\frac{dz}{dt}\right)\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=g-N\frac{z}{l}-2\,\omega\,.\,cos\varphi\,.\,\frac{dy}{dt}\end{aligned}\right\}\;.\;.\;(722)$$

Въ виду затрудненій, представляемыхъ интегрированіемъ этихъ уравненій, разсмотримъ только небольшія колебанія, при которыхъ $\frac{x}{l}$; $\frac{y}{l}$; ω суть столь малыя величины, что квадратами ихъ можно пренебречь сравнительно съ конечными величинами.

Тогда можно положить $z=l$, потому что уравненіе сферы, по которой движется центръ тяжести чечевицы даетъ:

$$z=l\left(1-\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и, пренебрегая величинами $\frac{x^2}{l^2}$ и $\frac{y^2}{l^2}$, получимъ $z=l$; значитъ можно допустить, что центръ тяжести чечевицы, движется въ горизонтальной плоскости.

Тогда 3-е изъ уравненій (722) даетъ:

$$N=g.$$

Поэтому два первыя уравненія изъ (722) принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-\frac{g}{l}\,x+2\,\omega\,.\,sin\,\varphi\,.\,\frac{dy}{dt}\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-\frac{g}{l}\,.\,y-2\omega\,.\,sin\varphi\,.\,\frac{dx}{dt}\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(723)$$

Это суть уравненія движенія центра чечевицы въ горизонтальной плоскости, въ которой онъ, приблизительно, движется при малыхъ отклоненіяхъ маятника отъ вертикали.

Помноживъ 1-ое изъ уравненій (723) на dx, 2-ое на dy, и сложивъ, получимъ:

$$\frac{dv^2}{2}=-\frac{g}{l}\,(xdx+ydy)\;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\;(724)$$

Интегрируемъ это уравненіе, пользуясь формулою (141), переходомъ къ полярнымъ координатамъ r и θ, и уравненіемъ:

$$d\,(r^2)-d\,(x^2+y^2)=2\,(xdx+ydy)$$

Получимъ:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l}\,r^2 + h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (725)$$

гдѣ h постоянное интеграціи.

Помножимъ 1-ое изъ уравненій (723) на $(-y)$, 2-е на x и сложимъ. Получимъ:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = -2\omega \,.\, sin\varphi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).$$

Интегрируемъ это уравненіе, переходя къ полярнымъ координатамъ и пользуясь формулою (135). Получимъ:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = -r^2 \;\; \omega \,.\, sin\varphi + C$$

гдѣ C постоянное интеграціи. Полагая:

$$\omega \,.\, sin\,\varphi = \omega' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (726)$$

получимъ:

$$r^2\,\frac{d\theta}{dt} = -\omega' \,.\, r^2 + C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (727)$$

Разберемъ 2 случая:

I. Маятникъ находится въ положеніи равновѣсія и получаетъ небольшой толчекъ, вслѣдствіе котораго начинаетъ качаться. Въ началѣ такого движенія $r = 0$. Слѣдовательно $C = 0$, и (726) принимаетъ видъ:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega'.$$

Отсюда:

$$\theta = \theta_0 - \omega' \,.\, t.$$

Слѣдовательно, маятникъ качается въ плоскости, вращающейся со скоростью $(-\omega')$, то есть, согласно съ (726), равномѣрно въ сторону противуположную ω, то есть противуположно вращенію земли: плоскость качанія вращается въ сторону движенія тѣни солнечныхъ часовъ. Полное обращеніе плоскости качанія маятника произойдетъ въ теченіи времени $\frac{2\pi}{\omega'}$, или, согласно (726), въ теченіи времени:

$$\frac{2\,\pi}{\omega \,.\, sin\,\varphi}.$$

Но $\frac{2\pi}{\omega} = 24$ часа. Слѣдовательно полное обращеніе плоскости качанія маятника равно:

$$\frac{24 \text{ часа}}{sin\,\varphi}$$

гдѣ φ широта мѣста. Для Парижа $\frac{24 \text{ часа}}{sin\,\varphi}$ почти равно 32 часамъ.

II. Маятникъ отклоненъ немного отъ положенія равновѣсія, такъ что начальная величина r не равна нулю; затѣмъ маятникъ предоставленъ дѣйствію силы тяжести и совершаетъ небольшія качанія.

Уравненіе (727) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$r^2\left(\frac{d\theta}{dt}+\omega'\right)=C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (729)$$

Положимъ:

$$\theta+\omega' t=\Psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (730)$$

Тогда уравненіе (729) принимаетъ видъ:

$$r^2 d\Psi=C dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (731)$$

Сравнивъ (731) съ (137), видимъ, что центръ чечевицы движется, подчиняясь закону площадей.

Уравненіе (731) выражено въ такихъ полярныхъ координатахъ, полярная ось которыхъ Ox' вращается со скоростью ω' около O въ направленіи противуположномъ вращенію земли, потому что если

$$\text{уголъ } xOx_1=\omega' t$$
$$\text{то уголъ } x_1Om=\theta+\omega' t=\Psi$$

Полагая въ (725), согласно (730):

$$\theta=\Psi-\omega' t$$

получимъ:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\left[\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2+\omega'^2-2\omega'\frac{d\Psi}{dt}\right]=-\frac{g}{l}r^2+h.$$

Полагая здѣсь, согласно съ (731),

$$r^2\frac{d\Psi}{dt}=C$$

пренебрегая весьма малымъ членомъ $r^2\omega'^2$ и обозначая чрезъ h' новое постоянное, получимъ:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2=-\frac{g}{l}r^2+h' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (732)$$

Это уравненіе имѣетъ такой же видъ какъ (725), поэтому оно произошло отъ уравненія:

$$\frac{dv^2}{2}=-\frac{g}{l}(x'dx'+y'dy') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (733)$$

такъ, какъ 725 произошло отъ 724. Въ (733) x' и y' суть координаты относительно системы осей вращающихся около O со скоростью ω' въ сторону противуположную вращенію земли, потому что Ox' есть упомянутая выше вращающаяся полярная ось.

Итакъ, движеніе центра чечевицы относительно вращающейся системы осей Ox', Oy', таково, что его интегралъ площадей (731) и интегралъ живой силы такіе же, какъ въ движеніи точки, притягиваемой центромъ пропорціонально разстоянію (см. задачу въ концѣ главы II Отд. I-го). Поэтому траекторія центра чечевицы m есть эллипсъ, вращающійся около своего центра O со скоростью ω' въ сторону противоположную вращенію земли (въ сторону вращенія тѣни солнечныхъ часовъ). Полный оборотъ этотъ эллипсъ совершитъ въ теченіи времени $\frac{2\pi}{\omega'}$. Точка же m движется по этому эллипсу такъ (см. задачу въ концѣ главы II Отд. I-го), что полное ея обращеніе по эллипсу совершается въ теченіи времени:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Посмотримъ какова большая ось этого эллипса и въ какую сторону точка m (центръ чечевицы) по нему обращается.

Въ опытѣ Фуко чечевица отклоняется на нѣкоторое начальное разстояніе r_0 отъ O и закрѣпляется въ этомъ положеніи помощью нити, другой конецъ которой укрѣпленъ въ стѣнѣ. Нить пережигаютъ пламенемъ свѣчи, и маятникъ начинаетъ качаться. Поэтому начальная скорость относительно осей O, x, y, z равна нулю. Поэтому начальныя величины $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ равны нулю. Начальная величина r_0 радіуса вектора r есть большая полуось эллипса, потому что въ началѣ $\frac{dr}{dt} = 0$ и слѣдовательно въ началѣ r имѣетъ или максимальную или минимальную (очевидно максимальную) величину.

Уравненіе (727), если въ немъ положить $r = a$; $\frac{d\theta}{dt} = 0$, даетъ $C = a^2\omega'$. Слѣдовательно, согласно съ (731), начальная величина $\frac{d\Psi}{dt}$ положительна и равна ω'. Поэтому точка m обращается въ сторону вращенія ω', то есть, согласно съ (726), въ сторону вращенія земли.

Итакъ: *въ опытѣ Фуко центръ чечевицы маятника обращается по эллипсу въ сторону вращенія тѣни горизонтальныхъ солнечныхъ часовъ, самъ же этотъ эллипсъ вращается въ сторону противуположную вращенію тѣни горизонтальныхъ солнечныхъ часовъ. Полное вращеніе по эллипсу совершается въ теченіи времени* $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. *Полное вращеніе эллипса совершается равномѣрно въ теченіи времени* $\frac{2\pi}{\sin\varphi}$, *гдѣ* φ *есть широта мѣста наблюденія.* Всѣ эти выводы подтвердились опытомъ Фуко.

Теорія маятника Фука можетъ быть дополнена еще слѣдующею теоремою.

Теорема Шёвилье. *Оси эллипса, описываемаго центромъ* m *чечевицы маятника Фуко относятся между собою какъ время полнаго обращенія по эллипсу ко времени полнаго вращенія эллипса.*

Доказательство. Пусть:

T — время полнаго вращенія эллипса,

T' — время полнаго обращенія точки m по эллипсу,

a — большая полуось,

b — малая полуось.

Мы видѣли, что:

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (734)$$

По закону площадей, двойная площадь сектора, описаннаго радіусомъ-векторомъ, равна Cdt. Площадь этого эллипса $= \pi ab$.

Слѣдовательно:

$$2\pi ab = CT' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (735)$$

Но мы видѣли, что:

$$C = a^2\omega' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (736)$$

Исключая C изъ (735) и (736), получимъ:

$$a^2\omega' = \frac{2\pi ab}{T'}$$

или, согласно съ (734):

$$\frac{b}{a} = \frac{T'}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (737)$$

что и требовалось доказать.

Въ опытѣ 1851 года $l = 67$ метр.; $a = 3$ метр.; $T = 32$ час.; $T' = 16$ сек. Слѣдовательно:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{7200}.$$

Отсюда:

$$b = \frac{3000}{7200} \text{ миллим.} < \frac{1}{2} \text{ миллим.}$$

Большая ось эллипса равнялась 6 метрамъ, малая же была менѣе 1 миллиметра. Вотъ по какому растянутому эллипсу (почти по прямой) двигался центръ чечевицы маятника въ опытѣ Фуко.

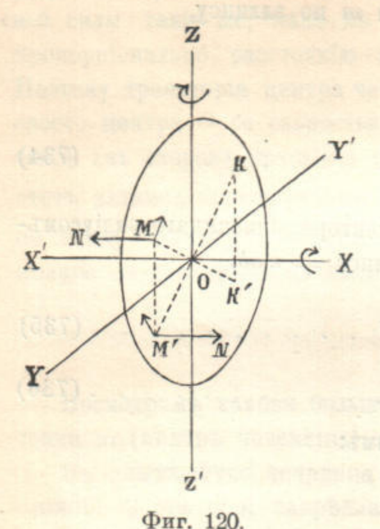
§ 305. Гироскопы. Представимъ себѣ безконечно тонкій матеріальный дискъ, лежащій въ плоскости (y, z) (фиг. 120) и вращающійся съ большою угловою скоростью Ω около оси x, проходящій черезъ его центръ O и перпендикулярной къ его плоскости. Положимъ, что самая ось x вращается при этомъ около оси z со скоростью ω.

По теоремѣ Коріолиса каждая частица диска будетъ давить на плоскости (y, z) съ силою N опредѣляемою формулою:

$$N = 2mv\,\omega \sin\alpha.$$

Обратимъ вниманіе на двѣ частицы M и M' диска симметрично рас-

положенныя относительно оси y. Пусть r разстояніе каждой изъ этихъ частицъ отъ O, α уголъ MOy. Тогда:



Фиг. 120.

$$v = r\Omega$$

$$N = 2m\,\omega\,\Omega r\,\sin\alpha$$

По теоремѣ Коріолиса давленіе частицы M направлено въ сторону вращенія ω; давленіе частицы M' направлено въ обратную сторону *). Эти давленія образуютъ пару $(N, -N)$, имѣющую моментъ:

$$2m\,\omega\,\Omega r\,.\,\sin\alpha\,.\,MM' = 4m\,\omega\,\Omega r^2 \sin^2\alpha.$$

Пара эта стремится придвинуть ось вращенія Ω къ оси вращенія ω.

Опредѣлимъ давленія, оказываемыя симметричными между собою точками k и k', разстоянія которыхъ отъ O тоже равны r, но соотвѣтственно перпендикулярны разстояніямъ отъ O точекъ M и M'. Эти давленія дадутъ другую пару. Складывая ее съ парой $(N, -N)$ получимъ пару, имѣющую моментъ:

$$4m\,\omega\,\Omega r^2\,\sin^2\alpha + 4m\,\Omega\,\omega r^2\,.\,\cos^2\alpha = 4m\,\omega\,\Omega r^2.$$

Поэтому моментъ L пары, происходящей отъ давленій, оказываемыхъ всѣми частицами диска, будетъ:

$$L = 4\omega\,\Omega\,\Sigma\,mr^2.$$

Еслибы мы имѣли не тонкій дискъ, а тѣло вращенія около оси x, то пришлось бы суммировать полученную формулу для L на цѣлый рядъ дисковъ, и Σmr^2 былъ бы моментомъ инерціи относительно оси x.

Еслибы ось вращенія ω составляла съ осью вращенія Ω нѣкоторый уголъ β, то надо было бы разложить ω на вращеніе перпендикулярное къ Ω и на вращеніе совпадающее съ Ω. При этомъ L зависитъ только отъ перваго изъ этихъ составляющихъ вращеній, угловая скорость котораго $= \omega \sin\beta$. Поэтому въ этомъ случаѣ:

$$L = 4\omega\,.\,\sin\beta\,.\,\Omega\Sigma\,mr^2.$$

Итакъ: *Если какое-нибудь тѣло вращенія вращается около своей оси со скоростью* Ω *и мы будемъ повертывать ось этого тѣла около нѣкоторой оси, образующей съ осью тѣла уголъ* β, *со скоростью* ω, *то явится*

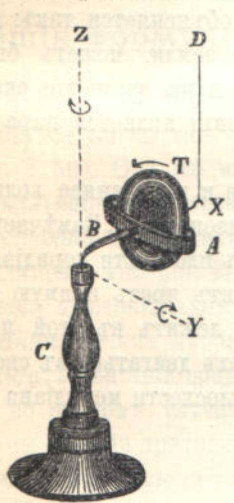
*) Согласно съ § 294-мъ точка давитъ на плоскость въ сторону противуположную вращенію плоскости, если удаляется отъ оси вращенія; точка давитъ въ сторону вращенія плоскости, если приближается къ оси.

пара съ моментомъ 4 $\omega\Omega \sin \beta\Sigma mr^2$, стремящаяся повернуть ось тѣла къ оси сообщаемаго вращенія ω такъ, чтобы, при совпаденіи осей, оба вращенія ω и Ω совершались въ одну и ту же сторону.

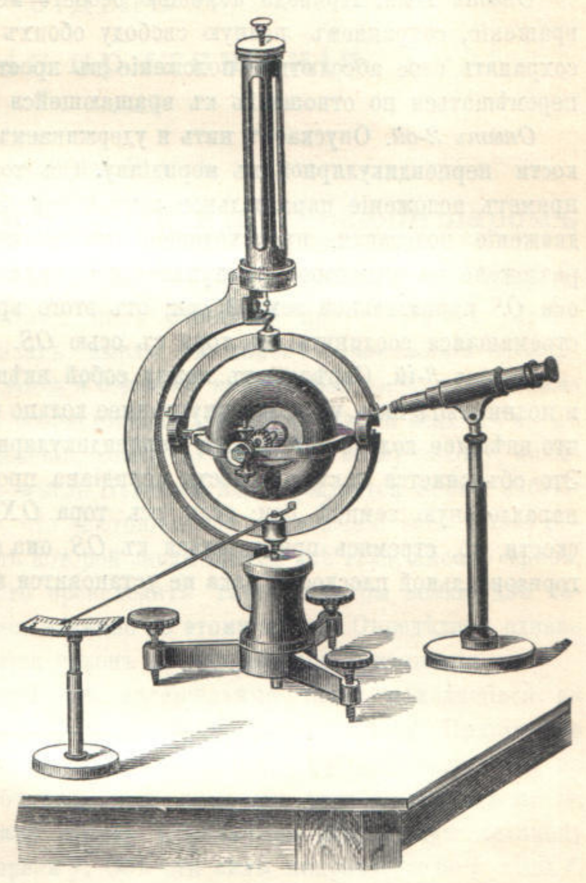
Снаряды, обнаруживающіе появленіе такой пары, называются гироскопами и совершаютъ движенія, кажущіяся на первый взглядъ весьма странными.

Наиболѣе замѣчательные изъ гироскоповъ — это гироскопы Фуко.

1-ый гироскопъ Фуко (фиг. 120*a*). Онъ состоитъ изъ тора T, ось котораго укрѣплена въ кольцѣ A, къ которому прикрѣпленъ штифтъ B съ остріемъ. Особымъ механизмомъ торъ приводится въ быстрое вращеніе Ω. Затѣмъ штифтъ B ставятъ остріемъ на твердую подставку C. Еслибы такъ поставить гироскопъ при неподвижности тора, то онъ упалъ бы; но при скоромъ вращеніи тора онъ не падаетъ, а вращается около оси z все съ большею и большею скоростью и падаетъ только тогда, когда вращеніе тора значительно затихнетъ. Это явленіе объясняется такъ: начиная падать, гироскопъ начинаетъ вращаться около оси oy. Вслѣдствіе этого является пара L, сообщающая гироскопу вращеніе около оси z. Вслѣдствіе же этого вращенія является новая пара L, стремящаяся повернуть ось ox къ оси oz; эта именно пара и уравновѣшиваетъ тяжесть гироскопа.



Фиг. 120*a*.


Фиг. 121.

2-ой гироскопъ Фуко. Въ этомъ гироскопѣ (фиг. 121) внутреннее кольцо, несущее ось тора, подвѣшено на призмахъ къ внѣшнему кольцу, подвѣшенному на нити, помѣщенной въ находящемся сверху цилиндрическомъ футлярѣ. Къ нижней части внѣшняго кольца придѣлано вертикальное остріе, проходящее въ отверстіе подставки. Кромѣ того къ внѣшнему кольцу придѣлана горизонтальная стрѣлка, ходящая надъ дугою, снабженною дѣленіями. Съ этимъ гироскопомъ можно продѣлать три опыта.

Опытъ 1-ый. Приведя помощью особаго механизма торъ въ быстрое вращеніе, сохраняемъ полную свободу обоихъ колецъ. Ось тора будетъ сохранять свое абсолютное положеніе въ пространствѣ и, слѣдовательно, перемѣщаться по отношенію къ вращающейся землѣ.

Опытъ 2-ой. Опускаемъ нить и удерживаемъ внѣшнее кольцо въ плоскости перпендикулярной къ меридіану. Ось тора начнетъ двигаться и приметъ положеніе параллельное земной оси. Это объясняется такъ: все движеніе подставки, происходящее отъ движенія земли, можетъ быть разложено на нѣкоторое поступательное движеніе и на вращеніе около оси OS параллельной земной оси; отъ этого вращенія является пара L, стремящаяся соединить ось тора съ осью OS.

Опытъ 3-ій. Скрѣпляютъ между собой внѣшнее и внутреннее кольцо и поднимаютъ нить, уставляя внутреннее кольцо горизонтально. Замѣчаемъ, что внѣшнее кольцо становится перпендикулярно къ плоскости меридіана. Это объясняется такъ: плоскость меридіана проходитъ чрезъ прямую OS параллельную земной оси; если ось тора OX не лежитъ въ этой плоскости, то, стремясь приблизиться къ OS, она будетъ двигаться въ своей горизонтальной плоскости, пока не установится въ плоскости меридіана *).

---

*) Изложеніе теоріи гироскоповъ заимствовано изъ брошюры проф. Н. Е. Жуковскаго: „Элементарная теорія гироскоповъ“. Отд. оттискъ изъ Вѣстн. Опыт. физ. и элем. матем. Кіевъ, 1888.

ОТДѢЛЪ VI.

Теорія притяженія.

ГЛАВА I.

Общія формулы притяженія и притяженіе шаромъ

§ 306. Ньютоніанское притяженіе. Ньютонъ показалъ, что планеты движутся по своимъ орбитамъ подъ вліяніемъ притяженія къ солнцу (см. § 56). Онъ же высказалъ мысль, что законъ *притяженія пропорціональнаго произведенію массъ и обратно пропорціональнаго квадратамъ разстоянія* представляетъ собою міровой законъ, присущій всякимъ двумъ частицамъ матеріи. Притяженіе, совершающееся по этому закону, называется ньютоніанскимъ, и мысль Ньютона подтверждается всѣми наблюденіями. Весьма вѣроятно, что ньютоніанское притяженіе есть только результатъ дѣйствія среды, въ которой заключаются всѣ тѣла, именно эфира, но во всякомъ случаѣ дѣло происходитъ такъ, какъ бы всякія двѣ частицы матеріи притягивались взаимно по этому закону. Опредѣлимъ однако точнѣе, въ чемъ выражается законъ ньютоніанскаго притяженія.

Положимъ, что имѣются двѣ матеріальныя точки, находящіяся на разстояніи r одна отъ другой и имѣющія массы m и m'. Присутствіе каждой изъ этихъ точекъ вызываетъ появленіе силы, дѣйствующей на другую массу, причемъ обѣ силы, изъ которыхъ одна дѣйствуетъ на m, другая на m', равны между собою. Обозначимъ абсолютную величину каждой изъ этихъ силъ чрезъ f. Обѣ эти силы направлены по r: сила f, дѣйствующая на m, направлена къ m'; сила f, дѣйствующая на m', направлена къ m. Законъ ньютоніанскаго притяженія выражается формулою:

$$f = C\frac{mm'}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (738)$$

Если точка m свободна, то присутствіе массы m' вызываетъ въ движеніи точки m ускореніе

$$j = C\frac{m'}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (739)$$

направленное къ m'.

Если точка m' свободна, то присутствіе точки m вызываетъ въ движеніи точки m' ускореніе

$$j_1 = C\frac{m}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (740)$$

направленное къ m.

Изъ (739) и (740) слѣдуетъ уравненіе:

$$\frac{j}{j_1} = \frac{m'}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (741)$$

показывающее, что *ускоренія двухъ точекъ, являющіяся вслѣдствіе ихъ взаимнаго ньютоніанскаго притяженія, обратно пропорціональны ихъ массамъ.*

Если одна изъ точекъ не свободна, то присутствіе другой заставляетъ первую производить давленіе равное f на препятствіе, мѣшающее первой точкѣ пріобрѣтать ускореніе, опредѣляемое одною изъ формулъ (731) или (740).

§ 307. Численное значеніе коэффиціента притяженія. Численное значеніе коэффиціента притяженія C въ формулѣ (738) зависитъ отъ выбора тѣхъ единицъ, которыми мы измѣряемъ массу, длину и силу.

Выберемъ единицу силы такъ, чтобы C равнялось единицѣ. Это весьма удобно для изслѣдованія притяженія, потому что тогда формула (738) пріобрѣтаетъ болѣе простой видъ:

$$f = \frac{mm'}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (742)$$

Но такая единица силы оказывается уже вполнѣ опредѣленною при данномъ выборѣ единицъ массы и длины. Дѣйствительно при $m = m' = 1$ и при $r = 1$ формула (742) даетъ $f = 1$. Слѣдовательно, при данномъ выборѣ единицъ массы и длины, мы уже *обязаны принять за единицу силы такую силу, съ которой притягиваются двѣ выбранныя единицы массы на единицѣ разстоянія другъ отъ друга.*

Та единица силы, которую приходится избрать для того, чтобы C равнялось 1, при томъ что граммъ, сантиметръ и секунда принимаются за единицы массы длины и времени, называется *астрономическою единицею силы.*

Посмотримъ, какъ велика астрономическая единица силы. Для этого выразимъ *вѣсъ* p массы граммъ у поверхности земли сперва въ динахъ, а потомъ въ астрономическихъ единицахъ силы. Мы видѣли въ § 14-мъ, что вѣсъ p одного грамма равенъ 981 динѣ.

$$p = 981 \text{ динѣ} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (743)$$

Съ другой стороны p равно силѣ, съ которой земля притягиваетъ одинъ граммъ, находящійся у ея поверхности.

Слѣдовательно, согласно съ (738):

$$p = C\frac{Mm}{R^2} \ldots \ldots \ldots \ldots (744)$$

гдѣ R радіусъ земли, m масса одного грамма. Обозначимъ плотность земли чрезъ δ. Тогда:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3\delta$$

$$R = 637100000 = 6371 \,.\, 10^5 \text{ сантиметровъ}$$

$$\delta = 5{,}67$$

$m = 1$ согласно предположенію, что за 1 массы принимаемъ массу граммъ.

Изъ (743) и (444) получаемъ:

$$C = \frac{981\,R^2}{Mm} = \frac{3\,.\,981\,.\,R^2}{4\pi R^3\delta} = \frac{3\,.\,981}{4\pi R\delta}.$$

Подставляя сюда приведенныя выше числа, получимъ:

$$C = \frac{1}{1543\,.\,10^4} = \frac{1}{15430000}.$$

Итакъ C почти въ 15 милліоновъ разъ меньше одного дина, который почти равенъ одному миллиграмму. Другими словами: граммъ и граммъ, помѣщенные на разстояніи одного сантиметра притягиваются съ силою равною всего лишь одной 15-ти милліонной долѣ миллиграмма. Такъ какъ плотность δ опредѣлена еще не совершенно точно, то можно принять круглымъ числомъ:

$$C = \frac{1}{15000000} = \frac{1}{15\,.\,10^6} \text{ динъ} \ldots \ldots (745)$$

Зная C, можемъ опредѣлять притяженіе (если за единицы примемъ сантиметръ, граммъ, дину) по формулѣ:

$$f = C\,\frac{mm_1}{r^2} = \frac{mm_1}{15\,.\,10^6\,.\,r^2} \text{ динъ} \ldots \ldots (746)$$

Напримѣръ можемъ рѣшить такую задачу: съ какою силою притягиваются двѣ точки, находящіяся на разстояніи 10 сантиметровъ, если масса каждой точки равна одному килограмму.

По формулѣ (746) получимъ:

$$f = \frac{1000\,.\,1000}{15000000\,.\,100} = \frac{1}{1500} \text{ динъ}.$$

Въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ принимать за единицу силы не *динъ*, а астрономическую единицу силы равную $\frac{1}{15000000}$ дина. Тогда можно пользоваться простою формулою:

$$f = \frac{m\,.\,m_1}{r^2} \ldots \ldots \ldots \ldots (742)$$

Можно изслѣдовать притяженія, происходящія по другимъ законамъ, представляющіяся другими функціями разстоянія; но ньютоніанское притяженіе особенно важно какъ міровой законъ, и какъ законъ, управляющій электрическими и магнитными явленіями.

§ 308. Общія формулы притяженія точки тѣломъ. До сихъ поръ мы разсматривали только взаимное притяженіе двухъ точекъ. Перейдемъ теперь къ изслѣдованію притяженія, оказываемаго на матеріальную точку m (фиг. 122) цѣлымъ тѣломъ. Это притяженіе очевидно слагается изъ притяженій, оказываемыхъ на точку m всѣми элементами тѣла.

Обозначимъ чрезъ D плотность тѣла, то есть массу, содержащуюся въ единицѣ объема. Тогда масса безконечно малаго параллелепипеда, имѣющаго объемъ $dx\, dy\, dz$, будетъ:

$$D\, dx\, dy\, dz.$$

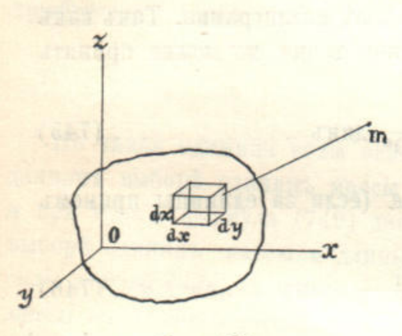
Пусть:

a, b, c координаты притягиваемой точки m,

x, y, z координаты притягивающаго элемента.

Принимая за элементъ тѣла параллелепипедъ $dx\, dy\, dz$, видимъ, что оказываемое имъ на точку m притяженіе равно:

$$\frac{m\,.\,D\, dx\, dy\, dz}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\;.\;.\;(747)$$



Фиг. 122.

Назовемъ чрезъ r разстояніе точки m отъ параллелепипеда $dx\, dy\, dz$. Тогда:

$$r=[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}\;.\;(748)$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ этимъ разстояніемъ съ осями координатъ суть:

$$\frac{(x-a)}{r}\;;\quad \frac{(x-b)}{r}\;;\quad \frac{(x-c)}{r}\;.\qquad(749)$$

Поэтому изъ (747) выводимъ слѣдующія проложенія X, Y, Z силы, съ которою элементъ $dx\, dy\, dz$ притягиваетъ точку m.

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{mD\, dx\,.\,dy\,.\,dz\,.\,(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}\\ Y&=\frac{mD\, dx\, dy\, dz\,.\,(x-b)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}\\ Z&=\frac{mD\, dx\, dy\, dz\,.\,(x-c)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(750)$$

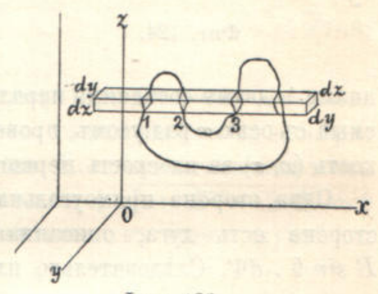
Для того, чтобы получить величины A, B, C проложеній на оси полнаго притяженія, оказываемаго на точку m всѣмъ тѣломъ, нужно суммировать всѣ притяженія, оказываемыя всѣми элементами тѣла — нужно, иначе говоря, интегрировать тройными интегралами выраженія (750), распространяя интеграцію на весь объемъ притягивающаго тѣла. Получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= \int\int\int \frac{mD\,(x-a)\,dx\,dy\,dz}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ B &= \int\int\int \frac{mD\,(y-b)\,dx\,dy\,dz}{[(r-a)^2+(y-b^2)+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ C &= \int\int\int \frac{mD\,(z-c)\,dx\,dy\,dz}{[(x-a^2)+(y-b^2)+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (751)$$

Если тѣло *однородно*, то есть плотность во всѣхъ его точкахъ одинакова, то одна изъ интеграцій каждаго трехкратнаго интеграла производится весьма просто, такъ какъ извѣстно, что:

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{[(x-a^2)+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Представимъ себѣ даже такой сложный случай, когда тѣло имѣетъ видъ, изображенный на чертежѣ (фиг. 123); параллелепипедъ, имѣющій основаніе $dy\,dz$ и высоту параллельную оси x, пересѣкаетъ поверхность притягивающаго тѣла нѣсколько разъ, именно въ элементахъ: 1, 2, 3, 4 . . . Обозначимъ разстоянія этихъ элементовъ отъ притягиваемой точки чрезъ $r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots$



Фиг. 123.

Часть интеграла, относящаяся къ такому параллелепипеду, будетъ:

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_6} + \ldots\right) dy\,dz \quad . \quad . \quad . \quad (752)$$

Пусть:

$d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$ суть вырѣзываемые параллелепипедомъ элементы поверхности;

N_1, N_2, N_3, N_4 внѣшнія нормали въ этихъ элементахъ;

(N_1, x), (N_2, x) углы наклоненія внѣщних нормалей къ оси x.

При такихъ обозначеніяхъ (752) принимаетъ видъ:

$$-\frac{d\sigma_1}{r_1}\cos(N_1, x) - \frac{d\sigma_2}{r_2}\cos(N_2\,x) - \frac{d\sigma_3}{r_3}\cos(N_3, x) - \frac{d\sigma_4}{r_4}\cos(N_4, x) - \ldots$$

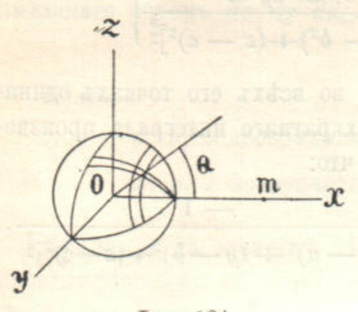
Вслѣдствіе этого получимъ:

$$A = -mD \int\int \frac{\cos(N, x)}{r} d\sigma$$

$$B = -mD \int\int \frac{\cos(N, y)}{r} d\sigma \quad \ldots \ldots \ldots (753)$$

$$C = -mD \int\int \frac{\cos(N, z)}{r} d\sigma$$

§ 309. Притяженіе, оказываемое шаромъ на внѣшнюю точку. Приложимъ формулы предыдущаго параграфа къ вычисленію притяженія оказываемаго шаромъ радіуса R на точку m, находящуюся *внѣ* шара на разстояніи a отъ его центра.



Фиг. 124.

Примемъ прямую, соединяющую центръ шара съ точкою m, за ось x и центръ шара за начало координатъ. Благодаря симметріи шара относительно оси x (фиг. 124) слагающія притяженія B и C равны нулю. Остается опредѣлить только A.

Примемъ ось x за полярную ось. За элементъ $d\sigma$ поверхности шара можно принять весьма малый прямоугольникъ, ограниченный двумя сосѣдними меридіанами и двумя сосѣдними параллелями. Обозначимъ чрезъ θ уголъ, составляемый съ осью x радіусомъ, проведеннымъ въ этотъ элементъ. Примемъ плоскость (x, z) за плоскость перваго меридіана и обозначимъ долготу чрезъ Ψ.

Одна сторона прямоугольнаго элемента равна дугѣ $Rd\Psi$; другая его сторона есть дуга, описанная радіусомъ $R \sin\theta$ параллели, равная $R \sin\theta \,.\, d\Psi$. Слѣдовательно площадь элемента равна:

$$d\sigma = R^2 \sin\theta \,.\, d\theta \,.\, d\Psi \quad \ldots \ldots \ldots (754)$$

Не трудно видѣть, что $\cos(N. x) = \cos\theta$. Поэтому 1-ое изъ уравненій (753) приметъ видъ:

$$A = -mD \int\int \frac{R^2 \sin\theta \,.\, d\theta \,.\, d\Psi \,.\, \cos\theta}{r} \ldots (755)$$

Здѣсь интеграція по θ должна быть произведена въ предѣлахъ отъ O до π; интеграція по Ψ—въ предѣлахъ отъ O до 2π; тогда поверхность сферы будетъ вся охвачена интегрированіемъ. Изъ фигуры видно, что:

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta} \quad \ldots \ldots \ldots (756)$$

Вставляя въ (755), получимъ:

$$A = -DmR^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta \,.\, d\Psi}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \,.\, \cos\theta}}$$

$$= - 2\pi m D R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \,.\, \cos\theta}} \quad . \; . \; . \; . \; (757)$$

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \,.\, \cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{aR} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \,.\, \cos\theta} +$$

$$+ \frac{1}{aR} \int \sin\theta \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \,.\, \sin\theta} \,.\, d\theta.$$

Слѣдовательно:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \,.\, \cos\theta}} = \frac{2R}{3a^2}.$$

Поэтому (757) дастъ:

$$A = - \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{Dm}{a^2}.$$

Но $\frac{4}{3} \pi R^3 \,.\, D$ есть масса M шара. Слѣдовательно:

$$A = - \frac{Mm}{a^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (758)$$

Сравнивъ (758) съ (742) находимъ: *шаръ притягиваетъ внѣшнюю точку такъ, какъ будто вся масса его была сосредоточена въ центрѣ.*

§ 310. Притяженіе шаромъ внутренней точки. Если притягиваемая точка лежитъ внутри шара, то $a < R$; но разстояніе $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}$ всегда считается положительнымъ. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ мы должны положить:

$$\sqrt{a^2 + R - 2aR\cos(0)} = R - a$$

но не $a - R$ какъ въ § 309. Поэтому теперь:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \,.\, \cos\theta}} = \frac{2a}{3R^2}$$

$$A = - \frac{4}{3} \pi D m a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (759)$$

Проведемъ чрезъ точку m внутреннюю сферу концентрическую съ даннымъ шаромъ. Объемъ этой сферы равенъ $\frac{4}{3} \pi a^3$; масса ея равна $\frac{4}{3} \pi a^3 D$. Назовемъ эту массу M'. Тогда (759) можно представить въ видѣ:

$$A = - \frac{4}{3} \frac{\pi a^3 Dm}{a^2} = - \frac{M'm}{a^2}.$$

Итакъ:

$$A = -\frac{M'm}{a^2} \qquad (760)$$

Сравнивая (760) съ (742) заключаемъ: *шаръ притягиваетъ точку m, расположенную внутри его, такъ, какъ будто бы въ центрѣ его была сосредоточена масса равная массѣ малаго шара, заключеннаго въ сферѣ, проходящей чрезъ точку m.*

Не трудно видѣть, что проложенія на оси координатъ притяженія шаромъ точки (x, y, z) будутъ:

$$-\frac{4}{3}\pi Dmx; \quad -\frac{4}{3}\pi Dmy; \quad -\frac{4}{3}\pi Dmz.$$

§ **311. Притяженіе сферическимъ слоемъ точки, которую онъ окружаетъ.** Положимъ, что точка m окружена слоемъ, заключеннымъ между сферическими концентрическими поверхностями радіусовъ R_2 и R_1. Обозначимъ разстояніе точки m отъ центра слоя чрезъ r. Положимъ R_2 есть радіусъ внѣшней сферы.

Если бы весь шаръ радіуса R_2 притягивалъ точку m, то это притяженіе, согласно предыдущему параграфу, равнялось бы притяженію F, оказываемому на m шаромъ радіуса r.

Если бы только шаръ радіуса R_1 притягивалъ точку m, то и это притяженіе было бы равно притяженію F шаромъ радіуса r.

Но притяженіе слоемъ очевидно равно разности этихъ равныхъ между собою притяженій F и, потому, равно нулю.

Итакъ: *сферическій слой не притягиваетъ окружаемую имъ точку.* Это теорема весьма важная въ теоріи электричества.

ГЛАВА II.

Теорія потенціала.

§ **312. Потенціалъ.** Притяженіе удобнѣе изучается съ помощью особой функціи, называемой потенціаломъ.

Потенціалъ въ точкѣ a, b, c, есть не что иное, какъ потенціальная функція притяженій, оказываемыхъ даннымъ притягивающимъ тѣломъ, или системою притягивающихъ точекъ, на точку, имѣющую массу равную единицѣ и помѣщенную въ (a, b, c).

Если притягивающія точки составляютъ сплошное тѣло, то потенціалъ V въ точкѣ (a, b, c) опредѣляется формулою:

$$V = \int\int\int \frac{dm}{r} \qquad (761)$$

гдѣ m масса притягивающихъ элементовъ, r разстоянія ихъ отъ данной точки (a, b, c).

Дѣйствительно (761) можно представить въ видѣ:

$$V = \int\int\int \frac{D\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \quad . \quad . \ (762)$$

Здѣсь предѣлы интеграціи, распространяющіе ее на притягивающее тѣло не зависятъ отъ координатъ (a, b, c) притягиваемой точки. Поэтому для дифференцированія V по a, b, c достаточно дифференцировать подъинтегральное выраженіе, при чемъ получится:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} &= \int\int\int \frac{D\,(x-a)\,dx\,dy\,dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial V}{\partial b} &= \int\int\int \frac{D\,(x-b)\,dx\,dy\,dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial V}{\partial c} &= \int\int\int \frac{D\,(x-c)\,dx\,dy\,dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (763)$$

Сравнивъ (763) съ (751) и соображаясь съ тѣмъ, что мы положили массу притягиваемой точки равною единицѣ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} &= A \\ \frac{\partial V}{\partial b} &= B \\ \frac{\partial V}{\partial c} &= C \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (764)$$

что и требовалось показать.

Не трудно видѣть, что въ томъ случаѣ, когда притягивающая система состоитъ изъ отдѣльныхъ точекъ m_1, m_2, $m_3 \ldots$, находящихся отъ точки a, b, c въ разстояніяхъ r_1, r_2, $r_3 \ldots$, потенціалъ въ (a, b, c) равенъ:

$$V = \Sigma\,\frac{m}{r} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (765)$$

Всякое направленіе s можно принять за одну изъ осей координатъ; поэтому слагающая притяженія по направленію s, оказываемаго данною притягивающею системою на точку, имѣющую массу равную единицѣ, равна

$$\frac{\partial V}{\partial s} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (766)$$

Потенціалъ въ точкѣ (a, b, c) обуславливаемый данною притягивающею системою, есть, какъ мы видимъ, функція координатъ этой точки.

Присутствіе данной притягивающей системы обусловливаетъ въ каждой точкѣ пространства опредѣленный потенціалъ, будетъ ли въ этой точкѣ находиться притягиваемая масса или нѣтъ — безразлично. Положимъ, что притягивающая система дана и отнесена къ избраннымъ какимъ-нибудь осямъ координатъ. Если въ точкѣ (a, b, c) не имѣется даже никакой притягиваемой массы, то все-таки для этой точки существуетъ потенціалъ, просто какъ функція, опредѣляемая формулою (765) или формулою (761), смотря по тому, будетъ ли притягивающая система *дискретна* или *сплошная* (сплошное тѣло). Существованіе этого потенціала въ точкѣ a, b, c, показываетъ только, что *если бы* въ ней находилась масса равная единицѣ, то проложенія A, B, C притягивающихъ силъ выражались бы производными отъ потенціала по формуламъ (764).

§ 313. Конкретное понятіе о потенціалѣ, какъ о работѣ. Положимъ, что масса, равная единицѣ, проходитъ путь ds подъ вліяніемъ притягивающей системы. Согласно съ (766) проложеніе притяженія на этотъ путь равно $\frac{\partial V}{ds}$. Слѣдовательно, работа притягивающихъ силъ при такомъ перемѣщеніи притягиваемой точки равна:

$$\frac{\partial V}{\partial s}\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (767)$$

Работа при перемѣщеніи изъ одного положенія въ другое, какъ мы знаемъ (§ 134), не зависитъ отъ того, по какому пути совершилось перемѣщеніе. Слѣдовательно, по какому бы пути притягиваемая точка ни переходила изъ 1-го положенія во 2-ое, расположенное какъ угодно далеко отъ 1-го, подъ вліяніемъ притягивающей системы работа притяженій равна

$$\int \frac{dV}{ds}\, ds = \int dV = V_2 - V_1 \quad \ldots\ldots \quad (768)$$

Въ безконечно удаленной точкѣ потенціалъ конечной притягивающей системы равенъ нулю, какъ это видно изъ (765), потому—что всѣ r равны безконечности въ этомъ случаѣ.

Слѣдовательно: для приближенія притягиваемой точки, имѣющей массу равную единицѣ, изъ безконечности въ данную точку (a, b, c), подъ вліяніемъ данной притягивающей системы, притягивающія силы оказываютъ, согласно (768), работу равную:

$$V,$$

потому что въ безконечносси $V_1 = 0$; въ данной же точкѣ (a, b, c) мы полагаемъ $V_2 = V$. Итакъ:

Потенціалъ V въ точкѣ (x, y, z) равенъ работѣ, которую должны были бы произвести притягивающія силы данной притягивающей системы для того, чтобы приблизить массу, равную единицѣ, изъ безконечности въ эту точку (x, y, z).

Въ теоріи электричества и магнетизма приходится имѣть дѣло также

и съ отталкиваніями обратно пропорціональными квадрату разстоянія. Въ случаѣ отталкивательныхъ силъ:

Потенціалъ V въ точкѣ (x, y, z) равенъ работѣ, которую должны произвести отталкивательныя силы данной отталкивающей системы для того, чтобы удалить массу, равную единицѣ, изъ *этой* точки (x, y, z) въ безконечность.

§ **314. Сила въ данной точкѣ.** Равнодѣйствующая всѣхъ силъ притяженія, оказываемыхъ данными массами на массу, равную *единицѣ*, помѣщенную въ данной точкѣ, называется *силою въ данной точкѣ*. Въ каждой точкѣ пространства равнодѣйствующая притяженій имѣетъ опредѣленную величину и направленіе при данномъ расположеніи притягивающихъ массъ.

§ **315. Силовыя линіи.** Кривая, касательная ко всѣмъ силамъ, существующимъ въ точкахъ, чрезъ которыя она проходитъ, называется *силовою линіею.*

Въ случаѣ притяженій, оказываемыхъ магнитомъ, *силовыя* линіи легко наблюдаются, положивъ на магнитъ бумагу, посыпанную желѣзными опилками: опилки располагаются по силовымъ линіямъ.

§ **316. Поверхности уровня.** Геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ потенціалъ данной притягивающей системы одинаковъ, называется *поверхностью уровня* или *эквипотенціальною* поверхностью.

Потенціалъ V въ какой-нибудь точкѣ (x, y, z), обусловливаемый данною притягивающею системою, какъ мы видѣли, есть нѣкоторая функція $F(x, y, z)$ координатъ этой точки (x, y, z). По самому опредѣленію поверхности уровня потенціалъ V одинаковъ для всѣхъ ея точекъ. Слѣдовательно:

$$V = F(x, y, z) = const \quad \text{. . . . .} \quad (769)$$

есть уравненіе поверхности уровня.

Существованіемъ данной притягивающей системы обусловливается существованіе безконечнаго множества поверхностей уровня:

$$V = c_1$$
$$V = c_2$$
$$V = c_3$$
$$\dots$$

соотвѣтствующихъ различнымъ численнымъ значеніямъ $c_1, c_2, c_3 \dots$ потенціала.

Теорема: *Равнодѣйствующая притяженій въ какой-либо точкѣ поверхности уровня нормальна къ этой поверхности.*

Доказательство.

Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью къ поверхности уровня

$$V = const$$

съ осями координатъ, равны:

$$\cos(N,x)=\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{X}{P}$$

$$\cos(N,y)=\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{Y}{P}$$

$$\cos(N,z)=\frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{Z}{P}$$

гдѣ P есть равнодѣйствующая притяженій, X, Y, Z проложенія ея на оси координатъ.

Но извѣстно, что

$$\frac{X}{P}=\cos(P,x);\quad \frac{Y}{P}=\cos(P,y):\quad \frac{Z}{P}=\cos(P,z).$$

Слѣдовательно P и N составляютъ одинаковые углы съ осями, проходя чрезъ одну и ту же точку: P направлена по N, что и требовалось доказать.

§ 317. Случай одной притягивающей точки. Если притягивающая система состоитъ только изъ одной притягивающей точки, имѣющей массу m, то поверхности уровня согласно съ (765) будутъ выражаться уравненіями:

$$V=\frac{m}{r}=const.$$

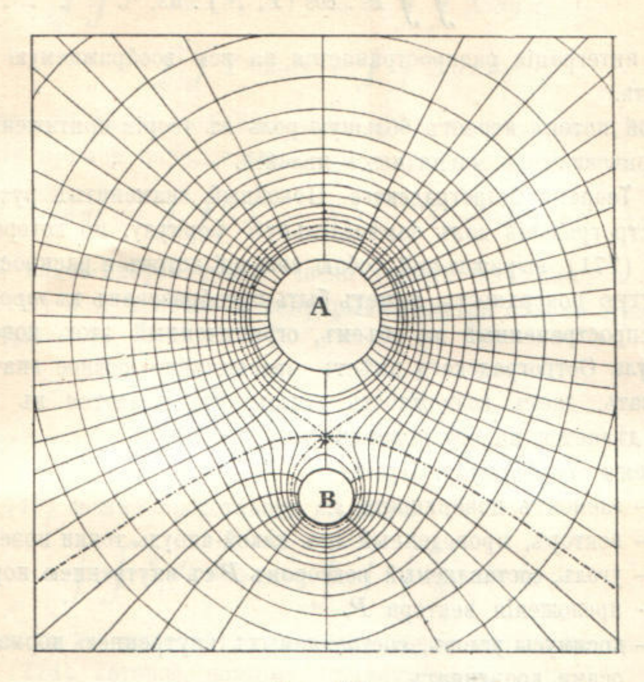
или

$$r=const.$$

Это сферы, описанныя изъ m какъ изъ центра. Силы направлены по радіусамъ такъ, что сѣть поверхностей уровня и силовыхъ линій въ этомъ простѣйшемъ случаѣ состоитъ изъ сѣти концентрическихъ сферъ и прямыхъ проходящихъ чрезъ m.

§ 318. Случай двухъ притягивающихъ точекъ. На чертежѣ (фиг. 125) представлены силовыя линіи лежащія въ плоскости чертежа и пересѣченія съ этою плоскостью поверхностей уровня въ томъ случаѣ когда притягивающая система состоитъ изъ двухъ точекъ, при чемъ масса одной изъ нихъ вчетверо болѣе массы другой. Здѣсь ближайшія къ притяги-

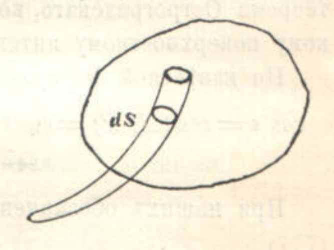
вающимъ точкамъ кривыя не начерчены; онѣ состоятъ изъ кривыхъ мало отличающихся отъ окружностей и изъ силовыхъ линій, идущихъ почти по



Фиг. 125.

радіусамъ. Въ каждой точкѣ чертежа сила направлена по касательной къ силовой линіи и нормально къ поверхности уровня. Такая сѣть отлично характеризуетъ расположеніе притяженій.

§ 319. Силовыя трубки. Если вообразимъ себѣ элементъ поверхности уровня, ограниченный какимъ-нибудь контуромъ (фиг. 126) и проведемъ чрезъ двѣ точки этого контура ds силовыя линіи, то получимъ составленную изъ силовыхъ линій *силовую трубку*.



Фиг. 126.

§ 320. Силовой потокъ. Если P есть равнодѣйствующая притяженій въ элементѣ ds *какой-нибудь* поверхности, то произведеніе:

$$P \quad ds \,.\, cos\,(P,\, N) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (770)$$

Называется *силовымъ потокомъ, проходящимъ чрезъ элементъ* ds, или *индукціею* чрезъ элементъ ds.

Сумма всѣхъ силовыхъ потоковъ, проходящихъ чрезъ всѣ элементы какой-нибудь замкнутой поверхности, воображаемой въ присутствіи притягивающихъ массъ, называется *полнымъ силовымъ потокомъ*, проходя-

щимъ чрезъ всю эту поверхность; онъ, слѣдовательно, равенъ:

$$\iint P \,.\, \cos (P, N) \,.\, ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (771)$$

Здѣсь интеграція распространяется на всю воображаемую замкнутую поверхность.

Силовой потокъ играетъ большую роль въ теоріи притяженія и изученіи электрическихъ и магнитныхъ явленій.

§ 321. Теорема Остроградскаго. Покойный знаменитый русскій математикъ Остроградскій далъ замѣчательную формулу, по которой *двойной* интегралъ (771), выражающій собою силовой потокъ и распространенный на замкнутую поверхность, можетъ быть преобразованъ въ *тройной* интегралъ, распространенный на объемъ, ограниченный этою поверхностью. Эта формула Остроградскаго имѣетъ чрезвычайно важное значеніе: она, такъ сказать, даетъ возможность узнать, что дѣлается въ объемѣ по тому, что дѣлается на его поверхности.

Выведемъ эту формулу. Пусть:

ds — элементъ поверхности s,
P — векторъ, проведенный изъ какой-нибудь точки поверхности s,
ε — уголъ, составляемый векторомъ P съ внутреннею нормалью N,
X, Y, Z — проложенія вектора P,
l, m, n — косинусы угловъ, составляемыхъ внутреннею нормалью N съ осями координатъ,

$\iint P \,.\, \cos (P, N) \,.\, ds$, распространенный на всю замкнутую поверхность s, называется *поверхностнымъ интеграломъ вектора* P. Онъ представляетъ собою *силовой потокъ*, если векторъ P представляетъ собою силу. Но векторъ P можетъ представлять собою скорость, ускореніе и проч.; теорема Остроградскаго, которую мы сейчасъ выведемъ, относится ко всякому поверхностному интегралу какого бы то ни было вектора P.

По извѣстной формулѣ аналитической геометріи:

$$\cos \varepsilon = \cos (N, P) = \cos (N, x) \,.\, \cos (P, x) + \cos (N, y) \,.\, \cos (P, y) + \\ + \cos (N, z) \,.\, \cos (P, z).$$

При нашихъ обозначеніяхъ получимъ:

$$\cos \varepsilon = \frac{X}{P} \,.\, l + \frac{Y}{P} \,.\, m + \frac{Z}{P} \,.\, n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (772)$$

Слѣдовательно:

$$\iint P \,.\, \cos (N, P)\, ds = \iint P \,.\, \cos \varepsilon \,.\, ds = \\ = \iint X \,.\, l \,.\, ds + \iint Y \,.\, m \,.\, ds + \iint Z \,.\, n \,.\, ds \quad . \; . \; (773)$$

Но $dy\, dz$ есть проложеніе элемента ds на плоскость (y, z). Поэтому:

$$dy \,.\, dz = ds \,.\, l; \quad dz \,.\, dx = ds \,.\, m; \quad dx \,.\, dy = ds \,.\, n.$$

Слѣдовательно (773) принимаетъ видъ:

$$\iint P \,.\, cos\,(P,\, N) \,.\, ds = \iint X\, dy\, dz +$$
$$+ \iint Y\, dz\, dx + \iint Z\, dx\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (774)$$

Обозначимъ, какъ въ § 308 (фиг. 123), чрезъ 1, 2, 3, 4... точки пересѣченія прямой параллельной оси x съ поверхностью s. Тогда:

$$\iint X\, dy\, dz = \iint [(X_1 - X_2) + (X_3 - X_4) + \ldots]\, dy\, dz \; (775)$$

Если k какое-нибудь цѣлое число (одинъ изъ нашихъ индексовъ 1, 2, 3, 4...) и X конечно и непрерывно внутри объема ограниченнаго поверхностью s, то:

$$X_{k+1} - X_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial X}{\partial x}\, dx.$$

Поэтому (775) можно представить въ видѣ:

$$\iint X\, dy\, dz = -\iiint \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

Точно такъ же можно преобразовать другіе интегралы правой части уравненія (774), которое, поэтому, приметъ видъ:

$$\iint P \,.\, cos\,(P,\, N) \,.\, ds = -\iiint \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz \; (776)$$

Это равенство (776) и есть знаменитая формула Остроградскаго *). Она послужитъ намъ основаніемъ для вывода другихъ замѣчательныхъ формулъ.

§ 322. Теорема Лапласа. Пусть:

$(\xi,\, \eta,\, \zeta)$ — координаты притягивающей точки m.

$(x,\, y,\, z)$ — координаты какой-нибудь точки пространства.

r — разстояніе точки $(x,\, y,\, z)$ отъ притягивающей точки m.

Дифференцируя извѣстное равенство:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad . \; . \; . \; . \; (777)$$

получимъ:

$$r\, \frac{dr}{dx} = x - \xi.$$

Потенціалъ V_1 обусловливаемый точкою m въ точкѣ $(x,\, y,\, z)$, согласно съ 765 равенъ:

$$V_1 = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

---

*) Запис. С.-Петерб. Акад. Наукъ, т. I, стр. 38 (1828 г.).

Поэтому:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V_1}{\partial x} &= -m\,\frac{x-\xi}{r^3}\\ \frac{\partial V_1}{\partial y} &= -m\,\frac{y-\eta}{r^3}\\ \frac{\partial V_1}{\partial z} &= -m\,\frac{z-\zeta}{r^3}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (778)$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} &= -\frac{m}{r^3}+\frac{3m\,(x-\xi)^2}{r^5}\\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} &= -\frac{m}{r^3}+\frac{3m\,(y-\eta)^2}{r^5}\\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} &= -\frac{m}{r^3}+\frac{3m\,(z-\zeta)^2}{r^5}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (779)$$

Складывая эти три уравненія (779) и сообразуясь съ (777), получимъ

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (780)$$

Если имѣемъ дѣло не съ одною только притягивающею точкою m, а съ цѣлою системою притягивающихъ точекъ, то согласно (769), потенціалъ V_e системы равенъ суммѣ потенціаловъ, обусловливаемыхъ отдѣльными притягивающими массами. Поэтому для притягивающей системы согласно съ (780), получимъ:

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (781)$$

Это и есть знаменитое уравненіе Лапласа.

Замѣтимъ, что нашъ выводъ былъ бы не вѣренъ, еслибы одна изъ притягивающихъ точекъ совпадала съ разсматриваемою точкою (x, y, z) пространства, потому что тогда соотвѣтствующій потенціалъ $V_1\ \frac{m}{r}$ былъ бы безконечно великъ, благодаря тому, что тогда r былъ бы нулемъ.

Поэтому уравненіе Лапласа вѣрно только для точки $(x, y. z)$ не совпадающей ни съ одною притягивающею точкою. Если притягивающая система есть сплошное тѣло, то уравненіе Лапласа вѣрно, слѣдовательно, только для *внѣшнихъ* точекъ, лежащихъ *внѣ* тѣла. Потенціалъ въ точкѣ лежащей *внѣ* тѣла, называется внѣшнимъ (extérieur) и обозначается значкомъ e.

$$V_e = \text{внѣшній потенціалъ.}$$

Формула Лапласа можетъ быть выражена, слѣдовательно, такъ:

Теорема Лапласа: *сумма вторыхъ производныхъ внѣшняго потенціала по координатамъ равна нулю.*

Уравненіе Лапласа (781) столь важно, что функціи, ему удовлетворяющія, получили особое названіе *сферическихъ* функцій, и ученіе о сферическихъ функціяхъ представляетъ собою особый отдѣлъ математики, имѣющій весьма обширную литературу.

Сумма вторыхъ производныхъ, стоящая въ лѣвой части уравненія Лапласа (781), обозначается знакомъ $\nabla^2 V$, такъ что:

$$\frac{\partial^2 V}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{dy^2} + \frac{\partial^2 V}{dz^2} = \nabla^2 V$$

и теорема Лапласа, выражаемая формулою (781), можетъ быть выражена формулою:

$$\nabla^2 V_e = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (782)$$

§ 323. Теорема Пуассона. Перейдемъ теперь къ изслѣдованію того случая, когда разсматриваемая точка (x, y, z) пространства лежитъ внутри притягивающаго тѣла. Пусть: ρ есть плотность той точки притягивающаго тѣла, съ которою совпадаетъ точка (x, y, z).

Опишемъ около точки (x, y, z) изъ весьма близкаго къ ней центра (a, b, c) сферу настолько малую, чтобы можно было считать плотность внутри этой сферы повсюду одинаковою. Пусть:

V_i — потенціалъ, обусловливаемый въ точкѣ (x, y, z) всѣмъ тѣломъ,
V_1 — потенціалъ, обусловливаемый въ (x, y, z) массою, содержащеюся внутри описанной маленькой сферы,
V_2 — потенціалъ, обусловливаемый въ (x, y, z) остальною частью тѣла.

Тогда

$$V_i = V_1 + V_2.$$

Слѣдовательно:

$$\nabla^2 V_i = \nabla^2 V_1 + \nabla^2 V_2.$$

Но по теоремѣ Лапласа $\nabla^2 V_2 = 0$. Слѣдовательно:

$$\nabla^2 V_i = \nabla^2 V_1 = \frac{\partial^2 V_1}{dx^2} + \frac{\partial^2 V_1}{dy^2} + \frac{\partial^2 V_1}{dz^2}$$

или

$$\nabla^2 V_i = \frac{\partial X_1}{dx} + \frac{\partial Y_1}{dy} + \frac{\partial Z_1}{dz}, \quad \ldots \ldots \ldots (783)$$

гдѣ X_1, Y_1, Z_1 суть проложенія притяженія маленькою сферою точки (x, y, z) внутри ея находящейся и имѣющей массу равную единицѣ. Припоминая формулы, приведенныя въ концѣ § 310, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{4}{3}\pi(x-a)\cdot\rho \\ Y_1 &= -\frac{4}{3}\pi(y-b)\cdot\rho \\ Z_1 &= -\frac{4}{3}\pi(z-c)\cdot\rho \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (784)$$

Вставляя эти величины въ (783), находимъ:

$$\nabla^2 V_i = -4\pi\rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (785)$$

или:

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (786)$$

Это и есть формула Пуассона, въ которой ρ плотность тѣла въ разсматриваемой внутренней точкѣ (x, y, z); V_i *внутренній* потенціалъ отмѣчаемый индексомъ i (intérieur). Формула Пуассона можетъ быть выражена такъ:

Теорема Пуассона: *сумма вторыхъ производныхъ внутренняго потенціала по координатамъ равна* $-4\pi\rho$.

§ **324. Теорема Гаусса.** Прилагая формулу Остроградскаго (776) къ такому вектору, проложенія котораго имѣютъ потенціалъ V, получимъ:

$$\iint P \,.\, \cos(P, N)\, ds = -\iiint \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\, dy\, dz \quad (787)$$

Положимъ, что ABC есть *воображаемая* замкнутая поверхность, проведенная вблизи притягивающихъ массъ такъ, что нѣкоторыя изъ этихъ массъ частью или вполнѣ ею объемлются, а другія находятся внѣ ея. Докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема Гаусса: *Полный силовой потокъ, проходящій чрезъ воображаемую замкнутую поверхность, равенъ произведенію* $+4\pi M$ *массы* M, *заключенной внутри этой поверхности на* 4π.

Доказательство: Прилагая къ воображаемой замкнутой поверхности s формулу (787) и теоремы Лапласа и Пуассона находимъ:

$$\iint P \,.\, \cos(P, N)\, ds = -\iiint [-4\pi\rho]\, dx\, dy\, dz = 4\pi M. \quad . \quad (788)$$

что и требовалось доказать.

§ **325. Формулы Грина.** Необыкновенно много приложеній въ различныхъ отдѣлахъ математики и физики получили знаменитыя формулы Грина.

Докажемъ слѣдующее: если двѣ функціи V и V' отъ (x, y, z), равно какъ и ихъ первыя производныя, конечны, однозначны и непрерывны внутри нѣкотораго объема, ограниченнаго замкнутою поверхностью s, то онѣ связаны между собою слѣдующими двумя формулами:

$$\iint V \frac{dV'}{dn}\, ds - \iiint V \left[\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial V'}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz \quad . \quad (789)$$

$$\int\int V' \frac{dV}{dn} ds - \int\int\int V' \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\int\int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial V'}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz \quad . (790)$$

Доказательство. Положимъ:

$$V \frac{\partial V'}{\partial x} = X; \quad V \frac{\partial V'}{\partial y} = Y; \quad V \frac{\partial V'}{\partial z} = Z \quad . \; . \; . \; . \; . (791)$$

гдѣ X, Y, Z суть проложенія какого-нибудь вектора P. Пусть α, β, γ косинусы угловъ, составляемыхъ *внѣшнею* нормалью n съ осями, E уголъ: составляемый P съ n.

Тогда

$$- P \cos E = V \left[\alpha \frac{\partial V'}{\partial x} + \beta \frac{\partial V'}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V'}{\partial z}\right] = V \frac{\partial V}{\partial n} \; . \; . \; . (792)$$

Изъ (791) имѣемъ:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = V \left[\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial V'}{\partial z}\right] \; . \; . \; . \; . (793)$$

Вставляя (792) и (793) въ формулу (776) Остроградскаго, получимъ,

$$\int\int V \frac{\partial V'}{\partial n} ds = \int\int\int V \left[\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}\right] dx\,dy\,dz +$$

$$+ \int\int\int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial V'}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz.$$

Изъ этого уравненія, простою перестановкою членовъ, получается формула (789) Грина.

Полагая, вмѣсто (791), такія равенства:

$$V' \frac{\partial V}{\partial x} = X; \quad V' \frac{\partial V}{\partial y} = Y; \quad V' \frac{\partial V}{\partial z} = Z$$

получимъ, такимъ же путемъ, формулу (790) Грина.

Вычтя (790) изъ (789) получимъ третью формулу Грина, вытекающую изъ первыхъ двухъ:

$$\int\int V \frac{\partial V'}{\partial n} ds - \int\int V' \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int\int\int V \cdot \nabla^2 (V') \,.\, dx\,dy\,dz -$$

$$- \int\int\int V' \cdot \nabla^2 (V) \,.\, dx\,dy\,dz \; . \; . \; . \; . \; . (794)$$

Итакъ, изъ формулы Остроградскаго мы вывели три формулы (789), (790) и (794). Грина. Послѣднюю изъ нихъ (794) можно представить въ болѣе удобномъ видѣ слѣдующимъ образомъ;

Возьмемъ такія двѣ функціи ρ и ρ', которыя опредѣлялись бы равенствами:

$$-4\pi\rho = \nabla^2 (V); \quad -4\pi\rho_1 = \nabla^2 (V') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (795)$$

Тогда формула (794) можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\int\int V \frac{\partial V'}{\partial n} ds - \int\int V' \frac{\partial V}{\partial n} ds =$$

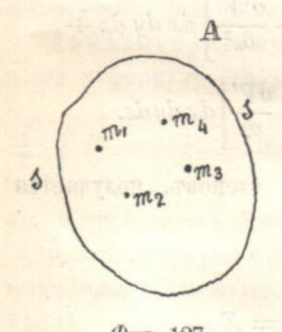
$$= 4\pi \int\int\int [V\rho' - V'\rho] \, dx \, dy \, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (796)$$

Эту послѣднюю формулу мы и будемъ чаще всего примѣнять, помня что въ ней ρ и ρ' опредѣляются уравненіями (795), въ которыхъ по теоремамъ Лапласа (781) и Пуассона (786) функціи ρ и ρ' могутъ быть разсматриваемы какъ плотности тѣхъ точекъ, въ которыхъ V или V' разсматривается какъ потенціалъ, обусловливаемый притягивающими массами.

Формулы (789), (790) и (794) имѣютъ общее аналитическое значеніе. Формула (796) особенно удобна въ теоріи потенціала.

Перейдемъ къ разсмотрѣнію важнѣйшихъ приложеній формулъ Грина.

§ **326. Теорема Грина объ эквивалентномъ слоѣ на какой-либо замкнутой поверхности.** Приложимъ формулу (796) Грина къ слѣдующему частному случаю весьма важному въ электростатикѣ (фиг. 127).



Фиг. 127.

Дана замкнутая поверхность s, на которую и будемъ распространять интегралы лѣвой части формулы (796), а интегралы правой части будемъ распространять на объемъ, ограниченный этою поверхностью s. Положимъ, что внутри этого объема находятся притягивающія точки m_1, m_2, $m_3 \ldots$, и разсматривается потенціалъ, обусловливаемый этими массами въ точкѣ A, лежащей *внѣ* объема, ограниченнаго поверхностью s.

Пусть:

V — потенціалъ, обусловливаемый массами m_1, m_2, $m_3 \ldots$ въ какой-либо точкѣ пространства.

r' — разстоянія какой-либо точки пространства отъ A.

$V' = \frac{1}{r'}$.

Въ точкѣ A не находится никакой массы, такъ что для всякихъ массъ она *внѣшняя*. По этому $\frac{1}{r'}$, согласно съ § 332-мъ, удовлетворяетъ

уравненію Лапласа, и потому, на основаніи (795) и нашего положенія $V' = \frac{1}{r'}$, заключаемъ, что

$$\rho' = 0.$$

Слѣдовательно, въ настоящемъ случаѣ (796) принимаетъ видъ:

$$\int\int\left[V \cdot \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r'}\right) - \frac{1}{r'} \cdot \frac{dV}{dn}\right] ds = 4\pi \int\int\int \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r'} \quad . (797)$$

или

$$-\int\int \frac{d\,(V \,.\, r')}{dn}\ \frac{ds}{r'^2} = 4\pi \int\int\int \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r'} \quad . \; . \; (798)$$

Здѣсь тройной интегралъ правой части распространяется на весь объемъ, заключенный въ s. Тѣ элементы этого объема, въ которыхъ нѣтъ никакихъ притягивающихъ массъ, дадутъ $\rho = 0$. Но тѣ элементы объема, въ которыхъ находятся притягивающія массы $m_1, m_2, m_3 \ldots$ дадутъ для ρ конечныя значенія равныя плотности этихъ элементовъ; а такъ какъ объемы этихъ элементовъ равны $dx\, dx\, dz$, то

$$\rho\, dx\, dy\, dz = m$$

и тройной интегралъ правой части уравненія (798), согласно съ (761), равенъ потенціалу, обусловленному въ точкѣ A массами m_1, m_2, m_3 .... Обозначимъ этотъ интересующій насъ потенціалъ чрезъ V_A. Тогда (798) приметъ видъ:

$$-\int\int \frac{d\,(V \,.\, r')}{dn}\ \frac{ds}{r'^2} = 4\pi \,.\, V_A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (799)$$

Наложимъ на поверхность s безконечно-тонкій слой притягивающей матеріи и распредѣлимъ его плотность $\bar{\rho}$, такъ, чтобы она въ каждой точкѣ поверхности s удовлетворяла уравненію:

$$-\bar{\rho} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r'} \cdot \frac{d\,(V \,.\, r')}{dn} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (800)$$

Опредѣливъ изъ (799) величину $\frac{1}{r'}\,\frac{d\,(V \,.\, r')}{dn}$ и подставивъ ее въ (798) получимъ

$$\int\int \frac{\bar{\rho} \,.\, ds}{r'} = V_A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (801)$$

Но $\bar{\rho}$ есть плотность слоя, расположеннаго на s. Слѣдовательно $\bar{\rho} \,.\, ds$ есть масса элемента слоя, тогда какъ r' есть разстояніе отъ A точекъ, разсматриваемыхъ въ интегралѣ лѣвой части уравненія (801), то есть именно точекъ поверхности s. Поэтому лѣвая часть уравненія (801), согласно съ (761), есть потенціалъ, обусловливаемый въ точкѣ A слоемъ. Такимъ образомъ (801) можно представить въ видѣ:

потенціалъ, въ A, слоя = потенціалу, въ A, массъ m_1, m_2, m_3...

Отсюда:

1-ая теорема Грина. *Всегда можно распредѣлить притягивающее вещество на данной воображаемой замкнутой поверхности s такимъ безконечно тонкимъ слоемъ, который будетъ притягивать внѣшнюю точку A такъ, какъ ее притягиваютъ данныя массы m_1, m_2, m_3 ..., находящіяся внутри объема, ограниченнаго этою замкнутою поверхностью s.* Законъ распредѣленія плотности такого слоя по поверхности s выражается формулою (800), а слой называется *эквивалентнымъ* по отношенію къ даннымъ массамъ m_1, m_2, m_3 ...

§ **327. Тѣлесный уголъ.** Вырѣжемъ на сферѣ, описанной радіусомъ равнымъ единицѣ, безконечно малый элементъ $d\sigma$, ограниченный какимъ-нибудь замкнутымъ контуромъ и проведемъ изъ центра сферы ко всѣмъ точкамъ этого контура радіусы. Получимъ безконечно тонкій конусъ. Если опишемъ изъ того же центра рядъ концентрическихъ сферъ, то упомянутый конусъ вырѣжетъ на нихъ элементы пропорціональные квадратамъ радіусовъ, подобно тому какъ центральный уголъ отсѣкаетъ на концентрическихъ окружностяхъ дуги пропорціональныя радіусамъ. Величиною

$$\frac{\text{дуга}}{\text{радіусъ}}$$

измѣряется, какъ извѣстно, обыкновенный (плоскій) уголъ. Величиною

$$\frac{\text{сферическій элементъ}}{(\text{радіусъ})^2} = \text{тѣлесный уголъ} \quad . \ . \ . \ . \ (802)$$

измѣряется *тѣлесный уголъ.*

Поэтому: числовая величина плоскаго угла равна, какъ извѣстно, числовой величинѣ дуги, описанной радіусомъ равнымъ единицѣ; точно также числовая величина тѣлеснаго угла равна числовой величинѣ площади элемента, вырѣзаемаго конусомъ на поверхности сферы равной единицѣ.

Положимъ, что изъ какой-нибудь точки A описанъ безконечно тонкій конусъ, вырѣзающій на данной поверхности s элементъ ds, наклоненный подъ угломъ φ къ элементу сферы, проходящей чрезъ него и описанной изъ точки A. Площадь этого элемента сферы равна

$$ds \,.\, \cos\varphi.$$

Если r есть радіусъ-векторъ, проведенный изъ точки A въ элементъ ds, то, согласно съ (802), тѣлесный уголъ $d\omega$ конуса, имѣющаго вершину въ A и вырѣзающаго элементъ ds, опредѣлится формулою

$$d\omega = \frac{ds \,.\, \cos\varphi}{r^2} \, . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (803)$$

Но по теоремѣ о равенствѣ угловъ, имѣющихъ взаимноперпендикулярныя стороны, уголъ φ равенъ углу, составляемому нормалью n съ радіусомъ-

векторомъ r. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{dr}{dn} \quad \ldots\ldots\ldots (804)$$

Изъ (803) и (804) имѣемъ:

$$d\omega = \frac{ds}{r^2} \cdot \frac{dr}{dn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (805)$$

Для послѣдующаго намъ интересно знать, что представляетъ собою

$$\int\int d\omega = \int\int \frac{ds}{r^2} \cdot \frac{dr}{dn} \quad \ldots\ldots\ldots (806)$$

распространенный на замкнутую поверхность s.

Если точка A внутренняя (находится внутри объема, ограниченнаго поверхностью s), то сумма всѣхъ безконечно малыхъ элементовъ $d\omega$, вырѣзаемыхъ на сферѣ описанной изъ A радіусомъ равнымъ *единицѣ*, равна поверхности этой сферы, то есть 4π. Если точка A внѣшняя (находится внѣ объема, ограниченнаго поверхностью s), то при суммированіи всѣхъ $d\omega$, сперва тѣлесный уголъ будетъ все увеличиваться до тѣхъ поръ, пока конусъ не сдѣлается касательнымъ къ поверхности s. Затѣмъ тѣлесный уголъ будетъ уменьшаться и дойдетъ до нуля.

Итакъ:

$$\int\int d\omega = 4\pi \text{ для внутренней точки} = \int\int \frac{ds}{r^2} \cdot \frac{dr}{dn} \quad \ldots (807)$$

$$\int\int d\omega = 0 \text{ для внѣшней точки} = \int\int \frac{ds}{r^2} \cdot \frac{dr}{dn} \quad \ldots (808)$$

§ 338. Теорема Грина объ эквивалентномъ слоѣ, лежащемъ на поверхности уровня. Разсмотримъ задачу параграфа 326-го въ томъ случаѣ, когда s есть одна изъ поверхностей уровня для притяженія, оказываемаго массами $m_1, m_2, m_3, \ldots$

Въ этомъ случаѣ точно также получимъ уравненіе (797) и точно такъ же докажемъ, что правая часть его равна $4\pi V_A$. Лѣвую часть уравненія (797) представимъ теперь въ видѣ двухъ отдѣльныхъ интеграловъ, такъ что оно приметъ видъ:

$$\int\int V \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r'}\right) ds - \int\int \frac{1}{r'} \cdot \frac{dV}{dn} \cdot ds = 4\pi V_A.$$

Здѣсь первый двойной интегралъ лѣвой части распространенъ на всю поверхность s. Но если s есть поверхность уровня, то во всѣхъ ея точкахъ потенціалъ V, обусловливаемый массами $m_1, m_2, m_3 \ldots$, имѣетъ, согласно съ § 316-мъ, одну и ту же величину; обозначимъ ее чрезъ V_s. Она должна быть разсматриваема, слѣдовательно, какъ постоянная въ

первомъ двойномъ интегралѣ лѣвой части, и можетъ быть вынесена за знакъ интеграла. Поэтому получимъ:

$$V_s \int\int \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r'}\right) . ds - \int\int \frac{1}{r'} \cdot \frac{dV_s}{dn} ds = 4\pi V_A \ . \ . (809)$$

Но

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r'}\right) . ds = - \frac{1}{r'^2} \cdot \frac{dr}{dn} . ds.$$

Слѣдовательно (809) приметъ видъ:

$$- V_s \int\int \frac{1}{r'^2} \cdot \frac{dr}{dn} . ds - \int\int \frac{1}{r'} \cdot \frac{dV_s}{dn} ds = 4\pi V_A \ . \ . (810)$$

Согласно съ (808) первый членъ этого уравненія (810) равенъ нулю. Слѣдовательно:

$$\int\int \frac{1}{r_1} \cdot \frac{dV_s}{dn} ds = - 4\pi . V_A \ . \ . \ . \ . \ . \ . (811)$$

Наложимъ на поверхность s безконечно тонкій слой притягивающаго вещества и распредѣлимъ его плотность $\overline{\rho}$ такъ, чтобы въ каждой точкѣ поверхности s она удовлетворяла уравненію

$$\overline{\rho} = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV_s}{dn} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . (812)$$

Опредѣлимъ изъ (812) величину $\frac{dV_s}{dn}$ и подставимъ въ (811). Получимъ:

$$\int\int \frac{\overline{\rho}\, ds}{r'} = V_A \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . (813)$$

Но $\overline{\rho}$ есть плотность слоя, расположеннаго на s. Слѣдовательно $\overline{\rho}\, ds$ есть масса элемента слоя, тогда какъ r' разстояніе отъ A точекъ, разсматриваемыхъ въ интегралѣ лѣвой части уравненія (813), то есть именно точекъ поверхности s. Поэтому лѣвая часть уравненія (813), согласно съ (761), есть потенціалъ, обусловливаемый въ точкѣ A слоемъ. Такимъ образомъ (813) можно представить въ видѣ:

потенціалъ, въ A, слоя = потенціалу, въ A, массъ m_1, m_2, m_3...

Отсюда:

2-ая теорема Грина. *Всегда можно распредѣлить притягивающее вещество на замкнутой поверхности уровня s такимъ безконечно тонкимъ слоемъ, который будетъ притягивать внѣшнюю точку A такъ, какъ ее притягиваютъ данныя массы m_1, m_2, m_3..., находящіяся внутри объема ограниченнаго этой поверхностью s. Законъ распредѣленія плотности такого слоя по поверхности уровня выражается формулою*

$$\overline{\rho} = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV_s}{dn}$$

Здѣсь чрезъ n обозначена *внѣшняя* нормаль, согласно съ § 325-мъ.

Согласно § 316 сила притяженія P направлена по внутренней нормали и по теоріи потенціала

$$P = \frac{dV_s}{dn} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (814)$$

въ каждой точкѣ поверхности уровня. Слѣдовательно, согласно съ (812):

$$4\pi\bar{\rho} = P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (815)$$

Эта теорема Грина вмѣстѣ съ формулою (815) имѣетъ огромное значеніе въ электростатикѣ, давая возможность по силѣ P опредѣлять напряженіе $\bar{\rho}$ электричества въ любой точкѣ поверхности s кондуктора, пользуясь уравненіемъ (815), такъ какъ поверхность хорошаго проводника есть одна изъ поверхностей уровня оказываемыхъ имъ электрическихъ притяженій.

Столь полезная въ электростатикѣ теорема представляетъ собою лишь весьма частный случай общей формулы Грина (796), и это только еще малая часть той пользы, которую физикъ извлекаетъ изъ общей формулы (796). Поэтому перейдемъ къ выясненію конкретнаго значенія общей формулы (796) по крайней мѣрѣ въ теоріи потенціала. Для этого ознакомимся предварительно съ понятіемъ о взаимномъ потенціалѣ двухъ системъ.

§ 339. Взаимный потенціалъ двухъ системъ. Положимъ, что подъ вліяніемъ притягивающихъ силъ матерьальная точка массы m' передвигаеття, по какому бы то ни было пути, изъ того положенія, въ которомъ потенціалъ притягивающихъ ее силъ равенъ нулю, въ данное положеніе B_1. Работа притягивающихъ силъ, согласно съ § 313-мъ, равна при этомъ

$$V_1 m'_1$$

если V_1 есть потенціалъ, обусловливаемый въ B_1 притягивающими силами. Если другая точка m'_2 передвигается подъ вліяніемъ тѣхъ же силъ изъ положенія, въ которомъ обусловливаемый ими потенціалъ равенъ нулю въ данное положеніе B_2, то силы оказываютъ еще работу

$$V_2' m_2,$$

если V_2 есть потенціалъ, обусловливаемый ими въ B_2.

Обобщимъ это разсужденіе. Положимъ, что имѣемъ двѣ системы матеріальныхъ точекъ: точки m_1, m_2, m_3 ... первой системы находятся въ положеніяхъ A_1, A_2, A_3...; точки m'_1, m'_2, m'_3... второй системы находятся въ положеніяхъ B_1, B_2, B_3 ... Пусть:

V_1, V_2, V_3 ... суть потенціалы, обусловливаемые въ точкахъ B_1, B_2, B_3 ... первою системою;

V_1', V_2', V_3' ... суть потенціалы, обусловливаемые въ точкахъ A_1, A_2, A_3 .. второю системою.

Положимъ, что каждая точки одной системы дѣйствуетъ на точки другой системы, но *не* дѣйствуетъ на точки своей системы. Работа W', производимая притягивающими силами первой системы для перемѣщенія точекъ второй системы изъ положеній, въ которыхъ потенціалъ равенъ нулю, въ положенія B_1, B_2, B_3 ... равна

$$W = V_1 m_1' + V_2 m_2' + V_3 m_3' + \dots \quad . \ . \ . \ . \ (816)$$

Работа, производимая притягивающими силами второй системы для перемѣщенія точекъ первой системы изъ положеній, въ которыхъ потенціалъ равенъ нулю, въ положенія A_1, A_2, A_3 ... равна

$$W = V_1' m_1 + V_2' m_2 + V_3' m_3 + \dots \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (817)$$

Пусть:

r_{12} = разстояніе между m_1 и m'_2

r_{21} = разстояніе между m_2 и m'_1

. . . .

Тогда:

$$V_1 = \frac{m_1}{r_{11}} + \frac{m_2}{r_{21}} + \frac{m_3}{r_{31}} + \dots \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (818)$$

$$V'_1 = \frac{m'_1}{r_{11}} + \frac{m'_2}{r_{12}} + \frac{m'_3}{r_{13}} + \dots \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (819)$$

Подставляя эти величины (816) и (817), находимъ

$$W' = \frac{m_1 m_1}{r_{11}} + \frac{m_1 m'_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m'_1}{r_{21}} + \dots = \Sigma \frac{mm'}{r} \quad . \ (820)$$

$$W = \frac{m_1 m'_1}{r_{11}} + \frac{m_1 m'_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m'_1}{r_{21}} + \dots = \Sigma \frac{mm'}{r} \quad . \ . \ . \ (821)$$

Поэтому:

$$W' = W \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (822)$$

Эта величина:

$$W' = W = \Sigma \frac{mm'}{r} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (823)$$

называется *взаимнымъ потенціаломъ* двухъ системъ или *взаимной работой*.

Если каждая изъ системъ представляетъ собою сплошное тѣло, то формула (823) можетъ быть представлена въ видѣ:

$$W = W' = \int\int\int V\rho' dv' = \int\int\int V'\rho dv \quad . \ . \ (824)$$

гдѣ: V — есть потенціалъ обусловливаемый первымъ тѣломъ,
ρ' — плотность второго тѣла,
v' — объемъ элемента второго тѣла, такъ что:
$\rho' dv'$ = масса элемента второго тѣла.

§ 330. **Формула Грина выраженная помощью взаимныхъ потенціаловъ.** Обратимся теперь къ третьей формулѣ Грина (796):

$$\int\int V\frac{dV'}{dn}\,ds - \int\int V'\frac{dV}{dn}\,ds =$$

$$= -4\pi\int\int\int[V\rho' - V'\rho]\,dx\,dy\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (796)$$

Представимъ себѣ двѣ системы матеріальныхъ точекъ (фиг. 128) и замкнутую поверхность S, охватывающую часть 1-й и часть 2-й системы. Распространимъ интегралы лѣвой части уравненія (796) на эту поверхность S, интегралъ же правой части на объемъ, ограниченный поверхностью S. Пусть:

V = потенціалъ обусловливаемый 1-ю системою,
V' = потенціалъ, обусловливаемый 2-ю системою,
ρ и ρ' — плотности,
n — внѣшняя нормаль поверхности S.

Фиг. 128.

Припомнимъ, что формула (796) выведена была при условіяхъ (795) и что, на основаніи теоремы Лапласа, $\triangle^3(V)$ для внѣшнихъ точекъ равенъ нулю.

Уравненіе (796) можетъ быть представлено, согласно съ (824), и съ § 316 въ видѣ:

$$\int\int[VP - V'P]\,ds = -4\pi[W_1 - W'_1] \quad . \quad . \quad . \quad . (825)$$

гдѣ: W_1 — взаимный потенцівлъ 1-ой системы и *внутреннихъ* точекъ 2-ой системы,

W'_1 — взаимный потенціалъ 2-ой системы и *внутреннихъ* точекъ 1-ой системы,

P — сила притяженія оказываемая на 1 массы въ ds первою системою,

P' — сила притяженіи, оказываемая на 1 массы въ ds второю системою.

ОТДѢЛЪ VII.

Равновѣсіе гибкой нити.

ГЛАВА I.

Равновѣсіе свободной нити.

§ 331. Цѣпная линія. Представимъ себѣ тонкую тяжелую совершенно гибкую нить, то есть такую нить, которая подчиняется дѣйствію тяжести и въ поперечныхъ сѣченіяхъ которой проявляются только натяженія направленныя по касательной къ нити. Нить предполагается настолько тонкою, чтобы можно было разсматривать ее какъ кривую и говорить о ея касательной, плоскости соприкосновенія и проч.

Кривая, по которой такая однородная нить располагается въ вертикальной плоскости подъ дѣйствіемъ своей тяжести, если подвѣшена въ двухъ неподвижныхъ точкахъ A и B, называется *цѣпною линіею* (фиг. 129).

Найдемъ уравненіе цѣпной линіи. Пусть:

w — вѣсъ единицы длины нити = плотность нити,
ds — длина ея элемента, такъ что:
wds — вѣсъ элемента нити,
C — нижняя точка нити; въ этой точкѣ касательная горизонтальна.

Примемъ какую-нибудь горизонтальную прямую, лежащую въ плоскости нити, за ось x; вертикаль, проходящую чрезъ C примемъ за ось y. Пусть:

φ — уголъ наклоненія касательной къ точкѣ m нити къ оси x,
T_0 — натяженіе въ C,
T — натяженіе въ точкѣ P,
S = длина части CP нити.

Направленія натяженій T_0 и T указаны на чертежѣ (фиг. 129) стрѣлками.

Часть CP нити находится подъ дѣйствіемъ трехъ силъ: T_0, T и вѣса $w \,.\, s$ приложеннаго къ центру тяжести дуги CP.

Равновѣсіе горизонтальныхъ слагающихъ выразится уравненіемъ:

$$T \cos \varphi = T_0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (826)$$

Равновѣсіе вертикальныхъ слагающихъ выразится уравненіемъ:

$$T \sin \varphi = w \,.\, s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (827)$$

Раздѣливъ почленно (827) на (826), получимъ:

$$tg \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{w \,.\, s}{T_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (828)$$

Если нить однородна, то w постоянное, и можно положить:

$$\frac{T_0}{w} = c. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (829)$$

такъ что (828) приметъ видъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (930)$$

Извѣстно, что:

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (831)$$

Изъ (830) и (831) слѣдуетъ:

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{c^2}{s^2}$$

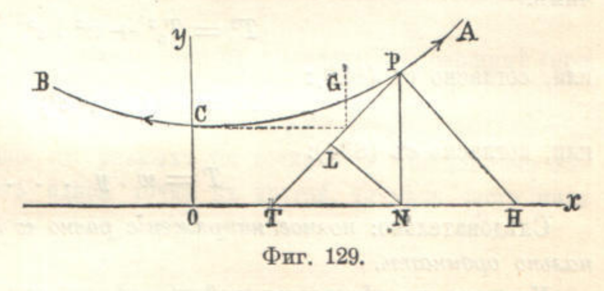
или

$$dy = \pm \frac{sds}{\sqrt{s^2 + c^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (832)$$

Интегрируя (832), получимъ:

$$y + A = \pm \sqrt{s^2 + c^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (833)$$

гдѣ A постоянное интеграціи. Если x и s увеличиваются, то и y увеличивается, какъ это видно изъ (830). Поэтому въ (833) нужно передъ радикаломъ взять знакъ $+$. При $s = 0$ изъ (833) имѣемъ $y + A = c$. Слѣдовательно, если возьмемъ ось x на разстояніи c ниже точки C, то $A = 0$, и (833) приметъ видъ:



Фиг. 129.

$$y^2 = s^2 + c^2. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (834)$$

Подставивъ въ (830) величину dy изъ (832), найдемъ:

$$\frac{cds}{\sqrt{s^2 + c^2}} = dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (835)$$

Интегрируя (835), получимъ:

$$c \cdot lg\,[s + \sqrt{s^2 + c^2}] = x + B \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(836)$$

гдѣ B постоянное интеграціи. При $x = 0$ и $s = 0$; поэтому $B = clg\,c$, и (836) приметъ видъ:

$$\sqrt{s^2 + c^2} + s = ce^{\frac{x}{c}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(837)$$

Изъ (837) и (834) находимъ:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(838)$$

$$s = \frac{в}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) \;.\;.\;.\;.\;\;.\;.\;.\;.\;(839)$$

Здѣсь (839) даетъ длину нити отъ C до точки P, имѣющей абсциссу x, тогда какъ (838) и есть *уравненіе цѣпной линіи.* Вертикаль Oy, проходящая чрезъ нижнюю точку C нити, называется *осью* цѣпной линіи. Горизонталь Ox, лежащая подъ нитью на разстояніи c отъ C, называется *директрисою* цѣпной линіи. Нижняя точка C называется *вершиною* цѣпной линіи.

§ 332. Свойства цѣпной линіи. Уравненія (826) и (829) показываютъ что *горизонтальная слагающая напряженія одинакова во всѣхъ точкахъ цѣпной линіи и равна $w \cdot c$.*

Уравненіе (827) показываетъ, что *вертикальная слагающая напряженія равна $w \cdot s$, то есть пропорціональна длинѣ нити, считаемой отъ вершины C до разсматриваемй точки m.*

Возвышая почленно въ квадратъ и складывая (826) и (827), получимъ:

$$T^2 = T_0^{\,2} + w^2 \cdot s^2$$

или, согласно съ (829):

$$T^2 = w^2\,(s^2 + c^2)$$

или, согласно съ (834):

$$T = w \cdot y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(840)$$

Слѣдовательно: *полное напряженіе равно $w \cdot y$, то есть пропорціонально ординатѣ.*

Укажемъ на нѣкоторыя свойства цѣпной линіи.

Положимъ, что mN есть ордината въ m, такъ что, согласно съ (840):

$$T = w \cdot Nm \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(841)$$

Опустимъ изъ N перпендикуляръ NL на касательную, проведенную въ m. Тогда:

$$\text{уголъ } mNL = \varphi$$

$$mL = mN \cdot sin\,\varphi = s \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(842)$$

согласно съ (827),

$$NL = mN \,.\, cos\,\varphi = c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (843)$$

согласно съ (826).

Изъ (830) имѣемъ:

$$tg\,\varphi = \frac{s}{c}$$

Дифференцируя, получимъ:

$$\frac{d\varphi}{cos^2\,\varphi \,.\, ds} = \frac{1}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (844)$$

Извѣстно, что радіусъ кривизны ρ выражается чрезъ φ формулою:

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (845)$$

Изъ (844) и (845) получимъ:

$$\rho = \frac{c}{cos^2\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (846)$$

Но изъ прямоугольныхъ треугольниковъ LNm и NmH слѣдуетъ:

$$mH = \frac{Nm}{cos\,\varphi} = \frac{LN}{cos^2\,\varphi}$$

или, согласно съ (843):

$$mH = \frac{c}{cos^2\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (847)$$

Изъ (846) и (847) слѣдуетъ:

$$\rho = mH = \text{нормали въ точкѣ } m \quad \ldots\ldots \quad (848)$$

Форма цѣпной линіи вполнѣ опредѣлена, если дано единственное постоянное c, входящее въ ея уравненіе (838). Это постоянное c называется параметромъ цѣпной линіи.

Изъ (846) слѣдуетъ, что c равно радіусу кривизны въ вершинѣ (при $\varphi = 0$).

§ 333. Равновѣсіе неоднородной нити. Если нить неоднородна, то есть плотность ея неодинакова въ разныхъ ея точкахъ. но постепенно мѣняется съ переходомъ отъ одной точки къ другой, то вѣсъ части нити отъ $s = 0$ до $s = s$ будетъ:

$$\int_0^s w ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (849)$$

Поэтому вмѣсто (826) и (827) получимъ:

$$T\,cos\,\varphi = T_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (850)$$

$$T\,sin\,\varphi = \int_0^s w \,.\, ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (851)$$

Отсюда:

$$T_0 \, tg\, \varphi = \int_0^s w ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (852)$$

Дифференцируя (852) получимъ:

$$T_0 \frac{d\varphi}{cos^2 \varphi} = w \, . \, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (853)$$

Отсюда, согласно съ (845):

$$w = \frac{T_0}{\rho \, . \, cos^2 \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (854)$$

Но извѣстно, что:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (855)$$

$$cos\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (856)$$

Подставляя эти величины въ (854), получимъ:

$$w = T_0 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (857)$$

Это уравненіе (857) опредѣляетъ плотность w въ каждой точкѣ неоднородной гибкой нити.

Наоборотъ: можетъ быть данъ законъ:

$$w = f(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (858)$$

распредѣленія плотности. Чтобы найти по этому закону уравненіе неоднородной гибкой нити опредѣляемъ изъ (852) $\frac{dy}{dx}$ (равную $tg\, \varphi$); положимъ, что получили:

$$\frac{dy}{dx} = F(s).$$

Тогда:

$$x = \int [1 + (F(s))^2]^{-\frac{1}{2}} ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (859)$$

$$y = \int [1 + (F(s))^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot F(s) \, . \, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (860)$$

§ 334. Циклоидальная нить. Неоднородная нить виситъ, имѣя форму циклоиды. Найти законъ распредѣленія плотности.

Извѣстно, что въ циклоидѣ, описанной катаньемъ круга радіуса a

$$\rho = 4a \cos\varphi$$

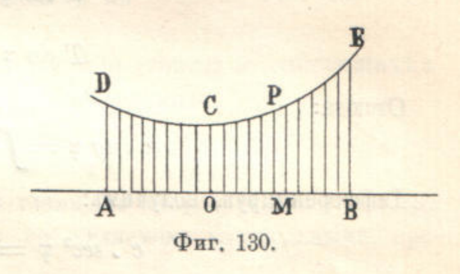
$$s = 4a \sin\varphi$$

Подставляя въ (854), найдемъ:

$$w = \frac{T_0}{4a} \sec^3\varphi = \frac{16a^2\,T_0}{(16a^2 - s^2)^{3/2}} \quad \ldots\ldots. (861)$$

§ **335. Параболическая нить.** Рѣшимъ задачу, относящуюся къ устройству цѣпныхъ мостовъ.

На нити DCE подвѣшена помощью весьма легкихъ вертикальныхъ нитей другая нить AOB (фиг. 130). Вѣсъ нити DCE и вертикальныхъ нитей ничтоженъ сравнительно съ вѣсомъ нити AOB. Вертикальныхъ нитей такъ много, что каждый элементъ нити AOB виситъ на особой вертикальной нити. Найти кривую, по которой должна расположиться верхняя нить DCE для того, чтобы нижняя нить AOB была прямолинейна.



Фиг. 130.

Натяженія въ точкахъ O и M нижней нити горизонтальны и взаимно равны; слѣдовательно вѣсъ части OM несется натяженіями въ точкахъ C и P верхней нити. Поэтому верхняя нить DCE можетъ быть разсматриваема какъ такая однороъная тяжелая нить, въ которой вѣсъ какой-нибудь ея части CP равенъ mx, гдѣ x разстояніе OM.

Равновѣсіе горизонтальныхъ силъ даетъ:

$$T \cos\varphi = T_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (862)$$

Равновѣсіе вертикальныхъ силъ даетъ:

$$T \sin\varphi = mx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (863)$$

Дѣля (863 на 862), получимъ:

$$mx = T_0 \,.\, tg\,\varphi = T_0 \,.\, \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots (864)$$

Интегрируя (864), получимъ:

$$\frac{mx^2}{2} = T_0 \,.\, (y - c), \quad \ldots\ldots\ldots (865)$$

гдѣ c постоянное интеграціи.

Уравненіе (865) представляетъ собою параболу. Итакъ: верхняя нить располагается по параболѣ.

Нижняя нить можетъ быть замѣнена балками моста. Эта задача была рѣшена впервые академикомъ Николаемъ Фуссомъ (Nova Acta Petropo-

litana, t. 12, 1794), проэктировавшимъ цѣпной мостъ черезъ Неву, но нашедшимъ, что изготовлявшіяся въ то время цѣпи не выдержали бы такого моста.

§ 336. Цѣпь равнаго сопротивленія. Тяжелая нить, висящая на двухъ неподвижныхъ точкахъ, такова, что площади ея поперечныхъ сѣченій пропорціональны натяженіямъ. Найти кривую, по которой располагается такая нить.

Вѣсъ элемента нити равенъ $w\, ds$. По условію задачи:

$$T = c \, . \, w, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (866)$$

гдѣ c нѣкоторый постоянный коэффиціентъ. Получимъ:

$$T \cos \varphi = T_0 \quad \ldots \ldots \quad (867)$$

$$T \sin \varphi = \frac{1}{c} \int T\, ds \quad \ldots \ldots \quad (868)$$

Отсюда:

$$c \, . \, tg\, \varphi = \int sec\, \varphi \, . \, ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (869)$$

Дифференцируя, получимъ:

$$c \, . \, sec^2 \varphi = sec\, \varphi \, . \, \frac{ds}{d\varphi} \quad \ldots \ldots \quad (870)$$

Отсюда:

$$\rho \, \cos \varphi = c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (871)$$

Здѣсь φ есть уголъ. составляемый касательною съ горизонталью. Онъ равенъ углу, составленному нормалью съ вертикалью: Слѣдовательно (871) покззываетъ, что въ настоящемъ случаѣ: проложеніе радіуса кривизны на вертикаль, есть величина постоянная.

Пользуясь формулами (855) и (856), получимъ изъ (871):

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-1} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c} \quad \ldots \ldots \quad (872)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{x}{c} + A\right) \ldots \ldots \quad (873)$$

гдѣ A постоянное интеграціи. Если начало взято въ нижней точкѣ нити, то $A = 0$. Поэтому:

$$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{x}{c}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (874)$$

Интегрируя, получимъ:

$$y = c \, . \, lg\, sec\left(\frac{x}{c}\right) \ldots \ldots \quad (875)$$

Вотъ каково уравненіе нити равнаго сопротивленія.

§ 337. Уравненія равновѣсія нити, подъ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ, въ перемѣнныхъ присущихъ задачъ. Пусть (фиг. 131):

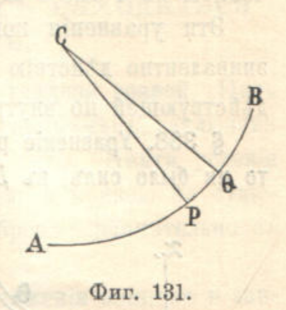
A начало, отъ котораго отсчитывается длина s нити,

$AP = s$,

$AQ = s + ds$,

T натяженіе въ P.

$T + dT$ натяженіе въ Q.



Фиг. 131.

Разложимъ силы, дѣйствующія на элементъ PQ, по касательной, по нормали и по бинормали (бинормалью называется перпендикуляръ къ касательной и нормали), проведеннымъ въ P. Пусть:

$F\,ds$—сила, направленная по касательной въ сторону возрастающихъ s

$G\,ds$—сила, направленная по внутренней нормали,

$H\,ds$—сила, направленная по бинормали,

C—центръ кривизны элемента $ds = PQ$.

Эти три направленія называются главными направленіями кривой въ точкѣ P. Уголъ PCQ равенъ углу $d\varphi$, составляемому касательными, проведенными въ точкахъ P и Q.

Элементъ ds находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силъ:

$$T; \quad T + dT; \quad F\,ds; \quad G\,ds; \quad H\,ds.$$

Равновѣсіе силъ, направленныхъ по касательной, дастъ:

$$(T + dT) \,.\, \cos(d\varphi) - T + F\,ds = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (876)$$

Здѣсь уголъ $d\varphi$ весьма малъ, вслѣдствіе чего $\cos(d\varphi)$ можно принять за единицу, и (876) приметъ видъ:

$$dT + F\,ds = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (877)$$

Равновѣсіе силъ, направленныхъ по нормали, дастъ:

$$(T + dT)\sin(d\varphi) + G\,ds = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (878)$$

Здѣсь въ суммѣ $T + dT$ можно пренебречь членомъ dT и, вслѣдствіе малости угла $d\varphi$ положить $\sin(d\varphi) = d\varphi$. Тогда (878), согласно съ (845) приметъ видъ:

$$T\frac{ds}{\rho} + G\,ds = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (879)$$

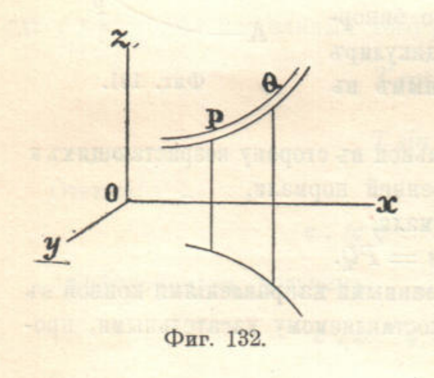
Двѣ послѣдовательныя касательныя, по которымъ направлены натяженія T и $T + dT$, лежатъ въ плоскости прикосновенія и потому не дадутъ проложеній на бинормаль перпендикулярную къ этой плоскости. Поэтому равновѣсіе силъ, направленныхъ по бинормали, дастъ:

$$H \,.\, ds = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (880)$$

Уравненія (877), (879) и (880) и суть искомыя общія уравненія равновѣсія нити въ перемѣнныхъ ρ и s. Плотность w предполагается включенною въ $F\,ds$, $G\,ds$ и $H\,ds$.

Эти уравненія показываютъ, что дѣйствіе натяженій T и $T + dT$ эививалентно дѣйствію силы dT дѣйствующей по касательной и силѣ $T\,\frac{ds}{\rho}$ дѣйствующей по внутренней нормали.

§ 338. Уравненіе равновѣсія гибкой нити, подъ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ, въ Декартовыхъ координатахъ. На элементъ $ds = PQ$ (фиг. 132) дѣйствуютъ силы $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$ и натяженія, приложенныя въ P и Q.



Фиг. 132.

Проложеніе на ось x, натяженія, дѣйствующаго въ P равно $T\cos(ds, x)$ или $T\,\frac{dx}{ds}$ и направлено влѣво.

Проложеніе, на ось x, натяженія, дѣйствующаго въ Q равно, слѣдовательно:

$$\left(T\,\frac{dx}{ds}\right) + \frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dx}{ds}\right) ds$$

и дѣйствуетъ вправо. Поэтому равновѣсіе силъ, направленныхъ по оси x дастъ:

$$\frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dx}{ds}\right) ds + X\,ds = 0.$$

или

$$\frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dx}{ds}\right) + X = 0.$$

Дѣйствуя такъ же съ проложеніями на оси y и z, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dx}{ds}\right) + X = 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dy}{ds}\right) + Y = 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dz}{ds}\right) + Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (881)$$

Таковы искомыя уравненія равновѣсія гибкой нити въ Декартовыхъ координатахъ.

ГЛАВА II.

Равновѣсіе нитей, принужденныхъ находиться на данныхъ кривыхъ.

§ 339. Равновѣсіе легкой нити на совершенно гладкой кривой. Нить принуждена находиться на данной плоской кривой (напримѣръ, заключена въ трубку), и на концы ея дѣйствуютъ данныя силы. Найти условія равновѣсія такой нити, предполагая, что между ею и кривою не существуетъ тренія и что вѣсомъ нити можно пренебречь сравнительно съ дѣйствующими на ея концы силами.

На такую нить дѣйствуютъ только данныя натяженія концовъ и давленія кривой. Если $R\,ds$ есть давленіе кривой на элементъ ds нити, то R есть давленіе кривой на единицу длины нити. Это давленіе обыкновенно считается положительнымъ въ направленіи противуположномъ направленію радіуса кривизны.

Уравненія (877) и (879) дадутъ:

$$dT = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (882)$$

$$T\frac{ds}{\rho} - R\,ds = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (883)$$

Эти уравненія выражаютъ, что если легкая нить принуждена оставаться на совершенно гладкой кривой подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ концамъ и находится въ равновѣсіи, то напряженіе T постоянно (одинаково во всѣхъ элементахъ нити) и давленіе R пропорціонально кривизнѣ.

§ 340. Равновѣсіе тяжелой нити на совершенно гладкой кривой. Положимъ теперь, что вѣсъ нити настолько великъ, что нельзя имъ пренебречь (фиг. 133).

Элементъ $ds = PQ$ находится подъ дѣйствіемъ силъ:

$w\,ds$ — направленной по ординатѣ PN,

$R\,ds$ — направленной по нормали PG,

и натяженій въ точкахъ P и Q.

Разлагая эти силы по касательной и по нормали, получимъ:

$$dT - w\,ds\,.\,\sin\varphi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (883)$$

$$T\frac{ds}{\rho} - w\,ds\,.\,\cos\varphi - R\,.\,ds = 0 \quad \ldots\ldots \quad (884)$$

Такъ какъ $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx}$, то (883), по интегрированіи, даетъ:

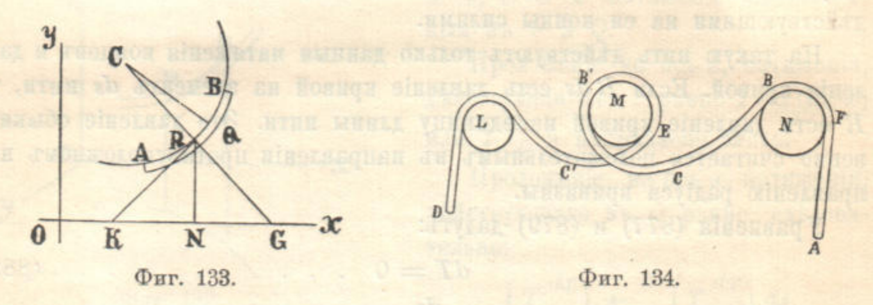
$$T = wy + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (885)$$

Поэтому, если T_1 и T_2 суть натяженія въ точкахъ, ординаты которыхъ суть y_1 и y_2, то:

$$T_2 - T_1 = w\,(y_2 - y_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (886)$$

Этотъ важный результатъ можетъ быть выраженъ такъ: *если тяжелая нить принуждена оставаться на совершенно гладкой кривой, лежащей въ вертикальной плоскости и находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ данныхъ натяженій на концахъ, то разность натяженій въ какихъ-либо двухъ ея точкахъ равна вѣсу такой же нити, имѣющей длину равную разности ординатъ этихъ точекъ.*

Этотъ результатъ выведенъ только изъ уравненія (883), то есть изъ равновѣсія силъ, дѣйствующихъ только по направленію касательной. Поэтому онъ не зависитъ отъ уравненія (884). Слѣдовательно, если нить только нѣкоторыми своими частями принуждена лежать на совершенно



Фиг. 133. Фиг. 134.

гладкихъ кривыхъ, какъ это показано на чертежѣ (фиг. 134), то уравненіе (886) и результатъ, имъ выражаемый, остаются вѣрными и для такой нити. Если при этомъ нить виситъ такимъ образомъ только подъ дѣйствіемъ собственной тяжести безъ особыхъ грузовъ на концахъ, то изъ сказаннаго по поводу (886) слѣдуетъ, что концы ея A и B будутъ находиться на одной горизонтали и ниже этой горизонтали не будетъ находиться ни одна точка нити, а наибольшія напряженія будутъ въ наивысшихъ точкахъ нити.

Для опредѣленія натяженія въ какой-либо точкѣ P (фиг. 133) напишемъ (884) въ видѣ:

$$R\rho = T - w\rho \cdot \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (887)$$

Если T_1 есть натяженіе въ какой-нибудь точкѣ A и z высота точки P надъ A (разность высотъ точекъ P и A), то, согласно съ (886):

$$T = T_1 + wz$$

и (887) принимаетъ видъ:

$$R\rho = T_1 + w(z - \rho \cdot \cos\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (888)$$

Отложивъ по нормали длину $PS = \rho$ въ сторону противоположную ρ, получимъ точку S, которую можно назвать *антицентромъ*. Высота антицентра S надъ A равна

$$z - \rho \cdot \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (889)$$

(888) выражаетъ, слѣдовательно, что разность $R\rho - T_1$ равна вѣсу нити, длина которой равна разности высотъ антицентра S и точки A.

Если конецъ A свободенъ (фиг. 134), то $R\rho$ нъ точкѣ B равно произведенію w на высоту B надъ A. Въ тѣхъ точкахъ C, C' . . . въ которыхъ нить свободна, давленіе R равно нулю. Слѣдовательно, всѣ антицентры кривизны свободныхъ частей лежатъ на прямой, соединяющей свободные концы A и D. Эта прямая называется *общею директрисою* провѣсовъ C, C' . . .

Отсюда слѣдуетъ, что натяженіе T въ каждой точкѣ P нити равно wy, гдѣ y есть высота точки P надъ горизонталью, называемою *статическою директрисою.* Величина $R\rho$ равна wy', гдѣ y' есть высота антицентра надъ статическою директрисою. Если имѣются свободные концы A и D, то они лежатъ на статической директрисѣ.

§ 341. Равновѣсіе легкой нити на шероховатой кривой. Положимъ, что вѣсъ нити очень малъ, но между нитью и кривою, на которой она лежитъ, существуетъ треніе. Благодаря тренію, силы F и F', дѣйствующія на концахъ A и B (фиг. 133) не равны.

Положимъ, что нить стремится сдвинуться въ направленіи AB. Треніе на элементѣ ds равно $\mu R\,ds$, гдѣ μ коэффиціентъ тренія. Оно дѣйствуетъ въ направленіи BA.

Примѣняя къ настоящему случаю уравненія (883) и (884) съ пренебреженіемъ вѣса и введеніемъ тренія, получимъ:

$$dT - \mu R\,ds = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (890)$$

$$T\frac{ds}{\rho} - R\,ds = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (891)$$

Исключая R, найдемъ:

$$\frac{dT}{T} = \mu\frac{ds}{\rho} = \mu\,d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (892)$$

Интегрируя получимъ:

$$ly\;T = \mu\varphi + A$$

или

$$T = Be^{\mu\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (893$$

гдѣ A и B неопредѣленныя постоянныя.

Если T_1 и T_2 суть натяженія въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ касательныя составляютъ съ горизонталью углы φ_1 и φ_2, то:

$$T_2 = T_1\,.\,e^{\mu(\varphi_2-\varphi_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (894)$$

Это уравненіе (894) показываетъ, что если легкая нить находится на шероховатой кривой въ предѣльномъ равновѣсіи, то:

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu(\varphi_2-\varphi_1)}$$

Изъ (891) видимъ, что $R\rho$ равно натяженію T.

§ 342. Равновѣсіе тяжелой нити на шероховатой кривой. Вводя въ уравненія (883) и (884) и вѣсъ и треніе, получимъ:

$$dT - w\,.\,ds\,.\,\sin\varphi - \mu R\,ds = 0 \quad \ldots\ldots \quad (895)$$

$$\frac{T\,.\,ds}{\rho} - w\;\;ds\,.\,\cos\varphi - R\,ds = 0 \quad \ldots\ldots \quad (896)$$

Исключая R, получимъ:

$$\frac{dT}{d\varphi} - \mu T = w\rho\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) \quad \ldots\ldots \quad (897)$$

Помноживъ обѣ части на $e^{-\mu\varphi}$ и интегрируя, получимъ:

$$Te^{-\mu\varphi} = \int w\rho\,(\sin\varphi - \mu\,.\,\cos\varphi)\,.\,e^{-\mu\varphi}\,d\varphi + C \quad \ldots \quad (898)$$

Если дана форма кривой, то опредѣливъ ρ чрезъ φ, вставивъ въ (898) и взявъ интегралъ, получимъ:

$$Te^{-\mu\varphi} = f(\varphi) + C \quad \ldots\ldots \quad (899)$$

Давленіе опредѣлится уравненіемъ:

$$R\rho = T - w\rho\,.\,\cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (900)$$

Если нить огибаетъ небольшой блокъ, такъ что можно пренебречь вѣсомъ ея части прилегающей къ блоку, то можно пользоваться формулами предыдущаго параграфа и для тяжелой нити.

ГЛАВА III.

Равновѣсіе гибкой нити на поверхности.

§ 343. Равновѣсіе гибкой нити на совершенно гладкой поверхности подъ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ.

Пусть:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (901)$$

есть уравненіе поверхности, на которой лежитъ нить. Пусть:

$R\,ds$ — давленіе поверхности на нить, направленное по *внѣшней* нормали,

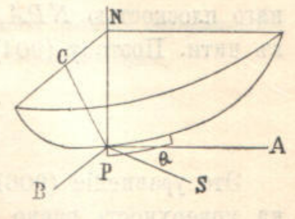
l, m, n — косинусы угловъ, составляемыхъ *внутреннею* нормалью съ осями.

Пользуясь уравненіями (881) и включая въ нихъ силу $R\,ds$ получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X - Rl = 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y - Rm = 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z - Rn = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (902)$$

Здѣсь мы имѣемъ однимъ неизвѣстнымъ R больше, чѣмъ въ (881), но за то имѣемъ еще уравненіе (901).

§ 344. Уравненіе равновѣсія нити, лежащей на поверхности въ перемѣнныхъ присущихъ задачѣ. Пусть (фиг. 135):



Фиг. 135.

PQ — элементъ ds нити.
PA — касательная къ нити въ точкѣ P,
APB — плоскость касательная къ поверхности въ точкѣ P.
PB — перпендикуляръ къ PA въ плоскости APB.
PN — нормаль къ поверхности въ P,
PC — радіусъ кривизны нити, лежащій въ плоскости BPN,
θ — *уголъ CPN образуемый плоскостью CPA соприкосновенія* нити и нормалью PN.

Элементъ нити находится подъ дѣйствіемъ слѣдующихъ силъ: $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$ дѣйствующихъ по осямъ координатъ, которыя не изображены на чертежѣ (фиг. 135),

давленія Rds по NP, натяженій въ P и Q, которыя, согласно съ § 339-мъ, суть: dT по PQ и $T\frac{ds}{\rho}$ по PC.

Равновѣсіе силъ, направленныхъ по касательной, даетъ:

$$dT + Xds\frac{dx}{ds} + Yds\frac{dy}{ds} + Zds\frac{dz}{ds} = 0.$$

Отсюда;

$$T + \int (Xdx + Ydy + Zdz) = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (903)$$

гдѣ A постоянное интеграціи.

Положимъ, что сила консервативна (X, Y, Z—*суть производныя по* x, y, z силовой функціи W). Тогда $\int(Xdx + Ydy + Zdz)$ есть работа заданныхъ силъ. Уравненіе (903) выражаетъ, что *сумма натяженія T и работы заданныхъ силъ есть величина постоянная* (одинакова во всѣхъ точкахъ нити).

Взявъ интегралъ $\int(Xdx + Ydy + Zdz)$ въ предѣлахъ между двумя точками P и P' нити, получимъ: разность $T_2 - T_1$ натяженій въ двухъ точкахъ нити не зависитъ отъ длины и формы нити и равна разности работъ въ этихъ точкахъ, производимыхъ заданными силами.

Условимся измѣрять ρ *внутрь* по PC и R *внѣ* по NP. Положимъ, что l, m, n суть косинусы угловъ составляемыхъ съ осями координатъ *внутреннею* нормалью PN. Равновѣсіе силъ, направленныхъ по нормали, дастъ:

$$\frac{Tds}{\rho}\cos\theta + Xlds + Ymds + Znds - Rds = 0 \quad . \quad . \quad . (904)$$

По извѣстной теоремѣ о кривизнѣ линій, лежащихъ на поверхностяхъ, радіусъ кривизны ρ нити будетъ равенъ

$$\rho = \rho' \cos \theta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (905)$$

гдѣ ρ' есть радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія поверхности, сдѣланнаго плоскостью NPA, содержащею нормаль поверхности и касательную къ нити. Поэтому (904) приметъ видъ:

$$\frac{T}{\rho'} + Xl + Ym + Zn = R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (906)$$

Это уравненіе (906) показываетъ, что равнодѣйствующее давленіе R на поверхность равно суммѣ нормальнаго давленія, происходящаго отъ натяженія, и давленія равнаго проложенію заданныхъ силъ на нормаль.

Разсмотримъ наконецъ равновѣсіе силъ, направленныхъ по касательной PB къ поверхности. Пусть λ, μ, ν суть косинусы наклоненія прямой PB къ осямъ координатъ, удовлетворяющіе уравненіямъ перпендикулярности:

$$\lambda \frac{df}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \nu \frac{df}{dz} = 0$$

$$\lambda \frac{dx}{ds} + \mu \frac{dy}{ds} + \nu \frac{dz}{ds} = 0.$$

Равновѣсіе силъ, направленныхъ по PB дастъ:

$$\frac{T}{\rho} \sin \theta + X\lambda + Y\mu + Z\nu = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (907)$$

Уравненія (903), (906) и (907) суть искомыя уравненія равновѣсія.

§ 345. Геодезическія линіи. Если на какую-нибудь часть нити не дѣйствуютъ заданныя силы, а только натяженія, то для этой части $X = 0$ $Y = 0$, $Z = 0$. Это можетъ быть, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если мы, держа нить въ рукахъ, наложимъ ее на поверхность такъ, что концы, идущіе отъ рукъ къ поверхности, будутъ вытянуты въ прямыя линіи, а остальная часть нити натянется на поверхности, принявъ видъ нѣкоторой кривой; эта именно часть нити, лежащая на поверхности и разсматривается.

Уравненіе (903) показываетъ, что натяженія во всѣхъ точкахъ части, лежащей на поверхности, одинаково.

Уравненіе (906) показываетъ, что давленіе пропорціонально кривизнѣ поверхности по нити.

Уравненіе (907) показываетъ, что $\theta = 0$, то-есть, что плоскость соприкосновенія нити содержитъ въ себѣ нормаль къ поверхности. Кривая, идущая по поверхности такъ, что во всѣхъ ея точкахъ нормаль поверхности находится въ плоскости соприкосновенія, называется *геодезическою линіею*.

Итакъ: *Нить, натянутая на поверхность, принимаетъ видъ одной изъ геодезическихъ линій поверхности.*

Поэтому, напримѣръ:

1) *Нить, натянутая на шаръ, располагается по дугѣ большого круга.*

2) *Нить, натянутая на круглый цилиндръ, располагается по винтовой линіи, частными случаями которой могутъ быть также окружность перпендикулярная къ образующимъ или одна изъ образующихъ.*

ГЛАВА IV.

Равновѣсіе растяжимой гибкой нити.

§ 346. Законъ Гука. Положимъ, что растяжимая (эластическая) нить имѣетъ, въ обыкновенномъ (нерастянутомъ) состояніи длину l_1. Если приложить къ ея концамъ двѣ равныя и противуположныя силы, изъ коихъ каждая равна T, то нить растянется, и длина ея сдѣлается равною l. Опытъ показываетъ, что полное удлиненіе $l - l_1$ нити пропорціонально ея первоначальной длинѣ l_1 и пропорціонально силѣ T.

Въ этомъ и состоитъ законъ Гука, который можетъ быть выраженъ формулою:

$$l - l_1 = l_1 \frac{T}{E} \quad \text{. . . . .} \quad (908)$$

гдѣ E—есть нѣкоторый постоянный для даннаго вещества коэффиціентъ.

Если двѣ равныя и параллельныя нити будутъ растягиваемы силами, изъ которыхъ каждая равна T и приложена къ совокупности обѣихъ нитей, то, само собою разумѣется, что для такого же удлиненія ихъ, какое было произведено надъ одною нитью, потребуется вдвое большая сила T. Слѣдовательно *сила, потребная для произведенія даннаго удлиненія нити, приготовленной изъ даннаго вещества, пропорціональна площади поперечнаго сѣченія нити.*

Поэтому и коэффиціентъ E пропорціоналенъ площади поперечнаго сѣченія нерастянутой нити. Однако обыкновенно коэффиціентъ E относятъ къ единицѣ площади поперечнаго сѣченія, для того чтобы можно было составить таблицы такихъ коэффиціентовъ для данныхъ веществъ. Коэффиціентъ E, отнесенный къ единицѣ площади поперечнаго сѣченія, называется *коэффиціентомъ упругости* или *модулемъ Юнга.* Чѣмъ *больше* коэффиціентъ упругости вещества, тѣмъ *менѣе* растягивается, подъ дѣйствіемъ данной силы, нить даннаго поперечнаго сѣченія, приготовленная изъ этого вещества.

Если бы можно было растянуть нить вдвое противъ ея натуральной длины и нить при этомъ не рвалась бы и не переставала слѣдовать закону Гука, то, какъ видно изъ (908), нужно было бы приложить къ ея

концамъ такія силы T, изъ коихъ каждая равнялась бы E. Если одинъ конецъ нити закрѣпленъ неподвижно, то достаточно приложить къ свободному ея концу силу T, для того чтобы, по 3-му закону Ньютона, сейчасъ же появилось равное и противуположное противодѣйствіе T у закрѣпленнаго конца. Поэтому можно сказать, что *коэффиціентъ упругости равенъ тому грузу, который надо подвѣсить на свободный конецъ нити, приготовленной изъ даннаго вещества и имѣющей площадь поперечнаго сѣченія равную единицѣ, для того чтобы, теоретически говоря, удвоить длину нити.*

На самомъ дѣлѣ такое удвоеніе длины безъ разрыва и безъ отступленія отъ закона Гука можетъ быть произведено только съ нитью приготовленною изъ такого растяжимаго вещества, какъ каучукъ. Въ большинствѣ же случаевъ, при постепенной нагрузкѣ, раньше чѣмъ будетъ достигнуто удвоеніе длины, произойдетъ разрывъ, а еще раньше начнутэя отступленія отъ закона Гука.

Тотъ наибольшій грузъ, который можно подвѣсить на нить, имѣющую площадь поперечнаго сѣченія равную единицѣ, не заставляя еще ея отступать отъ закона Гука, называется *предѣломъ упругости.*

Тотъ наименьшій грузъ, при которомъ происходитъ разрывъ нити, имѣющей площадь поперечнаго сѣченія равную единицѣ, называется *предѣломъ времённаго сопротивленія.*

Въ послѣдующемъ мы будемъ предполагать, что не заходимъ за предѣлъ упругости.

§ 347. Равновѣсіе растяжимой нити, растягиваемой грузомъ W. Изслѣдуемъ равновѣсіе однородной нити, одинъ конецъ которой закрѣпленъ неподвижно, а на другой надѣтъ грузъ W. Пусть (фиг. 136):

O_1A_1—нить въ состояніи нерастянутомъ (ни грузомъ, ни своимъ вѣсомъ),

OA—нить растянутая грузомъ W,

P_1Q_1—элементъ нерастянутой нити,

PQ—элементъ растянутой нити,

w—вѣсъ единицы нерастянутой нити,

$$l_1 = O_1A_1; \quad x_1 = O_1P_1$$

$$l = OA; \quad x = OP$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E}$$

Фиг. 136.

Натяженіе T въ точкѣ P уравновѣшивается вѣсомъ части нити PA и грузомъ W. Поэтому:

$$T = w\,(l_1 - x_1) + W \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (909)$$

Прилагая формулу (908) къ элементу PQ получимъ:

$$dx - dx_1 = dx_1 \,.\, \varepsilon \,.\, T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (910)$$

Исключая T изъ (909) и (910), получимъ:

$$\frac{dx}{dx_1} = 1 + \varepsilon\,[w\,(l_1 - x_1) + W] \;\ldots\ldots\; (911)$$

Интегрируя (911), получимъ:

$$x = x_1 + \varepsilon\left[\,w\left(l_1 x_1 - \frac{1}{2}\,x_1{}^2\right) + W x_1\right] + C \;\ldots\; (912)$$

При $x_1 = 0$ и $x = 0$. Слѣдовательно $C = 0$. Поэтому, полагая въ (912) $x_1 = l_1$, получимъ:

$$l - l_1 = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,.\,w\,.\,l_1{}^2 + \varepsilon W\,.\,l_1 = \text{удлиненіе} \;\ldots\; (914)$$

Еслибы не было груза, то удлиненіе, согласно съ (§ 913) было бы $\frac{1}{2}\,\varepsilon\,.\,w\,.\,l_1{}^2$. Если бы нить не имѣла вѣса, то удлиненіе подъ дѣйствіемъ груза, согласно (913), было бы $\varepsilon W l_1$. Слѣдовательно: *удкиненіе* $\frac{1}{2}\,\varepsilon w l_1{}^2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon w l_1\,.\,l_1$ *подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса нити равно тому удлиненію, которое происходитъ отъ подвѣшиванія груза равнаго половинѣ вѣса* $\varepsilon w l_1$ *нити.*

§ 348. Уравненія растяжимой нити, подвѣшенной въ двухъ точкахъ. Для опредѣленія уравненія той кривой, по которой располагается тяжелая растяжимая нить, подвѣшенная въ двухъ точкахъ, поступаемъ такъ, какъ въ § 331-мъ. Пусть $CP = s_1 =$ длина нерастянутой части, считая отъ нижней точки до P, остальныя обозначенія такія же, какъ въ § 331-мъ. Получимъ:

$$T\cos\varphi = T_0 \;\ldots\ldots\; (914)$$

$$T\sin\varphi = W\,.\,s_1 \;\ldots\ldots\; (915)$$

Отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi = \frac{w s_1}{T_0} = \frac{s_1}{c} \;\ldots\ldots\; (916)$$

$$T^2 = w^2\,(c^2 + s_1{}^2) \;\ldots\ldots\; (917)$$

Но

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi;\quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi.$$

Поэтому изъ (914), (915) и (908), получимъ:

$$x = \int \frac{T_0}{T}\,ds = \int \frac{wc}{T}\left(1 + \frac{T}{E}\right) ds_1 =$$

$$= \frac{wc}{E}\,s_1 + c\,.\,lg\left[\frac{s_1 + \sqrt{c^2 + s^2}}{c}\right] \;\ldots\ldots\; (918)$$

$$y = \int \frac{w\,.\,s_1}{T}\,ds = w\int \frac{s_1}{T}\left(1 + \frac{T}{E}\right) ds_1 = \frac{w}{2E}\,(c^2 + s_1{}^2) + \sqrt{c^2 + s_1{}^2} \quad (919)$$

Исключая s_1 изъ (918) и (919) получили бы искомое уравненіе.

ОТДѢЛЪ VIII.

Равновѣсіе упругихъ стержней.

ГЛАВА I.

Растяженіе стержней.

§ 349. Растяженіе вертикальнаго стержня, верхній конецъ котораго закрѣпленъ неподвижно. Представимъ себѣ вертикальный стержень, верхній конецъ котораго закрѣпленъ неподвижно. Такой стержень будетъ растягиваться подъ вліяніемъ груза, подвѣшеннаго на его нижнемъ концѣ и даже подъ вліяніемъ собственнаго вѣса. Если ω есть площадь поперечнаго сѣченія стержня, которое мы предполагаемъ значительно меньшимъ длины его, и T натяженіе на единицѣ площади поперечнаго сѣченія, то натяженіе во всѣмъ сѣченіи ω равно ωT. Такъ какъ стержень можно себѣ представить состоящимъ изъ множества волоконъ, то къ нему приложимъ законъ Гука, данный въ § 346-мъ, то есть формула

$$\frac{l - l_1}{l_1} = \frac{T}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (920)$$

§ 350. Теорія растяженія прямого стержня. Разсмотримъ болѣе подробно растяженіе стержня. Подъ именемъ прямого стержня мы разумѣемъ упругое твердое тѣло, имѣющее въ нерастянутомъ состояніи форму цилиндра съ поперечнымъ сѣченіемъ какого угодно вида. При растяженіи стержень дѣлается тоньше, такъ что его частицы подвергаются не только продольнымъ, но и поперечнымъ перемѣщеніемъ и только *одно* прямолинейное волокно стержня не подвергается поперечнымъ перемѣщеніемъ; оно называется *центральнымъ*.

Примемъ центральное волокно за ось x и возьмемъ начало координатъ въ точкѣ его закрѣпленія. Положимъ, что растягивающія силы на концахъ распредѣлены такъ по поперечнымъ сѣченіямъ концовъ, что каждое плоское поперечное сѣченіе остается плоскимъ и перпендикулярнымъ къ центральному волокну и послѣ растяженія стержня. Пусть:

x, y, z—координаты точки P стержня до растяженія,

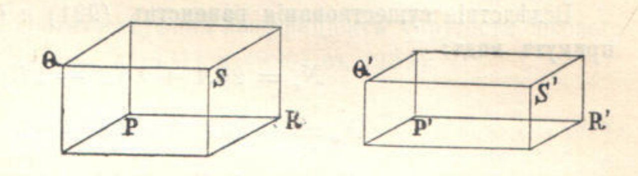
$(x + u)$, $(y + v)$, $z + w)$—координаты точки P послѣ растяженія.

Докажемъ, что, полагая:

$$u = Ax;\ v = -By;\ w = -Cz \quad \ldots\ldots (921)$$

можно найти такія постоянныя A, B, C, при которыхъ удовлетворятся уравненія равновѣсія стержня.

Положимъ, что $PQRS$ (фиг. 137) есть элементъ стержня до растяженія, имѣющій видъ параллелепипеда, у котораго стороны PQ и RS перпендикулярны къ центральному волокну. По принятой нами гипотезѣ, относительно того, что плоскія поперечныя сѣченія остаются плоскими и перпендикулярными къ центральному волокну, параллелепипедъ $PQRS$, послѣ растяженія приметъ видъ тоже прямоугольнаго параллелепипеда $P'Q'R'S'$ (фиг. 137). Слѣдовательно натяженія на всѣхъ его сторонахъ будутъ перпендикулярны къ этимъ сторонамъ. Пусть N_x, N_y, N_z натяженія параллельныя осямъ и отнесенныя къ единицѣ площади перпендикулярныхъ къ нимъ граней параллелепипеда, дѣйствующія на грани сходящіяся въ P'. Условимся считать ихъ положительными— когда они растягиваютъ (какъ въ нити) и отрицательными, когда они сжимаютъ. Пусть:



Фиг. 137.

a, b, c—ребра параллелепипеда до растяженія.

$a\,(1+\alpha)$, $b\,(1+\beta)$, $c\,(1+\gamma)$—ребра параллелепипеда послѣ растяженія.

Силы N_x, N_y, N_z будутъ функціями перемѣнныхъ α, β, γ. Разлагая эти функціи въ ряды по возрастающимъ степенямъ перемѣнныхъ α, β, γ и пренебрегая степенями выше первой, получимъ:

$$N_x = k\alpha + \lambda\,(\beta + \gamma) \quad \ldots\ldots (922)$$

Здѣсь при β и γ коэффиціенты одинаковы, потому что мы предполагаемъ вещество стержня однороднымъ по отношенію растягиванія по какимъ бы то ни было направленіямъ (изотропнымъ, а не кристаллическимъ или слоистымъ). По той же причинѣ N_y должно такъ же выражаться чрезъ β, γ, α, какъ N_x выражено чрезъ α, β, γ. Поэтому:

$$N_y = k\beta + \lambda\,(\gamma + \alpha) \quad \ldots\ldots (922)$$

Точно такъ же:

$$N_z = k\gamma + \lambda\,(\alpha + \beta) \quad \ldots\ldots (924)$$

Полагая:

$$k - \lambda = 2\mu,$$

можно представить (922), (923) и (924) въ болѣе симметричной формѣ:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= 2\mu\alpha + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) \\ N_y &= 2\mu\beta + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) \\ N_z &= 2\mu\gamma + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (925$$

Ребра $dx\ dy\ dz$ нерастянутаго элемента превратились, послѣ растяженія въ $dx + du$, $dy + dv$, $dz + dw$. Слѣдовательно:

$$\alpha = \frac{du}{dx};\ \beta = \frac{dv}{dy};\ \gamma = \frac{dw}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots (926)$$

Вслѣдствіе существованія равенствъ (921) и (926) уравненія (925), примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= 2\mu A + \lambda(A - 2B) \\ N_y &= -2\mu B + \lambda(A - 2B) \\ N_z &= -2\mu B + \lambda(A - 2B) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (927)$$

Эти уравненія не зависятъ отъ x, y, z, такъ что каждый *внутренній* элементъ находится подъ дѣйствіемъ равныхъ и противуположныхъ силъ, приложенныхъ къ его противуположнымъ гранямъ, такъ какъ, напримѣръ, правая грань одного служитъ лѣвою гранью сосѣдняго. Слѣдовательно, при принятой гипотезѣ, выраженной уравненіями (921) *внутренніе элементы находятся въ равновѣсіи.*

Остается разсмотрѣть элементы *пограничные*, то-есть такіе, у которыхъ одна или нѣсколько граней находятся на боковой поверхности стержня. Такія грани параллельны центральной оси и (въ пустотѣ) не подвержены никакимъ внѣшнимъ давленіямъ. Слѣдовательно для равновѣсія пограничныхъ элементовъ необходимо, чтобы N_y и N_z были равны нулю, то-есть, согласно съ (927), нужно, чтобы:

$$-2\mu B + \lambda(A - 2B) = 0$$

или

$$\frac{B}{A} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (928)$$

Исключая B изъ (928) и перваго уравненія системы (927) получимъ:

$$N_x = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} A \quad \ldots\ldots\ldots (929$$

Согласно нашимъ обозначеніямъ: Ax—есть удлиненіе, Bx—боковое сжатіе стержня длины x и ширины y; N_x—есть растягивающая сила на единицу площади поперечнаго сѣченія. Поэтому (928) и (929) даютъ:

$$A = \frac{\text{удлиненіе}}{\text{первоначальная длина}} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 1\mu)} N_x \quad \ldots (930)$$

$$B = \frac{\text{уменьшеніе ширины}}{\text{первоначальная ширина}} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} N_x \ldots \quad (931)$$

При такихъ A и B всѣ элементы уравновѣшены; что и требовалось доказать.

Сравнивая (930) съ закономъ Гука:

$$\frac{l - l_1}{l_1} = \frac{T}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (920)$$

видимъ, что:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (932)$$

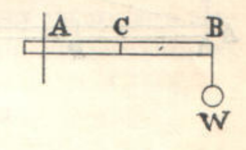
Называя чрезъ E_1 соотвѣтствующій коэффиціентъ упругости бокового сжатія, получимъ изъ сравненія (931) и (920) съ (932):

$$E_1 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda} E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (932)$$

ГЛАВА II.

Сгибаніе стержней.

§ 351. Общія понятія о сгибаніи горизонтальнаго прямого стержня, задѣланнаго однимъ концомъ въ стѣну. Положимъ, что AB (138) есть прямой горизонтальный упругій стержень, задѣланный своимъ концомъ A въ неподвижную стѣну и несущій на свободномъ концѣ B грузъ W. Изслѣдуемъ, каковы напряженія въ сѣченіи, проходящемъ чрезъ точку C, которыми поддерживается часть CB стержня и грузъ W.



Фиг. 138.

Положимъ сначала, что вѣсомъ самого стержня можно пренебречь. Реакція въ C не можетъ состоять изъ одной силы, потому что тогда эта сила уравновѣшивалась бы силою W, съ которою она не можетъ лежать на одной прямой. Чтобы опредѣлить совокупность реакцій дѣйствующихъ въ C, перенесемъ силу W въ C. Для того чтобы при этомъ не нарушить равновѣсія, мы обязаны, согласно съ § 91-мъ, добавить еще пару, имѣющую моментъ $W \,.\, BC$. Очевидно, что внутреннія упругія силы (напряженія) должны быть, для равновѣсія, эквивалентны силѣ W приложенной въ C по вертикали внизъ и парѣ съ моментомъ $W \,.\, BC$, но дѣйствовать въ противоположную сторону.

Если тяжестью стержня нельзя пренебречь, то можно разсматривать вѣсъ W' части CB сосредоточеннымъ въ срединѣ отрѣзка CB. Перенеся и его въ C, должны мы добавить пару съ моментомъ $W' \,.\, \frac{BC}{2}$. Итакъ:

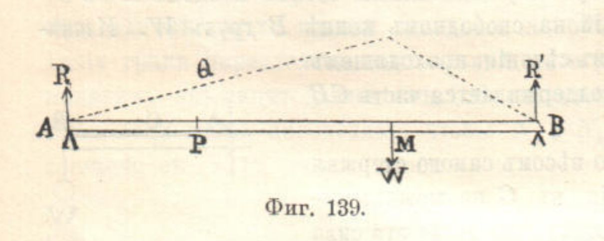
избравъ C центромъ приведенія силъ, получимъ, что въ C дѣйствуютъ: 1) сила $W + W'$ и 2) пара, имѣющая моментъ $W \,.\, BC + W' \,.\, \frac{BC}{2}$. Внутреннія напряженія въ C должны уравновѣшивать эту пару и силу. Моментъ $W \,.\, BC + W' \,.\, \frac{BC}{2}$ называется *сгибающимъ моментомъ* въ данномъ случаѣ.

Сила $W + W'$ называется *сдвигомъ*.

Замѣтимъ, что оказалось достаточнымъ разсмотрѣть только силы, которыя были приложены по одну сторону отъ C, для опредѣленія реакцій въ C. Это происходитъ потому, что реакціи въ C противъ силъ, дѣйствующихъ на CB, уравновѣшиваются этими силами; равныя и противоположныя реакціи въ C противъ силъ, дѣйствующихъ на AC, уравновѣшиваются этими силами. Поэтому достаточно изслѣдовать внѣшнія силы, дѣйствующія по одну сторону разсматриваемаго сѣченія; ихъ совокупность должна уравновѣшиваться реакціями этого сѣченія.

Всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія по одну сторону разсматриваемаго сѣченія приводятся въ какую-нибудь точку C этого сѣченія, *и* получается пара, моментъ которой называется *сгибающимъ моментомъ* и сила перпендикулярная къ балкѣ, называемая *сдвигомъ*.

§ 352. Невѣсомая балка, лежащая на двухъ опорахъ подъ дѣйствіемъ одного груза подвѣшеннаго между опорами. Балка, вѣсомъ которой можно пренебречь, лежитъ горизонтально на двухъ опорахъ A и B. Тяжелый грузъ W передвигается весьма тихо по балкѣ отъ одного конца до другого. Найти напряженія въ каждой точкѣ балки (фиг. 139).



Фиг. 139.

Положимъ, что грузъ W находится въ точкѣ M. Пусть:

$AM = \xi$;

$AB = l$;

$BM = l - \xi$;

R и R' — давленія на опоры A и B.

Согласно §§ 81 и 83 получимъ:

$$R'l = W_1 \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (934)$$

$$R_1 l = W(l - \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (935)$$

Этими уравненіями опредѣляются R и R'.

Найдемъ напряженія въ точкѣ P, полагая $AP = x$. Для этого, согласно съ предыдущимъ параграфомъ, достаточно разсмотрѣть равновѣсіе части AP балки, находящейся подъ дѣйствіемъ только силы R. Перенеся эту силу въ P видимъ, что сдвигъ въ P равенъ R; сгибающій моментъ равенъ Rx.

Сгибающій моментъ легче можетъ сломать балку чѣмъ сдвигъ, поэтому

его именно и изслѣдуемъ подробнѣе. Откладывая отъ каждой точки балки ординату y равную Rx получимъ прямую

$$y = Rx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (936)$$

Точно также съ другой стороны точки M получимъ прямую

$$y = R'(l - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (937)$$

Эти двѣ прямыя ясно представятъ распредѣленіе сгибающихъ моментовъ для даннаго положенія точки M: сгибающій моментъ въ каждой точкѣ балки равенъ ординатѣ той или другой изъ прямыхъ (936), (937) начерченныхъ пунктиромъ. Наибольшій сгибающій моментъ, какъ видно изъ чертежа (фиг. 139) находится въ точкѣ M. Если M передвигается по балкѣ, то и величина этого наибольшаго сгибающаго момента измѣняется; такъ какъ она, согласно (936) и (937), равна $R\xi$ или $R'(l-\xi)$. Подставляя сюда вмѣсто R или R' ихъ величины изъ (934) и (935) получимъ

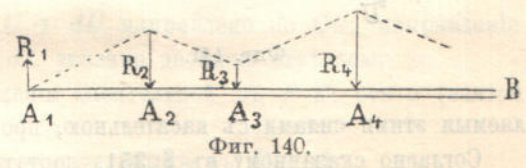
$$\text{сгибающій моментъ въ } M = W\xi\,(l-\xi)\,l.$$

Онъ достигаетъ максимума при $\xi = \frac{l}{2}$, то есть когда M находится въ срединѣ AB.

Итакъ наибольшее напряженіе вызывается, когда грузъ находится въ срединѣ балки и оно находится тогда именно въ поперечномъ сѣченіи, проходящемъ чрезъ средину балки.

Пунктирныя прямыя, уясняющія распредѣленіе сгибающихъ моментовъ, называются *діаграммою сгибающихъ моментовъ*.

§ 353. Невѣсомая не измѣняющая своего вида балка подъ вліяніемъ нѣсколькихъ поперечныхъ силъ. Положимъ, что на балку дѣйствуютъ перпендикулярныя къ ней силы R_1, R_2, R_3, R_4 (фиг. 140) приложенныя въ точкахъ A_1, A_2, A_3, A_4. Пусть: $A_1A_2 = a_2$; $A_1A_3 = a_3$; $A_1A_4 = a_4$ ... Сгибающій моментъ въ какой-нибудь точкѣ P балки, лежащей, напримѣръ, между A_3 и A_4 получится изъ разсмотрѣнія силъ, приложенныхъ съ одной какой-нибудь стороны отъ P. Если положить $A_1P = x$, то сгибающій моментъ въ P будетъ:



Фиг. 140.

$$y = R_1x - R_2(x - a_2) + R_3(x - a_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (938)$$

Діаграмма, представляющая сгибающіе моменты для точекъ P, лежащихъ между A_3 и A_4, выражаемая уравненіемъ (938) есть прямая.

Діаграмма сгибающихъ моментовъ для точекъ, лежащихъ за A_4 вы-

разится уравненіемъ:

$$y = R_1 x - R_2 (x - a_2) + R_3 (x - a_3) - R_4 (x - a_4) \quad . (939)$$

Это опять прямая. Такимъ образомъ полная діаграмма сгибающихъ моментовъ выразится рядомъ наклонныхъ прямыхъ. Она можетъ быть построена весьма просто слѣдующимъ образомъ: вычисляемъ сгибающіе моменты только для тѣхъ точекъ, въ которыхъ приложены силы и откладываемъ эти моменты какъ ординаты. Соединяя затѣмъ концы такихъ ординатъ прямыми, получимъ полную діаграмму.

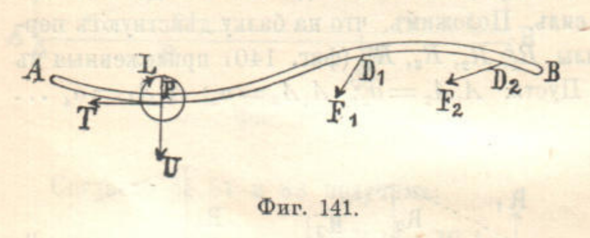
§ 354. Тяжелая не измѣняющая своего вида балка подъ вліяніемъ нѣсколькихъ поперечныхъ силъ. Если приходится принимать во вниманіе и вѣсъ балки, то діаграмма будетъ имѣть другой видъ. Сгибающій моментъ будетъ, въ этомъ случаѣ, содержать не только силы R_1, R_2... но и вѣсъ части $A_1 P$ балки, приложенный въ срединѣ этой части. Онъ будетъ равенъ

$$y = \Sigma R (x - a) - \frac{1}{2} w x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (940)$$

гдѣ w есть вѣсъ единицы длины балки.

Уравненіе (940) представляетъ собою параболу. Такова діаграмма для точекъ P лежащихъ въ промежуткѣ между двумя послѣдовательными силами R. Полная діаграмма состоитъ изъ нѣсколькихъ параболъ, изъ коихъ каждая пересѣкаетъ слѣдующую въ концѣ ординаты, возставленной изъ точки приложенія одной изъ силъ R. Оси всѣхъ параболъ перпендикулярны къ балкѣ.

§ 355. Кривая балка подъ вліяніемъ нѣсколькихъ силъ, мало измѣняющихъ ея форму. Представимъ себѣ тонкую кривую балку (фиг. 141).



Фиг. 141.

Пусть:
T—натяженіе въ точкѣ P,
U—сдвигъ въ точкѣ P,
L—сгибающій моментъ въ точкѣ P,
F_1, F_2... силы приложенныя въ D_1, D_2...
δ_1, δ_2... углы, составляемыя этими силами съ касательною, проведенною въ P.

Согласно сказанному въ § 351, достаточно разсмотрѣть равновѣсіе въ части PB балки.

Равновѣсіе по касательной дастъ:

$$T - \Sigma F \cos \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (941)$$

Равновѣсіе по нормали дастъ:

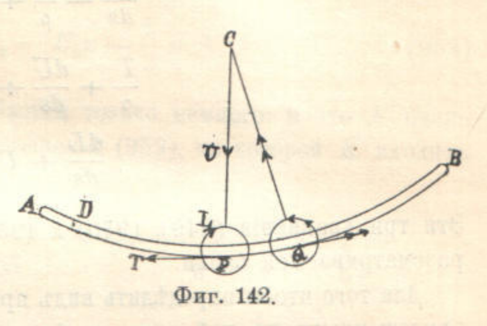
$$U + \Sigma F \sin \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (942)$$

Пусть p_1, p_2... суть перпендикуляры, опущенные изъ P на силы $F_1 F_2$... Равновѣсіе паръ дастъ:

$$L + \Sigma Fp = 0 \quad \text{. . . . . (943)}$$

Изъ (941), (942) и (943) можно опредѣлить T, U и L, если дана форма балки и силы F_1, F_2...

§ 356. Кривая балка подъ вліяніемъ силъ, значительно измѣняющихъ ея форму. Если приложенныя къ кривой балкѣ силы значительно измѣняютъ ея форму, такъ что окончательный видъ, принимаемый ею подъ вліяніемъ этихъ силъ, неизвѣстенъ, то способъ предыдущаго параграфа уже не приложимъ и приходится выводить уже не конечныя а дифференціальныя уравненія равновѣсія, разсматривая дѣйствіе силъ уже не на конечную часть балки, а на безконечно малый ея элементъ (балка предполагается весьма тонкою). Пусть (фиг. 142):



Фиг. 142.

PQ—разсматриваемый элементъ балки,

s—дуга DP считаемая отъ произвольно выбраннаго начала D.

Пусть:

T—натяженіе, считаемое положительнымъ въ направленіи PA,

U—сдвигъ, считаемый положительнымъ по *внутренней* нормали PC,

L—моментъ пары въ P, направленной по стрѣлкѣ.

Напряженія, которыми часть AP дѣйствуетъ на PB будутъ

$$T,\ U \text{ и } L \quad \text{. . . . . (944)}$$

Напряженія, которыми часть QB дѣйствуетъ на QA будутъ:

$$T + dT;\quad U + dU;\quad L + dL \quad \text{. . . . . . (945)}$$

$T + dT$ направлено по QB; $U + dU$ направлено по QC; направленіе пары имѣющей моментъ $L + dL$ указано двойною стрѣлкою.

Пусть φ есть уголъ наклоненія касательной въ P къ оси x (взятой произвольно). Тогда:

$d\varphi$ = углу составляемому касательными въ P и Q,

= углу PCQ составляемому нормалями въ P и Q.

Пусть:

$F\,ds$—проложеніе на касательную въ P силы, дѣйствующей на PQ,

$G\,ds$—проложеніе на нормаль въ P силы, дѣйствующей на PQ.

Равновѣсіе по касательной дастъ:

$$T + (T + dT)\cos(d\varphi) - (U + dU)\sin(d\varphi) + F\,ds = 0 \text{ . (946)}$$

Равновѣсіе по нормали дастъ:

$$-U+(U+dU)\cos(d\varphi)+(T+dT)\sin(d\varphi)+G\,ds=0\ \ldots\ (947)$$

Равновѣсіе паръ дастъ:

$$-L+(L+dL)+(U+dU)\,ds+\frac{1}{2}G\,ds\left(\frac{ds}{2}\right)=0\ .\ (948)$$

Въ предѣлѣ эти три уравненія примутъ видъ:

$$\frac{dT}{ds}-\frac{U}{\rho}+F=0\ \ldots\ldots\ldots\ (949)$$

$$\frac{T}{\rho}+\frac{dU}{ds}+G=0\ \ldots\ldots\ldots\ (950)$$

$$\frac{dL}{ds}+U=0\ \ldots\ldots\ldots\ (951)$$

Эти три уравненія (949), (950) и (951) будутъ уравненіями равновѣсія разсматриваемой балки.

Для того чтобы опредѣлить видъ принимаемый балкою подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ ней силъ, требуется еще одно уравненіе. Провѣрено опытомъ и доказывается въ теоріи упругости что если

ρ_1 — радіусъ кривизны тонкой балки до сгибанія,

ρ — радіусъ кривизны согнутой балки, то

$$L=K\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ (952)$$

гдѣ L имѣетъ то же значеніе какъ и въ уравненіяхъ (949), (950) и (951); K нѣкоторое постоянное, зависящее отъ матеріала, изъ котораго сдѣлана балка.

§ 357. **Прямая балка, немного измѣняющая свой видъ, лежащая на нѣсколькихъ опорахъ подъ дѣйствіемъ собственной тяжести.** Тяжелая тонкая балка покоится на нѣсколькихъ опорахъ, расположенныхъ по прямой горизонтальной линіи и немного сгибается подъ дѣйствіемъ собственной тяжести. Изслѣдовать ея внутреннія напряженія и прогибъ.

Пусть (фиг. 143)

A, B, B... точки опоры,

$AB=a$; $BC=b$...,

x — измѣряется отъ B въ направленіи BC,

y — ордината балки въ точкѣ Q, лежащей между B и C,

ρ — считается положительнымъ въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ согнутая балка обращена вогнутостью вверхъ.

Согласно съ (952) моментъ сгибающей пары равенъ $\frac{k}{\rho}$. Если ρ положительно, то нижнія волокна балки вытянуты, а верхнія сжаты. Слѣдовательно L въ Q дѣйствуетъ на BQ въ сторону противуположную дви-

женію стрѣлки часовъ и на QC въ сторону движенія стрѣлки часовъ. Пусть сдвигъ въ Q, дѣйствующій на QC, равенъ U и его положительное направленіе идетъ по вертикали внизъ. Пусть:

L_2 и U_2—суть пара и сдвигъ въ точкѣ D безконечно близкой къ B, и лежащей вправо отъ B,

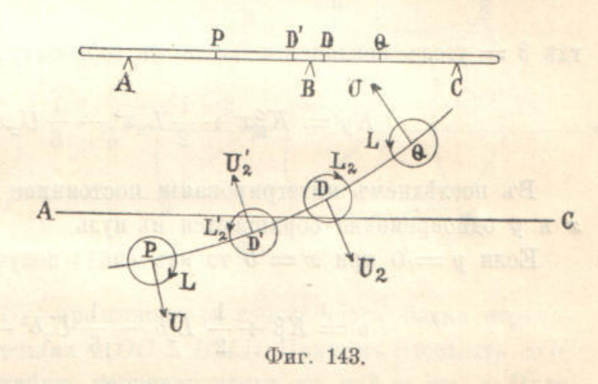
w — вѣсъ балки на единицѣ длины,

wx — вѣсъ части DQ.

Равновѣсіе моментовъ, дѣйствующихъ на DQ дастъ:

$$\frac{K}{\rho} = L_2 - U_2 x - \frac{1}{2} wx^2 \quad \ldots \ldots (953)$$

Мы полагаемъ, что балка сгибается только немного и что K очень велико; поэтому въ лѣвой части уравненія (953), въ которой K входитъ множителемъ, мы не пренебрегаемъ изгибомъ балки, которымъ пренебрегаемъ въ правой, считая сдвигъ дѣйствующимъ попрежнему вертикально. Поэтому же въ формулѣ



Фиг. 143.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{d^2x}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

пренебрегаемъ малою величиною $\frac{dy}{dx}$ такъ какъ балка остается во всѣхъ частяхъ почти горизонтальною, и полагаемъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (954)$$

Изъ (953) и (954) имѣемъ:

$$K \frac{d^2y}{dx^2} = L_2 - U_2 x - \frac{1}{2} wx^2 \quad \ldots \ldots (955)$$

если x заключается между o и b.

Пусть:

L_2', U_2'—пара и сдвигъ въ точкѣ D' безконечно близкой къ B но лежащей влѣво отъ B,

R_2 — давленіе опоры на балку въ B.

Равновѣсіе безконечно малой части DD' балки даетъ:

$$L_2' = L_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (956)$$

$$U_2' - U_2 = R_2 \quad \ldots \ldots \ldots (957)$$

Для точки P, лежащей между A и B, такъ что BP отрицательно, имѣемъ подобно (955):

$$K\frac{d^2y}{dx^2} = L_2' - U_2'x - \frac{1}{2}wx^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (958)$$

здѣсь x заключается между $x = 0$ и $x = -a$.

Наконецъ, обозначая чрезъ U сдвигъ въ какой либо точкѣ балки, согласно съ (951), имѣемъ:

$$U = -\frac{dL}{dx} = K\frac{d^3y}{dx^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (959)$$

Интегрируя дважды (955), получимъ:

$$K\frac{dy}{dx} = K\beta + L_2x - \frac{1}{2}U_2x^2 - \frac{1}{6}wx^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (960)$$

гдѣ β = уголъ наклоненія балки къ горизонту въ B.

$$Ky = K\beta x + \frac{1}{2}L_2x^2 - \frac{1}{6}U_2x^2 - \frac{1}{24}wx^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (961)$$

Въ послѣднемъ интегрированіи постоянное интеграціи=0, такъ какъ x и y одновременно обращаются въ нуль.

Если $y = 0$ при $x = b$ то изъ (961) получимъ:

$$o = K\beta + \frac{1}{2}L_2b - \frac{1}{6}U_2b^2 - \frac{1}{24}wb^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (962)$$

Точно такъ же изъ (958) получимъ:

$$o = K\beta - \frac{1}{2}L'_2a - \frac{1}{6}U'_2a^2 + \frac{1}{24}wa^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (963)$$

§ 358. Уравненіе трехъ моментовъ. Если L_1, L_2, L_2 суть моменты въ опорахъ A, B, C, то равновѣсіе паръ при C и A дастъ:

$$L_3 = L_2 - U_2b - \frac{1}{2}wb^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (964)$$

$$L_1 = L_2 + U_2'a - \frac{1}{2}wa^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (965)$$

Исключая U_2 и U_2' изъ (962), (963), (964) и (965), получимъ:

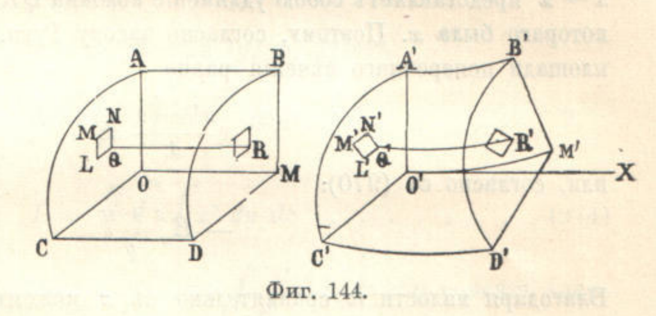
$$L_1a + 2L_2(a+b) + L_3b + \frac{1}{4}w(a^3+b^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (966)$$

Это уравненіе, выражающее связь между тремя моментами L_1, L_2 и L_3 чрезвычайно важно въ инженерномъ дѣлѣ. Оно называется *уравненіемъ трехъ моментовъ*. При помощи его можно, по двумъ даннымъ моментамъ

въ двухъ точкахъ опоры, найти моментъ во всякой точкѣ балки. Затѣмъ изъ (964) и (965) можно найти сдвиги и изъ (957) давленія на опоры. Это уравненіе (966) трехъ моментовъ особенно важно въ теоріи мостовъ.

§ 359. Теорія балки, согнутой въ дугу окружности большаго радіуса. Однородная прямая тонкая балка согнута безъ растяженія въ дугу окружности, описанной большимъ радіусомъ. Опредѣлить сгибающій моментъ въ каждомъ ея сѣченіи.

Въ основаніи рѣшенія этой задачи положимъ гипотезу, справедливость которой докажется впослѣдствіи тѣмъ, что уравненія равновѣсія окажутся удовлетворенными. Эта гипотеза заключается въ слѣдующемъ: 1) всѣ волокна параллельныя длинѣ балки сгибаются въ дуги окружностей, центры которыхъ лежатъ на одной прямой, которую мы назовемъ *осью сгибанія*, перпендикулярной къ плоскостямъ этихъ дугъ: 2) всякое плоское поперечное сѣченіе остается плоскимъ и въ согнутой балкѣ; 3) всякое такое сѣченіе нормально къ упомянутымъ дугамъ.



Фиг. 144.

Пусть (фиг. 144) $ABCD$ представляетъ собою часть балки ограниченную нормальными сѣченіями AOC и BMD. Примемъ плоскость AOC за плоскость (yz). какой-нибудь перпендикуляръ къ ней за ось x. Положимъ, что плоскость (x, z) есть плоскость сгибанія, такъ что ось y параллельна оси сгибанія. OA есть ось z; OC ось y. Пусть QR есть одно изъ продольныхъ волоконъ. Пусть:

$$(o,\ y,\ z) \text{ координаты точки } Q,$$
$$(x,\ y,\ z) \text{ координаты точки } R.$$

На фиг. 144 изображена та же часть балки только въ согнутомъ состояніи. Волокна близкія къ $A'B'$ сжаты, нижнія волокна растянуты. Существуетъ, слѣдовательно, такая поверхность, волокна которой не сжаты и не растянуты; она называется *нейтральнымъ слоемъ*; ея продольныя волокна называются *нейтральными*. Согласно нашей гипотезѣ, нейтральный слой есть поверхность круглаго цилиндра, пересѣкающая плосяость (y, z) по прямой параллельной оси сгибанія, служащей осью этого цилиндра. Положимъ, что начало координатъ взято на нейтральномъ слоѣ: тогда ось x будетъ касательною къ одному изъ нейтральныхъ волоконъ и

$$QR = OM = O'M'.$$

Пусть ρ есть радіусъ кривизны нейтральнаго волокна $O'M'$.

Волокно QR, принимая форму $Q'R'$, остается, приблизительно, парал-

лельнымъ оси x, но разстояніе его точекъ отъ плоскостей (x, z) и (x, y) прекращается изъ y и z въ

$$y' = y + v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (967)$$

$$z' = z + w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (968)$$

Длина x волокна QR вытягивается въ длину

$$x' = x + u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (969)$$

Точка R' лежитъ въ плоскости $B'M'D'$ нормальной къ нейтральному волокну $O'M'$; поэтому:

$$x' = (\rho - z - w) \sin\left(\frac{x}{\rho}\right) = x - \frac{(z + w) \cdot x}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad (970)$$

$x - x'$ представляетъ собою удлиненіе волокна QR, первоначальная длина котораго была x. Поэтому, согласно закону Гука, натяженіе на единицу площади поперечнаго сѣченія равно

$$\frac{x' - x}{x} E$$

или, согласно съ (970):

$$- E \frac{z + w}{\rho}$$

Благодаря малости w сравнительно съ z можемъ принять натяженіе на единицу площади поперечнаго сѣченія равнымъ:

$$- E \frac{z}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (971)$$

Полное натяженіе на площадь поперечнаго сѣченія всей балки равно, слѣдовательно:

$$\int\int \frac{Ez}{\rho} dy\, dz.$$

Но, по условіямъ задачи, это натяженіе равно нулю. Поэтому:

$$\int\int \frac{Ez}{\rho}\, dy \,.\, dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (972)$$

или

$$\frac{E}{\rho} \int\int z\, dy\, dz = 0$$

или

$$\int\int z\, dy\, dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (973)$$

Это уравненіе, согласно (261): показываетъ, что центры тяжести поперечныхъ сѣченій лежатъ въ плоскости (x, y), то есть въ центральномъ слоѣ. Итакъ: *центральная прямая цилиндрической балки, сгибаемой безъ натяженія, есть нейтральная линія.*

Мы видѣли въ (971), что натяженіе на единицу площади поперечнаго сѣченія выражалось формулою:

$$\frac{Ez}{\rho}.$$

Слѣдовательно натяженіе на элементѣ $dy\,dz$ равно:

$$\frac{Ez}{\rho}\,dy\,dz.$$

Статическій моментъ этого натяженія относительно оси y будетъ слѣдовательно:

$$E\,\frac{z}{\rho}\,.\,z\,.\,dy\,dz.$$

Поэтому сгибающій моментъ въ сѣченіи $(y,\ z)$, будетъ:

$$L = \int\int E\,\frac{z^2}{\rho}\,dy\,dz$$

или

$$L = \frac{E}{\rho}\int\int z^2\,dy\,dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (974)$$

Сравнимъ (974) съ (358) видимъ, что $\int\int z^2\,dy\,dz$ есть моментъ инерціи поперечнаго сѣченія балки относительно прямой, по которой оно пересѣкается нейтральнымъ слоемъ (сравн. § 168).

Сравнивъ (974) съ (952) и замѣтивъ, что въ натуральномъ состояніи балка была прямая такъ, что $\frac{1}{\rho'} = 0$, замѣчаемъ, что постоянное K формулы (952) опредѣляется формулою:

$$K = EJ, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (975)$$

гдѣ J упомянутый моментъ инерціи.

Моментъ L уравновѣшивается моментомъ относительно $D'M'$, потому что $D'M'$ параллельна оси y.

Статическій моментъ относительно оси z, происходящій отъ натяженій, въ поперечномъ сѣченіи $(y,\ z)$, равенъ:

$$\frac{E}{\rho}\int\int yz\,dy\,dz \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (976)$$

Этотъ моментъ не можетъ быть уравновѣшенъ моментомъ относительно $M'B'$, такъ какъ $M'B'$ не параллельна оси z. Слѣдовательно, для равновѣсія необходимо, чтобы:

$$\int\int yz\,dy\,dz = 0.$$

Значитъ плоскость $(x,\ z)$ сгибанія должна быть перпендикулярна къ одной изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи поперечнаго сѣченія.

§ 360. Лукъ согнутый тетивою. Представимъ себѣ однородную цилиндрическую нерастяжимую палку согнутую подъ вліяніемъ стягивающей немного ея концы нити (тетивы). Изслѣдуемъ ея сгибаніе тетивою.

Примемъ (фиг. 145) тетиву за ось x. Обозначимъ черезъ T натяженіе тетивы. Сгибающій моментъ L, согласно съ (952), будетъ:

Фиг. 145.

$$L = \frac{K}{\rho} \quad . \; (977)$$

потому что $\frac{1}{\rho'} = 0$, такъ какъ палка, до сгибанія, была прямою. Согласно съ (954), уравненіе (977) принимаетъ видъ:

$$L = \pm K \frac{d^2y}{dx^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (978)$$

Но изъ условій задачи и чертежа видно, что:

$$L = Ty \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (979)$$

Изъ (978) и (979) имѣемъ:

$$\pm K \frac{d^2y}{dx^2} = Ty \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (980)$$

Положимъ (фиг. 145), что A и B суть концы палки, C точка, въ которой касательная параллельна тетивѣ. Примемъ OC за ось y.

Замѣтимъ, что $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = 0$; затѣмъ $\frac{dy}{dx}$ уменьшается съ увеличеніемъ x, слѣдовательно $\frac{d^2y}{dx^2}$ отрицательна. Поэтому въ (980) надо удержать нижній знакъ. Получимъ:

$$-K \frac{d^2y}{dx^2} = Ty \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (981)$$

T есть величина постоянная (натяженіе тетивы). Положимъ, для удобства $T = Kn^2$:

$$T = Kn^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (982)$$

Тогда (981) приметъ видъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (983)$$

Таково дифференціальное уравненіе кривой, форму которой принимаетъ палка лука. Интегралъ этого уравненія будетъ:

$$y = h \cos (nx), \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (984)$$

Вотъ конечное уравненіе кривой, по которой согнутъ лукъ. При $x = 0$ это уравненіе (984/ даетъ $y = h$. Слѣдовательно:

$$h = OC$$

h есть, слѣдовательно, разстояніе тетивы отъ наиболѣе удаленной отъ нея точки лука.

Уравненіе (984) показываетъ, что лукъ можетъ имѣть одну изъ формъ:

ACB; $ACBB'$; $A'ACBB'$ . . . (фиг. 145).

Предполагая, что длина $2l$ лука почти равна длинѣ тетивы $2a$, такъ что $a = l$. Тогда $y = 0$ при $x = a$; но это можетъ быть, согласно (984), если

$$na = \frac{1}{2}\pi(2m+1),$$

гдѣ m цѣлое число.

Поэтому, согласно съ (982):

$$T = \frac{\pi^2 K}{4a^2}(2m+1)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (985)$$

или, на основаніи (975):

$$T = \frac{\pi^2 EJ}{4a^2}(2m+1)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (986)$$

§ 361. Тонкій вертикальный столбъ. Формулы предыдущаго параграфа приложимы къ изслѣдованію сгибанія столба подъ дѣйствіемъ груза.

Такъ какъ $y = 0$ при $x = a$, то или

$$na = \frac{1}{2}\pi(2m+1)$$

или

$$h = 0.$$

Формула (986) показываетъ, что сгибаніе столба произойдетъ только тогда, если нагрузка T будетъ равна:

$$\frac{\pi^2 EJ}{4a^2}(2m+1)^2, \ldots\ldots\ldots (987)$$

гдѣ a длина столба.

Если нагрузка будетъ меньше (мы пренебрегаемъ вѣсомъ столба), то $h = 0$ и, согласно съ (984), $y = 0$, то есть сгибаніе не произойдетъ. Если нагрузка будетъ больше чѣмъ $\frac{\pi^2 EJ}{4a^2}(2m+1)^2$, то отклоненіе столба будетъ столь велико, что нельзя уже будетъ пренебречь членомъ $\frac{dy}{dx}$ въ выраженіи;

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

и придется произвести изслѣдованіе болѣе точное. Но, и не производя его, мы видимъ, что столбъ начинаетъ сгибаться только, когда нагрузка достигнетъ величины $\frac{\pi^2 EJ}{4a^2}(2m+1)^2$,

Припоминая формулу (373) видимъ, что сгибающая нагрузка для круглаго цилиндрическаго столба пропорціональна 4-й степени его діаметра и обратно пропорціональна квадрату его высоты a (законъ Эйлера).

§ 362. Работа сгибающаго момента L при сгибаніи элемента ds. Найдемъ работу, производимую моментомъ L, когда при сгибаніи балки, кривизна $\frac{1}{\rho_1}$ обращается въ $\frac{1}{\rho_2}$. Пусть:

$PQ = ds$ — элементъ нейтральной линіи,

ψ — уголъ, составляемый касательными, проведенными въ концахъ элемента PQ въ какой-нибудь моментъ,

ρ — радіусъ кривизны элемента,

ψ_1 — уголъ, составляемый касательными, проведенными въ концахъ элемента PQ до сгибанія.

По формулѣ (952), имѣемъ:

$$L = K\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) = K\frac{\psi - \psi_1}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots (988)$$

Работа момента L при измѣненіи угла ψ на $d\psi$ равна—$L\,d\psi$. Здѣсь знакъ (—) взятъ потому, что L принимаемъ положительнымъ когда онъ дѣйствуетъ въ сторону уменьшенія угла ψ. Слѣдовательно полная работа момента L при измѣненіи угла ψ отъ ψ_1 до ψ_2 равна:

$$W\,ds = -\frac{1}{2}K\frac{(\psi_2 - \psi_1)^2}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots (989)$$

или

$$W\,ds = -\frac{1}{2}K\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)^2 ds = -\frac{L^2\,ds}{2K} \quad \ldots \ldots (990)$$

ГЛАВА III.

Крученіе.

§ 363. Чѣмъ измѣряется крученіе. Извѣстно, что къ кривой въ пространствѣ можно провести, въ каждой изъ ея точекъ, безчисленное множество нормалей; всѣ онѣ лежатъ въ нормальной плоскости; та изъ нихъ, которая находится и въ нормальной плоскости и въ плоскости соприкосновенія называется главною нормалью. Положимъ, что PQ есть одна изъ нормалей, проведенныхъ въ точкѣ P къ *центральной линіи* упругаго стержня. Самый стержень мы представляемъ себѣ тѣломъ, геометрическое образованіе котораго получается отъ движенія небольшой площади, ограниченной какимъ-нибудь замкнутымъ контуромъ; при чемъ центръ тяжести этой площади описываетъ кривую, называемую *центральною линіею*, и плоскость движущейся площади остается нормальною къ центральной линіи. Положимъ, что Q лежитъ на боковой поверхности стержня. Прямая PQ называется *трансверсомъ*. Итакъ трансверсъ PQ есть прямолинейный отрѣзокъ нормальный къ центральной линіи и ограниченный пересѣче-

ніемъ его P съ центральною линіею и пересѣченіемъ его Q съ боковою поверхностью стержня.

Положимъ, что $P\ P'$, P'' ... суть послѣдовательныя безконечно близкія одна отъ другой точки центральной линіи.

За трансверсъ точки P' мы принимаемъ пересѣченіе $P'Q'$ нормальной плоскости въ P' съ плоскостью QPP'. За трансверсъ точки P'' мы принимаемъ пересѣченіе $P''Q''$ нормальной плоскости точки P'' съ плоскостью $Q'P'P''$, и такъ далѣе.

Если стержень въ натуральномъ состояніи представляетъ собою прямой цилиндръ, то можно такъ выбрать трансверсы послѣдовательныхъ точекъ центральной линіи, чтобы они образовали при натуральномъ состояніи стержня плоскость, проходящую чрезъ его центральную прямую, такъ что $QQ'Q''$ ... расположены по прямой. Положимъ, что эти трансверсы неизмѣняемо соединены съ матеріальными точками стержня, чрезъ которыя они проходятъ.

Закрѣпимъ поперечное сѣченіе, проходящее чрезъ P и положимъ что элементы стержня, лежащіе между нормальными сѣченіями, проходящими чрезъ P, P', P'', ... скручены немного соотвѣтственно около касательныхъ PP' $P'P''$ . . . такъ, что Q, Q', Q'' ... располагаются уже на спиральной линіи.

Крученіе элемента стержня, находящагося между нормальными сѣченіями проходящими чрезъ P и P' измѣряется безконечно малымъ угломъ составляемыхъ трансверсомъ $P'Q'$ съ плоскостью QPP', равнымъ углу между плоскостями QPP' и $PP'Q'$.

Если ds есть элементъ дуги центральной линіи, $d\theta$ уголъ между плоскостями QPP' и $PP'Q'$, то крученіе отнесенное къ 1 длины будетъ:

$$\text{Крученіе} = \frac{d\theta}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (991)$$

§ 364. Проложенія кривизны. Положимъ, что стержень такъ согнутъ, что центральная линія представляетъ собою кривую двоякой кривизны: Если $d\varepsilon$ есть уголъ, составляемый нормальными плоскостями къ центральной линіи, проведенныя въ точкахъ P и P', то полная кривизна центральной линіи въ точкѣ P измѣряется отношеніемъ:

$$\frac{d\varepsilon}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (992)$$

и говорятъ, что центральная линія имѣетъ эту кривизну въ плоскости соприкосновенія.

Положимъ, что нормальныя плоскости, проведенныя въ точкахъ P и P' пересѣкаются по прямой CO (фиг. 146) и что CO пересѣкаетъ плоскость соприкосновенія, проходящую чрезъ P и P' въ точкѣ C. Тогда PC и $P'C$ суть двѣ сосѣднія главныя нормали; точка же C есть центръ кривизны, такъ что:

$$CP = \rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (993)$$

Проведемъ чрезъ касательную PP' плоскость $PP'M$ составляющую какой-нибудь уголъ φ съ плоскостью соприкосновенія $PP'C$. Тогда PM и PM' суть сосѣднія нормали (не главныя) и M есть центръ круга кривизны, лежащаго въ плоскости $PP'M$. Называя R радіусъ этого круга имѣемъ:

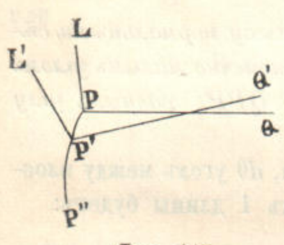
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (994)$$

Фиг. 146.

Такимъ образомъ мы можемъ говорить о кривизнѣ $\frac{1}{R}$ центральной линіи въ любой плоскости $PP'M$ и опредѣлять ее чрезъ кривизну $\frac{1}{\rho}$ въ плоскости соприкосновенія помощью формулы (994). Мы будемъ называть $\frac{1}{\rho}$ *кривизною*, а $\frac{1}{R}$ *проложеніямъ кривизны на плоскость* $PP'M$.

§ 365. Подвижная система координатъ для изслѣдованія крученія. Проведемъ двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости $P'PQ$ и $P'PL$ чрезъ касательную PP' (фиг. 147). Пусть λ и q суть проложенія кривизны на эти плоскости. Тогда кривизна въ плоскости соприкосновенія равна:

$$\sqrt{q^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (995)$$



Фиг. 147.

Уголъ, составляемый плоскостью $P'PL$ съ плоскостью соприкосновенія таковъ, что тангенсъ его равенъ $\frac{\lambda}{q}$, потому что, согласно съ (994),

$$q = \sqrt{q^2 + \lambda_2} \cos \varphi$$

откуда

$$tg\, \varphi = \frac{\lambda}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (996)$$

Прямыя PQ, PL и PP' могутъ быть приняты за оси координатъ, и мы будемъ имѣть дѣло съ тремя величинами:

q — кривизна въ плоскости $P'PL$ перпендикулярной къ PQ,
λ — кривизна въ плоскости $P'PQ$ перпендикулярной къ PL,
τ — крученіе около PP'.

При переходѣ изъ точки P въ точку P' оси PQ, PL, PP' могутъ быть перемѣщены въ положеніе $P'Q'$, $P'L'$ $P'P''$, помощью вращеній qps, λds, τds около осей PQ, PL, PP' и поступательнаго перемѣщенія начала координатъ изъ P въ P'.

§ 366. Соотношенія между напряженіями и деформаціями. Напряженія, которыми дѣйствуетъ часть стержня, лежащая по одну сторону P, на другую его часть приводятся къ силѣ и парѣ. Положимъ, что составляющія этой пары по осямъ координатъ PL, PQ и PP' суть K, L, T, тогда какъ q, λ, τ кривизны въ плоскостяхъ $P'PL$, $P'PQ$ и крученіе, если

первоначально стержень былъ прямымъ. Если стержень первоначально былъ кривымъ, то q, λ, τ суть измѣненія въ кривизнахъ и крученіи.

Не желая вдаваться въ теорію упругости, примемъ гипотезу состоящую въ томъ, что:

1) Измѣненія въ крученіи и кривизнѣ стержня вблизи отъ P зависятъ только отъ пары (K, L, T) и не зависятъ отъ равнодѣйствующей силы.

2) K, L, T суть линейныя функціи отд q, x, τ *).

Пусть Wds есть работа напряженій въ элементѣ $ds = PP'$. Если, при неподвижности поперечнаго сѣченія проходящаго чрезъ P, кривизна λ обратилась $\lambda + d\lambda$, при чемъ q и τ остались безъ измѣненія, то элементъ ds повернулся около оси пары L на уголъ $d\lambda\, ds$ и работа момента L равна $Ld\lambda ds$, тогда какъ работы моментовъ K и T равны нулю. При этомъ, слѣдовательно $dW \,.\, ds = Ld\lambda \,.\, ds$. Такія же выраженія получимъ для K и T если q и τ увеличились на dq и $d\tau$. Такъ что:

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{dW}{dq} \\ L &= \frac{dW}{d\lambda} \\ T &= \frac{dW}{d\tau} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (997)$$

Если, по нашей гипотезѣ, K, L, T суть линейныя функціи отъ q, λ, τ, то (997) показываютъ, что W есть квадратная функція отъ q, λ, τ. Поэтому, вводя новыя буквы для обозначенія коэффиціентовъ, получимъ:

$$W = \frac{1}{2}\,(Ak^2 + B\lambda^2 + C\tau^2 + 2a \,.\, \lambda\tau + 2b \,.\, \tau q + 2c\quad q\lambda) \,.\, (998)$$

Отсюда, согласно съ (997), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} K &= Aq + c\lambda + b\tau \\ L &= cq + B\lambda + a\tau \\ T &= bq + a\gamma + C\tau \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (999)$$

Перемѣною осей координатъ можно всегда достигнуть того, что однородная квадратичная функція, въ которой по (998) выражается W, не будетъ содержать произведеній перемѣнныхъ. Слѣдовательно можно выбрать координаты такъ, чтобы:

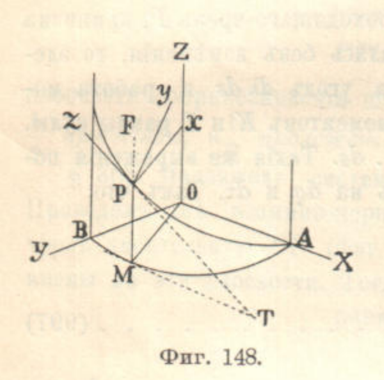
$$W = \frac{1}{2}\,(A_1 q_1{}^2 + B_1\lambda_1{}^2 + C_1\tau_1{}^2) \quad \ldots\ldots (1000)$$

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= A_1 q_1 \\ L_1 &= B_1\lambda_1 \\ T_1 &= C_1\tau_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1001)$$

*) Линейное функцію называется алгебраическая функція перваго порядка.

Такія оси называются *главными осями напряженій.* Постоянныя A_1, B_1, называются *главными коэффиціентами сгибанія,* C_1, называется *главнымъ коэффиціентомъ крученія.* A_1, B_1 и G_1 называются *главными коэффиціентами напряженій.*

§ 367. Винтообразное крученіе и сгибаніе стержня. Прямой, однородный, тонкій стержень согнутъ такъ, что его центральная линія обратилась въ винтовую линію. Найдемъ силу и пару, которую надо приложить къ свободному концу стержня для того, чтобы удержать его винтовую форму, если другой конецъ стержня неподвижно закрѣпленъ.



Фиг. 148.

Пусть (фиг. 148).

A — закрѣпленный конецъ центральной линіи,

S — тотъ ея конецъ, на которой дѣйствуютъ сила R и пара, имѣющая моментъ G,

APS — винтовая центральная линія,

AMB — круговое сѣченіе цилиндра, на которомъ расположена APS,

Oz — ось этого цилиндра.

Дѣйствіе части AP стержня на часть PS состоитъ изъ силы и пары.

Сила въ P можетъ быть разложена на двѣ слагающія, изъ коихъ одна направлена по образующей PF, а другая параллельна плоскости (X, Y). Послѣдняя должна бы уравновѣшиваться слагающею параллельною плоскости (X, Y) силы, приложенной въ S. Но такое уравновѣшиваніе невозможно, потому что, вслѣдствіе геометрической однородности винтовой линіи, сила и пара въ точкѣ P не мѣняютъ своей величины при измѣненіи положенія точки P на винтовой линіи, при чемъ ни ось этой пары, ни направленіе этой силы не измѣняютъ своего наклоненія къ главнымъ осямъ PQ, PL и PP' винтовой линіи и, между тѣмъ какъ, при перемѣщеніи точки P по винтовой линіи, слагающая въ P параллельная плоскости (X, Y) измѣняетъ свою величину, слагающая въ S остается постоянною. Поэтому слагающія въ точкахъ P и S параллельныя плоскости (X, Y) должны равняться нулю. Слѣдовательно *сила въ P направлена по образующей PF.* Назовемъ ее R. Она можетъ быть перенесена на ось цилиндра, если прибавить еще пару Ra, гдѣ a радіусъ цилиндра. Она не зависитъ, слѣдовательно, отъ положенія P на винтовой линіи.

Теперь перейдемъ къ парѣ въ P. Пусть TPz есть касательная къ винтовой линіи въ P; Px перпендикуляръ, опущенный изъ P на ось цилиндра, такъ что плоскость TPx, по извѣстному свойству винтовой линіи, есть ея плоскость соприкосновенія. Пусть Py бинормаль. Тогда:

$q = \frac{1}{\rho} =$ деформація около Py въ направленіи отъ z къ x.

$\tau =$ крученіе около Pz въ направленіи отъ x къ y.

Если A и B суть главные коэффиціенты сгибанія и крученія, то:

$$K = Aq = \text{моментъ сгибанія ококо } Py \text{ . . . . } (1002)$$
$$T = C\tau = \text{крученіе около } Pz \text{ . . . . } (1003)$$

суть моменты паръ напряженій въ P.

Эти моменты могутъ быть разложены по образующей PF и параллельно плоскости (X, Y).

Слагающія параллельныя плоскости (X, Y) вмѣстѣ съ введенною парою Ra должны уравновѣшивать собою соотвѣтствующія слагающія въ свободномъ концѣ S стержня. Но ось равнодѣйствующей пары въ P составляетъ постоянный уголъ съ OM при перемѣщеніи точки P по винтовой линіи. Поэтому ея направленіе измѣняется съ перемѣщеніемъ точки P, тогда какъ ось пары въ S неподвижна. Слѣдовательно слагающіе моменты направленные параллельно плоскости (X, Y) должны быть равны нулю. Итакъ: *моментъ пары въ точкѣ* P *долженъ быть направленъ параллельно оси цилиндра*. Такъ будетъ при всѣхъ положеніяхъ точки P на винтовой линіи. Слѣдовательно: *однородный стержень, согнутый по винтовой линіи и подвергнутый равномѣрному крученію, можетъ быть удержанъ въ этомъ видѣ силою* R *и парою* G, *приложенными къ его свободному концу, если сила* R *направлена параллельно оси цилиндра, несущаго эту винтовую линію, а пара дѣйствуетъ въ плоскости перпендикулярной къ* R *(моментъ ея* G *направленъ по* R).

Если α есть уголъ, составляемый касательною къ винтовой линіи съ основаніемъ винта, то (1002) и (1003) даютъ:

$$Ra = -Aq \sin\alpha + C\tau \cos\alpha \text{ . . . . . . } (1004)$$

$$G = Aq \,.\, \cos\alpha + C\tau \,.\, \sin\alpha \text{ . . . . . } (1005)$$

Эти уравненія даютъ искомые: силу R и моментъ G пары по заданнымъ: углу α касательной винтовой линіи съ основаніемъ цилиндра, кривизнѣ q винтовой линіи и крученію τ матеріала стержня.

§ 368. Спиральныя пружины. Первоначальный видъ тонкаго однороднаго стержня или проволоки въ натуральномъ состояніи есть данная винтовая линія. Проволока эта деформирована въ другую данную винтовую линію. Найдемъ силу R и моментъ G пары, которыя должны быть приложены къ свободному концу проволоки для того, чтобы удержать ее въ этомъ деформированномъ видѣ, если другой ея конецъ закрѣпленъ неподвижно.

Пусть: a_1 — радіусъ цилиндра, на которомъ лежитъ пружина въ натуральномъ видѣ,

a — радіусъ цилиндра, на которомъ лежитъ пружина въ деформированномъ видѣ,

α_1 — уголъ наклоненія касательной къ основанію цилиндра до деформаціи,

α — уголъ наклоненія касательной къ основанію цилиндра послѣ деформаціи,

P, P . . . послѣдовательныя точки винтовой линіи до деформаціи,
$P\xi$, $P'\xi$ . . . главныя нормали этихъ точекъ,
$P\eta$, $P'\eta$ . . . бинормали этихъ точекъ,
$P\zeta$, $P'\zeta$ . . . касательныя этихъ точокъ,
Px — главная нормаль деформированной спирали.
Py — бинормаль деформированной спирали,
Pz — касательная деформированной спирали.

Совпадающія оси спиралей (цилиндровъ, на которыхъ онѣ лежатъ) примемъ за ось Z, и какую-нибудь перпендикулярную къ ней плоскости за плоскость (X, Y).

Двѣ послѣдовательныя плоскости соприкосновенія въ спирали до деформаціи $\xi PP'$ и $PP'\xi'$ образуютъ уголъ:

$$\frac{\sin\alpha_1 \,.\, \cos\alpha_1 \,.\, ds}{a_1}.$$

Напряженія въ P состоитъ изъ:

силы, которая можетъ быть разложена по образующей и параллельно (X, Y).
пары $C(\tau - \tau_1)$ около оси Pz,
пары Aq около Py,
пары $-Aq_1$ около $P\eta$,

при чемъ:

$$\tau_1 = \frac{\sin\alpha_1 \,.\, \cos\alpha_1}{a_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1006)$$

$$q_1 = \frac{\cos^2\alpha_1}{a_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1007)$$

$$q = \frac{\cos^2\alpha}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1008)$$

гдѣ τds уголъ между плоскостями $\xi PP'$ и $PP'\xi'$.

Точно такъ же какъ и въ предыдущемъ параграфѣ можно доказать, что слагающая силы параллельная (X, Y) равна нулю. Остается сила, направленная по образующей, которая можетъ быть перенесена на ось, если добавить пару Ra.

Точно такъ же какъ и въ предыдущемъ параграфѣ можно доказать, что проложеніе равнодѣйствующей пары параллельное (X, Y) равно нулю. Приравняемъ, поэтому, нулю моментъ по Px. Назовемъ чрезъ φ уголъ ξPx. Ось Px, перпендукулярная къ Py, Pz и къ моменту Ra, образуетъ съ $P\eta$ уголъ $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Поэтому:

$$k_1 \sin\varphi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1009)$$

Но k_1 не равно нулю, поэтому $\varphi = 0$. Слѣдовательно $P\xi$ и Px совпадаютъ и моменты Ak и $-Ak_1$ лежатъ на одной прямой Py, то есть на бинормали деформированной винтовой линіи. Поэтому уголъ τds равенъ углу, составляемому послѣдовательными плоскостями соприкосновенія

деформированной винтовой линіи, такъ что:

$$\tau = \frac{\sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1010)$$

Приравнивая нулю моментъ, направленный по перпендикуляру къ плоскости, проходящей чрезъ Px и образующую, получимъ:

$$Ra = -A \sin\alpha \,.\, (k - k_1) + C \cos\alpha \,.\, (\tau - \tau_1) \quad . \; . \quad (1011)$$

Приравнивая моментъ въ P, направленный по образующей къ соотвѣтственному моменту G въ концѣ проволоки, получимъ:

$$G = A \cos\alpha \,.\, (k - k_1) + C \sin\alpha\, (\tau - \tau_1) \quad . \; . \; . \quad (1012)$$

При этомъ:

$$k_1 = \frac{\cos^2\alpha_1}{a_1}; \quad k = \frac{\cos\alpha}{a}; \quad \tau_1 = \frac{\sin\alpha_1 \,.\, \cos\alpha_1}{a_1}; \quad \tau = \frac{\sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{a} \,.\, (1013)$$

Если пружина имѣетъ много оборотовъ, такъ что α и α_1 малы, то, пренебрегая малыми величинами 2-го порядка, получимъ:

$$Ra = -A\alpha \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) + C \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha_1}{a_1}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (1014)$$

$$G = A \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1015)$$

Если на конецъ S пружины дѣйствуетъ только сила, такъ что $G = 0$, то изъ (1015) имѣемъ $a = a_1$, то есть, значитъ, діаметръ цилиндра пружины не измѣняется. Въ этомъ случаѣ (1014) даетъ:

$$Ra = C\,\frac{\alpha - \alpha_1}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1016)$$

Формула (1016) заключающая только коэффиціентъ C выражаетъ слѣдующее:

Теорема Бине: *Спиральчая пружина, имѣющая видъ винтовой линіи съ большимъ числомъ оборотовъ, сопротивляется сжатію по оси ея цилиндра только крученіемъ, а не сгибаніемъ.*

Если l длина такой пружины, h удлиненіе высоты ея цилиндра, производимое силою R направленною параллельно этой оси, то:

$$l \sin\alpha - l \sin\alpha_1 = h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1017)$$

Полагая синусы равными угламъ (по ихъ малости) и пользуясь формулою (1016) и (1017) получимъ:

$$R = C\,\frac{h}{la^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1018)$$

Эта формула (1018) опредѣляетъ силу R, потребную для произведенія удлиненія h высоты цилиндра, или ея укороченія, при надавливаніи, напримѣръ, гладкою доскою на свободный конецъ пружины.

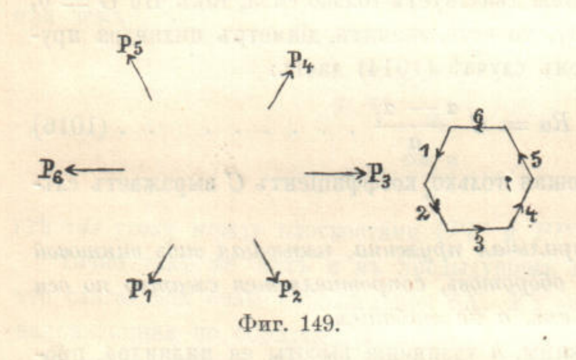
ОТДѢЛЪ IX.

Основанія графической статики.

§ 369. Многоугольникъ силъ. Даны величины и направленія силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло въ одной плоскости. Найти графическимъ путемъ ихъ равнодѣйствующую.

Обращаемъ вниманіе читателя на то, что въ этой задачѣ точки приложенія заданныхъ силъ не даны.

Пусть (фиг. 149) направленія и величины заданныхъ силъ изображены векторами P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Начиная отъ какой-нибудь произвольной точки той же плоскости откладываемъ послѣдовательно прямыя равныя и параллельныя этимъ силамъ (фиг. 149), отмѣчая эти прямыя соотвѣтственными цифрами, такъ что 1 параллельна P_1, 2 параллельна P_2, и такъ далѣе. Получимъ многоугольникъ, состоящій изъ сторонъ 1, 2, 3, 4, 5.



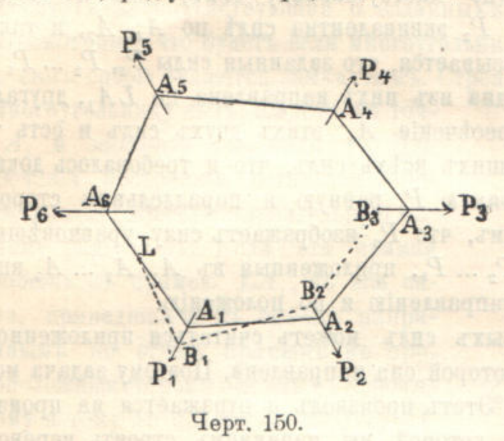
Фиг. 149.

Согласно съ § 65 замыкающая сторона 6 этого многоугольника представитъ собою силу, уравновѣшивающую заданныя силы. Сила равная этой силѣ 6 и противоположная и будетъ искомою равнодѣйствующею. Если бы заданныя силы находились въ равновѣсіи, то многоугольникъ 1, 2, 3, 4, 5 замкнулся бы безъ стороны 6, потому что равнодѣйствующая была бы равна нулю.

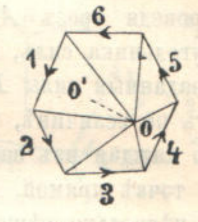
§ 370. Веревочный многоугольникъ. Построеніемъ предыдущаго параграфа мы нашли величину и направленіе равнодѣйствующей, но не нашли точку ея приложенія, и точки приложенія заданныхъ силъ тоже остались неопредѣленными. Чтобы опредѣлить всѣ точки приложенія силъ достраиваютъ фигуру, на которой были заданы силы слѣдующимъ образомъ

помощью полученнаго многоугольника силъ. Пусть (фиг. 150) изображаетъ заданныя силы, а (фиг. 151) многоугольникъ силъ.

Возьмемъ какую-нибудь произвольную точку O на фигурѣ многоугольника силъ. Назовемъ эту точку O *полюсомъ* и соединимъ ее со всѣми вершинами многоугольника силъ прямыми. Вершину, находящуюся въ пересѣченіи сторонъ 1 и 2 будемъ обозначать такъ 12; вершину находящуюся въ пересѣченіи сторонъ 2 и 3, будемъ обозначать такъ 23, и такъ далѣе. Радіусъ-векторъ, соединяющій O съ вершиною 1 2, будемъ обозначать такъ $\overline{12}$; радіусъ-векторъ, соединяющій O съ вершиною 2 3, будемъ обозначать такъ $\overline{23}$, и такъ далѣе. Эти радіусы-векторы называются *полярными радіусами.*



Черт. 150.



Черт. 151.

Радіусы-векторы, соединяющіе O съ вершинами, разбиваютъ многоугольникъ силъ на нѣсколько треугольниковъ. Каждый изъ этихъ треугольниковъ можетъ быть разсматриваемъ какъ треугольникъ силъ. Такъ напримѣръ полярный радіусъ $\overline{23}$, *направленный къ O* уравновѣшиваетъ силу 2 и силу, изображенную полярнымъ радіусомъ 12 направленнымъ изъ O; полярный радіусъ $\overline{34}$ направленный къ O уравновѣшиваетъ силу 3 и силу, изображенную полярнымъ радіусомъ 23 *направленнымъ изъ о.* Полярный радіусъ $\overline{23}$ считался въ одномъ изъ этихъ сосѣднихъ треугольниковъ направленнымъ въ одну сторону, а въ другомъ — въ другую. Тоже самое будетъ со всѣми полярными радіусами: каждый изъ нихъ считается въ одномъ треугольникѣ направленнымъ къ O, а въ другомъ направленнымъ изъ O; каждый изъ нихъ представляетъ собою двѣ равныя и противоположныя силы. Поэтому мы и не ставимъ на нихъ цифръ на фигурѣ.

Теперь будемъ достраивать чертежъ (фиг. 150). Изъ какой-нибудь произвольной точки L проводимъ LA_1 параллельно полярному радіусу 61 (фиг. 151) до пересѣченія A_1 съ направленіемъ силы $\overline{P_1}$. Изъ A_1 проводимъ прямую A_1, A_2 параллельную полярному радіусы $\overline{12}$ до пересѣченія A_2 съ направленіемъ силы P_2. Изъ A_2 проводимъ A_2, A_3 параллельную полярному радіусу $\overline{23}$ до пересѣченія A_3 съ направленіемъ силы P_3, и такъ далѣе. Наконецъ изъ A_5 проводимъ прямую A_5, A_6 парал-

льную полярному радіусу $\overline{56}$ до пересѣченія A_6 съ прямою A_1L. Тогда A_6 *и есть искомая точка приложенія равнодѣйствующей*, какъ это сейчасъ будетъ доказано. Замѣтимъ только, предварительно, что многоугольникъ A_1, A_2, A_3 ... A_6 называется *веревочнымъ многоугольникомъ*.

Для доказательства того, что A_6 есть точка приложенія равнодѣйствующей силъ P_1, P_2 ... P_5, замѣтимъ слѣдующее. Сила P_1, приложенная въ A_1, разлагается однимъ изъ треугольниковъ многоугольника силъ на силу направленную по LA_1 и на силу по A_2, A_1. Сила по A_3, A_1 съ силою P_2 эквивалентна (по многоугольнику силъ) силѣ по A_3, A_2. Сила по A_3, A_2 съ силою P_3 эквивалентна силѣ по A_4, A_3, и такъ далѣе. Такимъ образомъ оказывается, что заданныя силы P_1, P_2 ... P_5 эквивалентны двумъ силамъ: одна изъ нихъ направлена по LA_1, другая—по A_6, A_5. Слѣдовательно пересѣченіе A_6 этихъ двухъ силъ и есть точка приложенія равнодѣйствующихъ всѣхъ силъ; что и требовалось доказать.

Проведя чрезъ A_6 прямую P_6 равную и параллельную сторонѣ 6 многоугольника силъ, видимъ, что P_6 изображаетъ силу, уравновѣшивающую заданныя силы P_1, P_2 ... P_5, приложенныя въ A_1, A_2 ... A_5 вполнѣ, то есть по величинѣ, по направленію и по положенію.

Но каждая изъ заданныхъ силъ можетъ считаться приложенною въ любой точкѣ прямой, по которой она направлена. Поэтому задача можетъ имѣть нѣсколько рѣшеній. Этотъ произволъ и отражается на произвольномъ выборѣ точки L, отъ которой мы начинаемъ строить веревочный многоугольникъ. Однако, при данномъ выборѣ точки L уже опредѣляются точки приложенія всѣхъ силъ и заданныхъ и искомой равнодѣйствующей. Всѣ точки приложенія оказываются въ вершинахъ веревочнаго многоугольника.

Еслибы мы выбрали другую точку L, то получили бы другой веревочный многоугольникъ, стороны котораго были бы параллельны сторонамъ прежняго веревочнаго многоугольника, потому что онѣ были бы проведены параллельно тѣмъ же полярнымъ радіусамъ многоугольника силъ. Получилась бы и другая точка приложенія равнодѣйствующей; но она всетаки лежала-бы, конечно, на той же прямой P_6.

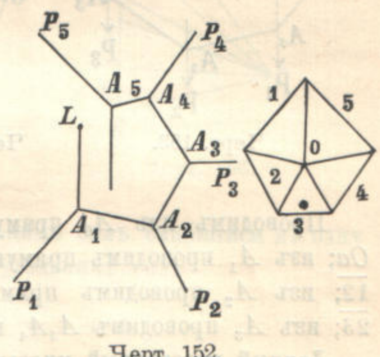
Еслибы мы выбрали другой полюсъ O, то получили бы опять другой веревочный многоугольникъ, стороны котораго уже не были бы параллельны сторонамъ прежняго веревочнаго многоугольника, потому что теперь были бы уже другіе полярные радіусы въ многоугольникѣ силъ. Но всетаки направленіе равнодѣйствующей осталось бы прежнимъ и точка ея приложенія была бы на прямой по которой она направлена. Отсюда геометрическая теорема: для всѣхъ полюсовъ O многоугольника силъ геометрическое мѣсто послѣдней вершины A_6 веревочнаго многоугольника есть прямая (по которой направлена равнодѣйствующая P_6).

Многоугольникъ A_1, A_2 ... A_5, A_6 называется *веревочнымъ* потому, что подъ вліяніемъ силъ P_1, P_2 ... P_6, приложенныхъ къ его вершинамъ, находился

бы въ равновѣсіи такой многоугольникъ, составленный изъ веревокъ: A_1A_2; A_2A_3 ... A_5A_6; A_6A_1, такъ какъ именно равныя и противоположныя силы, представляемыя полярными радіусами многоугольника силъ, были бы натяженіями соотвѣтственныхъ веревокъ, и эти натяженія вмѣстѣ съ силами P_1, P_2 ... P_6 уравновѣшивались бы, какъ это показываетъ многоугольникъ силъ.

§ 371. **Графическія условія равновѣсія.** Изъ предыдущаго параграфа мы видимъ, что, если многоугольникъ силъ 1, 2, 3, 4, 5 не замкнутъ, то существуетъ равнодѣйствующая 6 заданныхъ силъ *).

Посмотримъ, что будетъ если многоугольникъ 1, 2, 3, 4, 5 заданныхъ силъ самъ собою окажется замкнутымъ. Строя веревочный многоугольникъ по многоугольнику силъ дойдемъ до точки A_5 и *заданной уже* силы P_5. Для заключенія построенія останется провести изъ A_5 прямую параллельную полярному радіусу $\overline{51}$. Если эта прямая *совпадетъ* съ прямою LA_1, то вся система, приведшаяся къ силамъ направленнымъ по этимъ прямымъ въ противоположныя стороны и равнымъ порознь одному и тому же полярному радіусу $\overline{51}$, будетъ въ равновѣсіи. Такое равновѣсіе 6-ти силъ начерчено на (фиг. 150).



Черт. 152.

Если же прямая, проведенная изъ A_5 параллельно полярному радіусу $\overline{51}$ не совпадетъ съ прямою LA_3, какъ это изображено на (фиг. 152), то равныя и параллельныя, но противоположныя силы, направленныя по этимъ прямымъ, дадутъ *пару силъ*, къ которой, въ этомъ случаѣ, и приводится, слѣдовательно, вся система заданныхъ силъ. Она, значитъ, не можетъ быть приведена къ равнодѣйствующей силѣ, а приводится къ *парѣ*. Въ этомъ случаѣ веревочный многоугольникъ не замкнутъ. Моментъ этой пары равенъ произведенію силы равной полярному радіусу $\overline{51}$ на разстояніе между прямою приведенною изъ A_5 параллельно $\overline{51}$ и прямою LA_1.

§ 372. **Многоугольникъ параллельныхъ силъ.** Если заданныя силы параллельны между собою, то многоугольникъ силъ обращается въ прямую линію. Напримѣръ, если заданы силы P_1, P_2, P_3 (фиг. 153) и мы начнемъ строить многоугольникъ силъ (фиг. 154) начиная отъ точки a, то получимъ прямую ab, на которой будутъ лежать стороны:

$$1 = P_1,\ \ 2 = P_2,\ \ 3 = P_3.$$

*) Само собой разумѣется, что наши построенія и разсужденія приложенныя къ 5-ти заданнымъ силамъ распространяются на какое угодно число заданныхъ силъ.

Рѣшимъ слѣдующую задачу. Даны длины нитей A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, грузы $P_1P_2P_3$ подвѣшенные въ точкахъ A_1, A_2, A_3. Найти одно изъ расположеній, принимаемое нитями въ равновѣсіи и напряженія нитей.

Изъ сказаннаго въ §§ 370 и 371 слѣдуетъ такое построеніе:

Чертимъ многоугольникъ силъ. Для этого отъ какой-нибудь точки a (фиг. 154) проводимъ прямую параллельную силамъ P_1, P_2, P_3 и на ней откладываемъ послѣдовательно стороны:

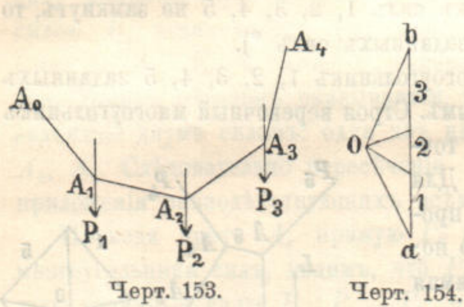
$$1 = P_1;\quad 2 = P_2;\quad 3 = P_3,$$

такъ что

$$1 + 2 + 3 = ab.$$

Изберемъ какой нибудь полюсъ O.

Теперь строимъ веревочный многоугольникъ (фиг. 153).



Черт. 153. Черт. 154.

Проводимъ изъ A_0 прямую A_0A_1 параллельную полярному радіусу Oa; изъ A_1 проводимъ прямую A_1A_2 параллельную полярному радіусу $\overline{12}$; изъ A_2 проводимъ прямую A_2A_3 параллельную полярному радіусу $\overline{23}$; изъ A_3 проводимъ A_3A_4 параллельно Ob.

Данный веревочный многоугольникъ будетъ имѣть видъ построеннаго многоугольника $A_0A_1A_2A_3A_4$.

Полярные радіусы будутъ равны натяженіямъ параллельныхъ имъ нитей.

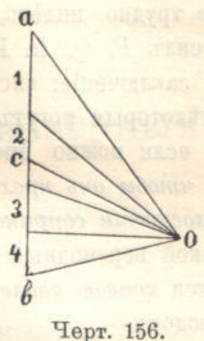
§ 373. Опредѣленіе давленій, производимыхъ прямою горизонтальною балкою на точки опоры. Положимъ (фиг. 155), что прямая легкая балка (вѣсомъ которой можно пренебречь) лежитъ горизонтально на точкахъ опоры A_0 и A_5. На балку дѣйствуютъ въ точкахъ A_1, A_2, A_3, A_4 тяжелые грузы W_1, W_2, W_3, W_4. Найти давленія въ точкахъ опоры.

Изъ предыдущихъ параграфовъ настоящей главы вытекаетъ слѣдующее построеніе. Отъ какой-нибудь точки a діаграммы силъ (фиг. 156) проводимъ прямую параллельную вертикалямъ W_1, W_2, W_3 и на ней откладываемъ послѣдовательно $1 = W_1$; $2 = W_2$; $3 = W_3$ и $4 = W_4$, такъ что ab представляетъ собою полную нагрузку балки. Избираемъ произвольно полюсъ O и соединяемъ его съ точками a, $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, b. Строимъ, начиная отъ A_0, веревочный многоугольникъ. Для этого проводимъ прямую A_0B_1 параллельную полярному радіусу ao до пересѣченія B_1 съ вертикалью A_1W_1; проводимъ изъ B_1 прямую B_1B_2 параллельную полярному радіусу $\overline{12}$ до пересѣченія B_2 съ вертикалью A_2W_3, и такъ далѣе. Наконецъ проводимъ изъ B_4 прямую B_4B_5 параллельную полярному ра-

діусу bO. Получаемъ веревочный многоугольникъ $A_0B_1B_2B_3B_4B_5$. Замкнемъ его прямою B_5A_0 и проведемъ полярный радіусъ Oc параллельно прямой B_5A_0. Тогда давленіе $(+R)$ балки на опору A_0 будетъ равно ac; давленіе $(+R')$ балки на опору A_5 будетъ равно cb; потому что балка находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силъ $(-R)$ W_1, W_2, W_3, W_4, $(-R_1)$, для которыхъ $A_0B_1B_2B_3B_4B_5A_0$ есть замкнутый веревочный многоугольникъ, а (фиг. 156) діаграмма силъ изъ коихъ 1, 2, 3, 4 положительны, тогда какъ



Черт. 155.



Черт. 156.

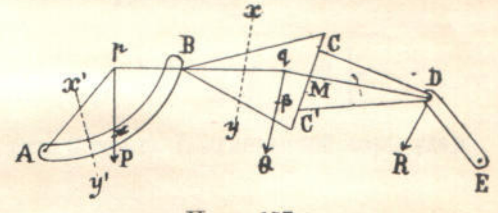
bc и ca отрицательны, такъ что многоугольникъ силъ слившійся въ одну прямую aba тоже замкнутый. Но въ многоугольникѣ силъ

$$ac + cb = ab = 1 + 2 + 3 + 4$$

согласно тому, что

$$R + R_1 = W_1 + W_2 + W_3 + W_4.$$

§ 374. **Кривая давленій**. Представимъ себѣ тѣла симметричныя относительно плоскости чертежа (фиг. 157) и расположенныя слѣдующимъ образомъ. Тѣло AB можетъ вращаться около неподвижной оси A; клинъ BC упирается однимъ ребромъ въ тѣло AB; тѣло CD опирается совершенно гладкою плоскостью (безъ тренія въ плоскость CC') въ грань клина; тѣло DE можетъ вращаться около неподвижной оси E и скрѣплено шарниромъ D съ тѣломъ CD. Найти графическое условіе равновѣсія системы этихъ тѣлъ, подъ дѣйствіемъ силъ P, Q, R, приложенныхъ въ α, β и D.



Черт. 157.

Давленіе въ A дѣйствуетъ по нѣкоторой прямой Ap и пересѣкаетъ силу P въ какой-нибудь точкѣ p. Равнодѣйствующая этого давленія и силы P должна быть уравновѣшена давленіемъ въ B и потому должна проходить чрезъ B. Эта сила, дѣйствующая въ B пересѣкаетъ силу Q

въ какой-нибудь точкѣ q. Равнодѣйствующая силы, дѣйствующей въ B и силы Q должна быть уравновѣшена давленіемъ плоскостей клина и тѣла CD; поэтому она должна быть направлена по перпендикуляру M къ плоскости CC'. *Основаніе M этого перпендикуляра должно, слѣдовательно, лежать внутри площади по которой соприкасается клинъ BC съ тѣломъ CD.* Это давленіе должно проходить чрезъ D и равнодѣйствующая этого давленія и силы R должна быть направлена по DE.

Не трудно видѣть, что линія $ApqDE$ есть веревочный многоугольникъ силъ P, Q, R. Изъ разсмотрѣнія этого частнаго случая вытекаетъ общее заключеніе: система тѣлъ прислоненныхъ другъ къ другу, изъ коихъ нѣкоторыя могутъ быть соединены шарнирами, находится въ равновѣсіи, если можно провести веревочный *многоугольникъ заданныхъ силъ такъ, чтобы онъ проходилъ чрезъ всѣ шарниры и пересѣкалъ нормально всѣ плоскости соприкосновенія въ предѣлахъ площадей соприкосновенія.*

Такой веревочный многоугольникъ (въ нашемъ примѣрѣ $ApqDE$) называется *кривою давленій.* Кривая давленій играетъ важную роль въ теоріи сводовъ.

ОТДѢЛЪ X.

Теорія удара и другихъ мгновенныхъ силъ.

ГЛАВА I.

Ударъ въ плоскомъ движеніи.

§ 375. Общій видъ уравненій, опредѣляющихъ дѣйствіе удара. Ударъ, направленный въ твердое тѣло, можетъ измѣнить его поступательныя скорости и его вращательныя скорости. Мы начнемъ изслѣдованіе съ такихъ движеній, въ которыхъ траекторіи всѣхъ точекъ до и послѣ удара находятся въ плоскостяхъ взаимно параллельныхъ; такое движеніе называется *плоскимъ*. Въ такого рода движеніяхъ вращенія происходятъ около осей перпендикулярныхъ къ плоскостямъ траекторій.

Примемъ за плоскость (x, y) плоскость параллельную плоскостямъ всѣхъ траекторій. Всякія вращательныя движенія, производимыя ударомъ, должны, согласно съ § 146, подчиняться уравненію:

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma \left[y \int X\, dt - x \int Y\, dt \right].$$

Правая часть этого уравненія есть моментъ L мгновенной пары удара. Такъ что:

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = L \quad . \; . \; . \; . \; . \quad . \; . \; (1019$$

Но согласно съ (136):

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m \frac{d\theta}{dt} r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1020)$$

Если разсматриваемъ дѣйствіе удара на твердое тѣло, то:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1021)$$

при чемъ ω есть угловая скорость около оси пары L, одинаковая для всего тѣла. Поэтому

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m \omega r^2 = \omega \Sigma m r^2 = \omega J, \quad . \ . \ (1022)$$

гдѣ J есть моментъ инерціи относительно оси вращенія ω.

Изъ (1019) и (1022) имѣемъ:

моментъ количества движенія вносимый ударомъ въ неподвижное тѣло равенъ

$$\omega J = L, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1023)$$

гдѣ ω внесенная ударомъ вращательная скорость.

Если же тѣло имѣло до удара вращательную скорость ω, а послѣ удара его вращательная скорость сдѣлалась равною ω', такъ что внесенная ударомъ вращательная скорость равна $\omega' - \omega$, то, вмѣсто (1023), получимъ:

$$J(\omega' - \omega) = L \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1024)$$

Если масса тѣла M, а его радіусъ инерціи относительно оси вращенія k, то $J = Mk^2$ и (1024) принимаетъ видъ:

$$Mk^2(\omega_1 - \omega) = L \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1025)$$

Пусть:

(u, v) — проложенія скорости центра тяжести ударяемаго тѣла *до удара*.
$(u' v')$ — » » » » » *послѣ удара*,
ω — угловая скорость вращенія около мгновенной оси, проходящей чрезъ центръ тяжести, *до удара*,
ω' — угловая скорость вращенія около мгновенной оси, проходящей чрезъ центръ тяжести, *послѣ удара*,
M — масса ударяемаго тѣла,
Mk^2 — моментъ инерціи ударяемаго тѣла,
X, Y — проложенія удара,
L — мгновенная пара удара.

Тогда, согласно съ § 146 и (1025), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} M(u' - u) &= X \\ M(v' - v) &= Y \\ Mk^2(\omega' - \omega) &= L \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1026)$$

Вообще уравненія § 146 могутъ быть выражены такъ:

(пролож. колич. движ. послѣ удара) — (пролож. колич. движ. до удара) = = (проложен. удара) . . . . (1027)

(момент. колич. движ. послѣ удара) — (момент. колич. движ. до удара) = = (момент. пары удара) . . . . (1028)

Уравненія (1026) суть частные случаи этихъ уравненій, именно въ примѣненіи ихъ къ одиночному удару производимому въ твердое тѣло.

§ 376. Ударъ гладкихъ шаровъ. Положимъ, что два шара, имѣющіе массы m и m' движутся на встрѣчу другъ къ другу, по прямой соединяющей ихъ центры, со скоростями u и v, и, ударившись одинъ о другой, расходятся со скоростями u' и v'. Согласно съ (1026), имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} u' - u &= -\frac{R}{m} \\ v' - v &= \frac{R}{m'} \end{aligned}\right\}$$

гдѣ R есть сила происшедшаго удара. Само собою разумѣется, что такой ударъ не вноситъ никакой мгновенной пары L.

Этихъ двухъ уравненій недостаточно для опредѣленія трехъ величинъ u', v' и R по заданнымъ u и v. Для полученія третьяго уравненія разсмотримъ подробнѣе, что происходитъ съ шарами въ теченіи удара, какъ бы ни былъ коротокъ промежутокъ времени его дѣйствія.

Процессъ удара раздѣляется на два періода: 1) *періодъ сжатія*, въ теченіи котораго шары сжимаются, причемъ разстояніе между ихъ центрами уменьшается; этотъ періодъ начинается соприкосновеніемъ шаровъ: 2) *періодъ возстановленія формы*, въ теченіи котораго шары опять пріобрѣтаютъ свой первоначальный видъ; этотъ періодъ кончается тѣмъ, что шары разстаются.

Отношеніе взаимодѣйствія въ теченіи 2-го періода къ взаимодѣйствію въ теченіи 1-го періода для различныхъ тѣлъ различно. Оно зависитъ отъ того, насколько скоро тѣло способно пріобрѣтать, послѣ небольшой деформаціи, свою первоначальную форму. Если это происходитъ сравнительно медленно, то шары успѣютъ уже разстаться, не успѣвъ принять первоначальный видъ: тогда взаимодѣйствіе во 2-мъ періодѣ меньше чѣмъ въ 1-мъ. Если же форма возстановляется еще ранѣе, чѣмъ шары разстаются, то взаимодѣйствіе въ обоихъ періодахъ одинаковы.

Если взаимодѣйствія въ второмъ періодѣ столь мало, что имъ можно пренебречь, то тѣла называются *неупругими*. Въ этомъ случаѣ $u' = v'$ и (1028) даютъ:

$$R = \frac{mm'}{m + m'}(u - v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1029)$$

$$u' = v' = \frac{mu + m'v}{m + m'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1030)$$

Если нельзя пренебречь взаимодѣйствіемъ во второмъ періодѣ, то поступимъ такъ. Обозначимъ чрезъ R_0 дѣйствіе удара въ теченіи 1-го періода, продолжая обозначать чрезъ R полное дѣйствіе удара. Производя опыты съ шарами, приготовленными изъ различныхъ матеріаловъ и наблюдая

скорости u' и v' послѣ удара, опредѣляемъ по формуламъ (1028) величину R, полагаемъ:

$$\frac{R}{R_0} = (1 + e), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1031)$$

гдѣ e никогда не болѣе единицы и разсуждаемъ такъ: R_0 можно вычислить по (1029), принимая шары за неупругіе (обращая вниманіе только на 1-й періодъ), а затѣмъ, согласно (1031), R найдется помножая R_0 на $(1 + e)$, то есть по формулѣ:

$$R = \frac{mm'}{m + m'}(u - v)(1 + e) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1032)$$

Эта формула при такихъ опытахъ служитъ для опредѣленія e для разныхъ матеріаловъ. Когда e найдены и для нихъ составлены таблицы, то (1032) можетъ служить для рѣшенія задачъ объ ударѣ шаровъ, обладающихъ упругостью. Шары, для которыхъ $e = 1$, называются совершенно упругими. Но такихъ не существуетъ. Наибольшее e, близкое къ 1, свойственно стеклу и слоновой кости. Наименьшее e, близкое къ 0, свойственно свинцу.

§ 377. Балка, подвѣшенная на оси проходящей чрезъ ея центръ тяжести, ударяется абсолютно упругимъ шаромъ. Однородная балка надѣтая на поперечную ось, проходящую чрезъ ея центръ тяжести, выводится изъ состоянія покоя ударомъ, направленнымъ въ одинъ изъ ея концовъ перпендикулярно ея длинѣ, произведеннымъ абсолютно упругимъ шаромъ, движущимся перпендикулярно къ балкѣ со скоростью v.

Пусть:

M — масса балки,
J — ея моментъ инерціи,
m — масса шара,
v' — скорость шара послѣ удара,
ω' — вращательная скорость балки послѣ удара,
$2a$ — длина балки.

Въ этой задачѣ мы не можемъ пользоваться непосредственно формулою (1032) удара упругихъ шаровъ, потому что здѣсь сила удара R можетъ быть зависитъ отъ того, въ какую точку балки попадаетъ шаръ. Воспользуемся сначала формулами (1026).

Ударъ R происходитъ въ конецъ балки, находящійся на разстояніи a отъ ея центра тяжести. Слѣдовательно моментъ L вносимой ударомъ пары равенъ:

$$L = Ra \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1033)$$

Вставляя эту величину въ послѣднее изъ уравненій (1026), получимъ:

$$Mk^2\omega' = Ra \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1034)$$

такъ какъ угловая скорость ω балки до удара равна нулю по условію задачи. Изъ (1034), имѣемъ:

$$\frac{Mk^2}{a}\omega' = R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1035)$$

Называя чрезъ u' линейную скорость послѣ удара конца балки, имѣемъ:

$$u' = \omega' a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1036)$$

Исключая ω' изъ (1035) и (1036), получимъ:

$$\frac{Mk^2}{a^2}u' = R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1037)$$

Сравнивая эту формулу съ первою изъ (1026) и замѣтивъ, что начальная скорость u конца балки равна нулю, видимъ, что формула (1037) показываетъ, что балка ударяется въ конецъ съ такою силою, съ какою ударяется свободная сфера, имѣющая массу $\frac{Mk^2}{a^2}$. Ударъ балки шаромъ приведенъ теперь къ удару даннаго шара массы m обладающаго скоростью v о шаръ обладающій массою $\frac{Mk^2}{a^2}$. Вставивъ эту массу, вмѣсто m' въ формулу (1032) и полагая въ ней $e = 1$, $u = 0$, получимъ:

$$-\frac{2Mk^2 \,.\, m \,.\, v}{a^2\left(m + \frac{Mk^2}{a^2}\right)} = R.$$

Для удара шара объ тѣло получимъ ту же величину съ знакомъ $+$. Зная, что $Mk^2 = J$, получимъ:

$$\frac{2Jmv}{(a^2m + J)} = + R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1038)$$

Сравнивая (1038) съ (1034), имѣемъ:

$$+ J\omega' = \frac{2Jmva}{(a^2m + J)}$$

или

$$+ \omega' = \frac{2mva}{(a^2m + J)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1039)$$

Но (1028) даетъ:

$$v' - v = \frac{R}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1040)$$

Сравнивая (1038) съ (1040), получимъ:

$$v' = v - \frac{2Jmv}{(a^2m + J)\,m} = \frac{(a^2m + J - 2J)}{a^2m + J}v$$

или

$$v' = \frac{(a^2m - J)}{(a^2m + J)}v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1041)$$

Если, напримѣръ, балка очень тонка въ вертикальномъ направленіи, то ея моментъ инерціи, согласно съ § 181-мъ, равенъ:

$$J = \frac{Ma^2}{3}.$$

Тогда (1038), (1039) и (1041) даютъ:

$$R = \frac{2mvM}{3m + M},$$

$$\omega' = \frac{6mv}{(3m + M)\,a},$$

$$v' = v\,\frac{3m - M}{3m + M}.$$

Если же балка представляетъ собою параллелепипедъ съ ребрами $2a$, $2b$, $2c$, то, согласно съ § 181:

$$J = M\,\frac{a^2 + c^2}{2}.$$

Тогда (1038), (1039) и (1041) даютъ:

$$R = \frac{2mv + (a^2 + c^2)\,M}{3a^2m\,(a^2 + c^2)\,M},$$

$$\omega' = \frac{6mva}{3a^2m + (a^2 + c^2)\,M},$$

$$v' = v\cdot\frac{3a^2m - (a^2 + c^2)\,M}{3a^2m + (a^2 + c^2)\,M}.$$

§ 378. Законы тренія во время удара одинаковы съ законами тренія скольженія. Опытъ Морена. Во время удара тѣла соприкасается между собою, и если ударъ направленъ не по общей нормали къ соприкасающимся поверхностямъ, то должно явиться треніе. Спрашивается, будетъ ли ударное треніе имѣть то же отношеніе къ нормальному удару какъ треніе скольженія къ давленію, то есть одинаковъ ли коэффиціентъ ударнаго и обыкновеннаго тренія.

Моренъ произвелъ нѣсколько опытовъ, которые показали, что коэффиціентъ ударнаго тренія равенъ обыкновенному коэффиціенту тренія. Эти опыты производились слѣдующимъ способомъ.

Къ ящику AB было придѣлано два столбика съ перекладиною, на которой помощью нитки подвѣшивался грузъ mg. Ящикъ наполнялся дробью до желаемаго вѣса Mg. Ящикъ ставился своимъ плоскимъ дномъ на горизонтальную плоскость и опредѣлялся предварительными опытами коэффиціентъ μ тренія ящика о плоскость. Отъ ящика шелъ горизонтально шнуръ перекинутый чрезъ блокъ, и на свободный конецъ этого шнура подвѣшивался грузъ:

$$(M + m)\,g\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1042)$$

При дѣйствіи такого груза ящикъ, немного подтолкнутый, двигался горизонтально и равномѣрно со скоростью v. Во время этого движенія перерѣзывали нитку, вслѣдствіе чего грузъ mg падалъ въ ящикъ и ударившись о дробь оставался неподвижнымъ относительно ящика. Этимъ ударомъ груза mg объ ящикъ вызывалось ударное треніе между ящикомъ и горизонтальною плоскостью, по которой онъ двигался. Оказалось, что скорость ящика V до удара о ящикъ груза mg оставалась такою же и послѣ этого удара. Покажемъ, что этимъ доказывалось равенство коэффиціентовъ тренія обыкновеннаго и ударнаго.

Ударъ груза о ящикъ передается, и происходитъ ударъ ящика о плоскость по которой онъ скользитъ. Пусть:

F — горизонтальная слагающая удара ящика о плоскость,
R — вертикальная слагающая удара ящика о плоскость.
v' — скорость ящика послѣ удара,
t — время, въ теченіи котораго падаетъ грузъ mg.

По законамъ паденія грузъ mg ударяется о ящикъ со скоростью gt.

Поэтому вертикальная слагающая R удара опредѣляется, согласно (1026), уравненіемъ

$$mgt = R$$

Отдѣлившись отъ перекладины, грузъ mg уже не принадлежитъ къ системѣ ящика вплоть до конца своего паденія. Поэтому масса системы двигаемой грузомъ $(M + m)\,g\mu$ уменьшается, и, вслѣдствіе этого скорость v системы увеличивается на величину пропорціональную t именно на ft гдѣ

$$f = \frac{\mu\, mg}{M + (M + m)\,\mu}$$

Такимъ образомъ въ моментъ начала удара ящикъ обладаетъ горизонтальною скоростью

$$v + ft$$

До удара (но послѣ перерѣза нити) масса движимая грузомъ $(M + m)\,g\mu$ состояла изъ массы M ящика и массы $(M + m)\,\mu$ самого движущаго груза. Вся эта масса

$$M + (M + m)\,\mu$$

двигалась со скоростью $v + ft$.

Послѣ удара грузъ mg опять сдѣлался частью системы; масса ея сдѣлалась, слѣдовательно равною

$$M + m + (M + m)\,\mu$$

и скорость сдѣлалась равною v'. Поэтому количество движенія въ горизонтальномъ направленіи всей системы вмѣстѣ съ грузомъ mg до удара равно

$$[M + (M + m)\,\mu]\,(v + ft) + mv.$$

Количество движенія въ горизонтальномъ направленіи всей системы вмѣстѣ съ грузомъ послѣ удара равно:

$$[M + m + (M + m)\mu]\, v'.$$

Слѣдовательно, согласно съ (1027):

$$[M + m + (M + m)\mu]\, v' - [M + (M + m)\mu]\,(v + ft) - mv = -F.$$

Если согласно результату опытовъ Морена сдѣлать здѣсь $v = v'$ и вставить вмѣсто f его величину получимъ:

$$F = \mu R$$

которое и показываетъ, что отношеніе $\frac{F}{R}$ ударнаго тренія къ нормальному удару равно тому же μ, которому равно отношеніе обыкновеннаго тренія скольженія къ давленію.

§ 379. Уравненія удара совершенно неупругихъ и шероховатыхъ тѣлъ. Пусть (фиг. 158)

G и G' — центры тяжести ударяющихся тѣлъ,

A — точка соприкосновенія ихъ поверхностей,

U — проложеніе скорости точки G на касательную, до удара,

V — проложеніе скорости точки G на нормаль до удара,

u и v — проложенія этихъ скоростей тотчасъ послѣ начала удара,

t — весьма малое время, протекшее отъ начала удара до измѣненія скоростей U, V въ u, v,

Ω — угловая скорость тѣла G до удара,

ω — угловая скорость тѣла G въ моментъ t,

M — масса тѣла G,

k — радіусъ инерціи относительно оси вращенія проходящей чрезъ G

GN — перпендикуляръ на касательную,

$$AN = x; \quad NG = y.$$

Тѣми же буквами, но со значками «примъ» обозначаемъ соотвѣтственныя величины и точки второго тѣла.

Въ случаѣ абсолютно неупругихъ тѣлъ относительная скорость скольженія и относительная скорость сжатія дѣлаются равными нулю въ концѣ удара. Если положить t равнымъ продолжительности всего удара, то величины u, v, ω, u', v', ω' относятся къ концу удара.

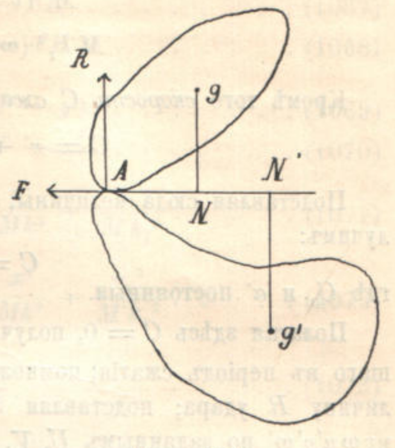
Найдемъ проложеніе скорости точки A на касательную, по окончаніи удара, разсматривая A какъ точку тѣла G.

Вслѣдствіе поступательнаго движенія тѣла G точка A обладаетъ по касательной въ концѣ удара скоростью u. Вслѣдствіе вращательнаго движенія точка A обладаетъ скоростью $+\omega\,.\,GA$, проложеніе которой на касательную равно $(-y\omega)$. Поэтому полное проложеніе на касательную

скорости точки A въ концѣ удара равно $u - y\omega$. Точно такъ же полное проложенiе скорости точки A тѣла G' на касательную въ концѣ удара равно $u' + y'\omega'$. Но относительная скорость по касательной (скольженiе) благодаря шероховатости тѣлъ равна нулю.

Слѣдовательно:

$$u - y\omega - u' - y'\omega' = 0 \quad . \quad (1043)$$



Черт. 158.

Вслѣдствiе абсолютной неупругости тѣлъ относительная скорость по нормали въ концѣ удара равна нулю; это можетъ быть, помощью такихъ же разсужденiй, выражено такъ:

$$v + x\omega - v' - x'\omega' = 0 \quad . \quad . \quad (1044)$$

Ударъ 1-го тѣла о второе равенъ удару 2-го тѣла о первое, и потому, согласно съ (1027), имѣемъ для проложенiя ударовъ на касательную:

$$M(u - U) + M'(u' - U') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1045)$$

и для проложенiй ударовъ на нормаль:

$$M(v - V) + M'(v' - V') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1046)$$

Наконецъ (1028) дастъ:

$$Mk^2(\omega - \Omega) + M(u - U)y - M(v - V)x = 0 \quad . \quad . \quad (1047)$$

$$M'k_1^2(\omega' - \Omega') + M'(u' - U') - M'(v' - V')x' = 0 \quad . \quad (1048)$$

Этихъ 6-ти уравненiй (1043), (1044), (1045), (1046), (1047) и (1048) достаточно для опредѣленiя движенiя послѣ удара по заданному движенiю до удара.

§ 380. Уравненiя удара совершенно неупругихъ и абсолютно гладкихъ тѣлъ. Если тѣла совершенно не упруги и абсолютно гладки, то уравненiе (1043) теряетъ смыслъ, а вмѣсто уравненiя (1045) имѣемъ:

$$u - U = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1049)$$

$$u' - U' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1050)$$

§ 381. Уравненiя удара совершенно гладкихъ упругихъ тѣлъ. Если тѣла упруги, то надо ввести еще реакцiю возстановленiя формы; если при этомъ между тѣлами нѣтъ тренiя (или мы имъ пренебрегаемъ), то проложенiе удара на касательную равно нулю *для каждаго тѣла*. Поэтому, въ этомъ случаѣ, получимъ:

$$M(u - U) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1051)$$

$$M(v - V) = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1052)$$

$$Mk^2 (\omega - \Omega) = Rx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1053)$$

$$M' (u' - U') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1054)$$

$$M' (v' - V') = - R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1055)$$

$$M'k_1^2 (\omega' - \Omega') = - Rx' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1056)$$

Кромѣ того *скорость* C *сжатія* получится изъ уравненія:

$$C = v' + x'\omega' - v - x\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1057)$$

Подставляя сюда величины, опредѣляемыя изъ (1051) .... (1056) получимъ:

$$C = C_0 - a'R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1058)$$

гдѣ C_0 и a' постоянныя.

Полагая здѣсь $C = 0$, получимъ величину $R_0 = \frac{C_0}{a'}$ удара, дѣйствующаго въ періодъ сжатія; помножая его на $(1 + e)$ получимъ полную величину R удара; подставляя это R въ (1051) . . (1056), получимъ: $u v \omega u' v' \omega'$ по заданнымъ $U, V, \Omega, U', V', \Omega'$.

§ 382. Уравненія удара тѣлъ упругихъ и несовершенно шероховатыхъ. Изслѣдуемъ наконецъ ударъ несовершенно упругимъ тѣлъ, принимая во вниманіе и ударное треніе F. Принимая моментъ начало удара за начало времени.

Пусть:

$R =$ количество движенія, сообщаемое тѣлу M по нормали въ теченіи малаго времени t,

$F =$ количество движенія, сообщаемое тѣлу M по касательной NA въ теченіи t.

Уравненія удара будутъ:

$$M (u - U) = - F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1059)$$

$$M (v - V) = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1060)$$

$$Mk^2 (\omega - \Omega) = Fy + Rx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1061)$$

$$M' (u' - U') = F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1062)$$

$$M' (v' - V') = - R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1063)$$

$$M'k_1^2 (\omega' - \Omega') = Fy' - Rx' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1064)$$

Относительная скорость скольженія S опредѣлится уравненіемъ:

$$S = u - y\omega - u' - y'\omega' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1065)$$

составленнымъ помощью разсужденій, примѣненныхъ къ составленію уравненія (1043).

Относительная скорость сжатія C опредѣлится уравненіемъ:

$$C = v' + x'\omega' - v - x\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1066)$$

Если подставимъ въ (1065) и (1066) величины, опредѣляемыя изъ уравненій (1059) . . . (1064), то получимъ:

$$S = S_0 - aF - bR \quad \ldots \quad (1067)$$

$$C = C_0 - bF - a'R \quad \ldots \quad (1068)$$

гдѣ:

$$S_0 = U - y\Omega - U' - y'\Omega' \quad \ldots \quad (1069)$$

$$C_0 = V' + x'\Omega' - V - x\Omega \quad \ldots \quad (1070)$$

$$a = \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \frac{y^2}{Mk^2} + \frac{y_1^{\ 2}}{M'k_1^{\ 2}} \quad \ldots \quad (1071)$$

$$a' = \frac{1}{M} + \frac{1}{M_1} + \frac{x^2}{Mk^2} + \frac{x_1^{\ 2}}{M'k_1^{\ 2}} \quad \ldots \quad (1072)$$

$$b = \frac{xy}{Mk^2} - \frac{x'y'}{M'k_1^{\ 2}} \quad \ldots \quad (1073)$$

x, y, x', y' имѣютъ тѣ же значенія (фиг. 158) какъ и въ § 379-омъ.

Величины S_0, C_0, a, a', b называются *постоянными даннаго удара*, причемъ:

S_0 — начальная скорость скольженія,

C_0 — начальная скорость сжатія,

a, a', b — не зависятъ отъ скоростей.

a и a' существенно положительны, b можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ. Замѣтимъ, что изъ (1071), (1072) и (1073) слѣдуетъ:

$$aa' > b^2 \quad \ldots \quad (1074)$$

§ 383. **Изображающая точка.** Пользованіе уравненіями предыдущаго параграфа значительно облегчается примѣненіемъ особаго графическаго метода, основаннаго на понятіи объ *изображающей точкѣ*. Къ изложенію этого метода мы и приступимъ. Припомнимъ, что чрезъ R мы обозначили въ предыдущемъ параграфѣ количество движенія, сообщаемое тѣлу M по нормали въ теченіи весьма малаго времени t, считаемаго отъ начала удара.

Это R равно нулю въ началѣ удара; затѣмъ оно возрастаетъ и достигаетъ максимальной величины въ концѣ удара. Въ теченіи времени dt это R возрастаетъ на dR. Удобнѣе, для изслѣдованія процесса, происходящаго въ теченіи удара, принять не t, а R за независимое перемѣнное и разсматривать послѣдовательныя dR равными между собою.

Съ возрастаніемъ R измѣняется и F, но dF могутъ быть и положительными; можетъ случиться, что какое-нибудь dF достаточно для уничтоженія скольженія. Согласно опытамъ Морена (§ 378)

$$dF = \mu\, dR \quad \ldots \quad (1075)$$

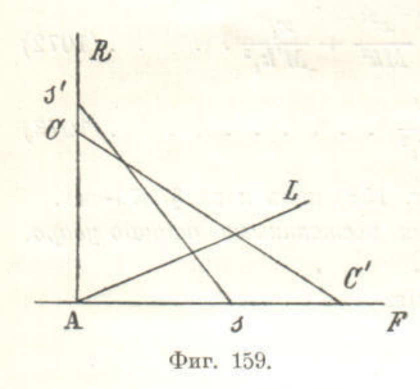
гдѣ μ коэффиціентъ тренія.

Примемъ касательную и нормаль за оси координатъ AF и AR (фиг. 159) съ началомъ въ A. На AR будемъ откладывать *абсциссы* R на AF будемъ откладывать *ординаты* F. *Точка* P, *опредѣляемая абсциссою* R *и ординатою* F, *называется изображающею точкою*.

Изслѣдованіе процесса, происходящаго во время удара, сводится къ изслѣдованію движенія изображаюшей точки P.

Въ началѣ удара $R=0$ и $F=0$, поэтому P находится въ началѣ координатъ.

Ординату F откладываемъ положительною въ сторону противоположную той, въ которую треніе дѣйствуетъ на тѣло M, такъ что проложеніе скорости точки P на ось AF направлено въ ту сторону, въ которую скользитъ тѣло M. Въ теченіи удара это положеніе можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ.



Фиг. 159.

Изъ уравненій (1067) слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто, выражаемое въ перемѣнныхъ F и R уравненіемъ

$$S=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (1076)$$

есть прямая. Назовемъ эту прямую SS' (Фиг. 159) *прямою нулеваго скольженія.*

Изъ уравненія (1068) слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто, выражаемое въ перемѣнныхъ F и R уравненіемъ:

$$C=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1077)$$

есть прямая. Назовемъ ее *прямою наибольшаго сжатія*, потому что скорость C относительнаго сжатія дѣлается равною нулю въ моментъ наибольшаго сжатія.

Для того, чтобы можно было изобразить эти двѣ прямыя на чертежѣ (фиг. 159), нужно найти координаты ихъ точекъ пересѣченія съ осями координатъ. Уравненія ихъ, написанныя вполнѣ, таковы:

$$S_0 - aF - bR = 0 \text{ прямая нулеваго скольженія } S=0 \; . \; (1078)$$

$$C_0 - bF - a'R = 0 \text{ прямая наибольшаго сжатія } C=0 \; . \; (1079)$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ (фиг. 159):

$$AC = \frac{C_0}{a}; \quad AS = \frac{S_0}{a}$$

$$AC' = \frac{C_0}{b}; \quad AS' = \frac{S_0}{b}$$

По этимъ даннымъ и чертимъ прямыя CC' и SS' (фиг. 159).

На основаніи неравенства (1074) заключаемъ, что прямая SS' составляетъ съ осью AF большій уголъ, чѣмъ прямая CC'. Это обстоя-

тельство и положительность постоянныхъ a и a' показываетъ, что прямыя SS' и CC' не могутъ пересѣкаться въ углу отрицательныхъ F и R.

Прослѣдимъ теперь движеніе изображающей точки P.

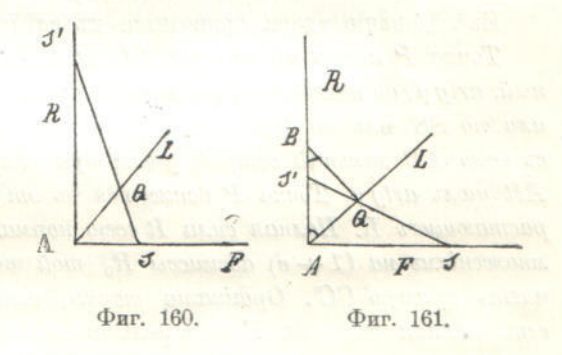
При началѣ удара тѣла M и M' скользятъ одно по другому; при этомъ:

$$F = \mu R \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1080)$$

и точка P двигается по прямой AL (фиг. 159), опредѣляемой уравненіемъ (1080) пока не достигнетъ пересѣченія AL съ SS'. Во все это время треніе достигало своей предѣльной величины (какъ при тѣлѣ, скользящемъ по наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ большій угла тренія). Абсцисса R_0 точки пересѣченія прямыхъ AL и SS' опредѣляется изъ (1078) и (1080) формулою:

$$R_0 = \frac{S_0}{a\mu + b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1081)$$

при чемъ R_0 есть количество движенія по нормали, вносимое ударомъ за время отъ начала удара до того момента, когда скольженіе можетъ обратиться въ катаніе. Послѣ этого момента, въ который P достигаетъ прямой $S'S$, возбуждается только треніе достаточное для удержанія тѣлъ M и M' отъ скольженія (какъ при тѣлѣ, лежащемъ на наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ не большій угла тренія).



Фиг. 160. Фиг. 161.

Случай 1-ый (фиг. 160). Если уголъ $SS'A$ *менѣе* чѣмъ $arctg\,\mu$ *), то треніе dF необходимое для удержанія отъ скольженія, менѣе предѣльнаго тренія μdR. Треніе уже не достигаетъ въ теченіи остальнаго процесса удара предѣльнаго значенія; скольженія уже не будетъ больше до конца удара. Поэтому P, дойдя по AL до прямой SS', двигается далѣе по этой прямой въ сторону возрастающихъ R. Итакъ получился путь AQS' точки P.

Случай 2-ой (фиг. 161). Если же уголъ $SS'A$ *болѣе* чѣмъ $arctg\,\mu$, то

$$\frac{dF}{dR} > \mu$$

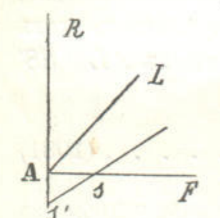
и требуется болѣе тренія, чѣмъ тѣла могутъ обнаружить, для удержанія ихъ отъ скольженія. Треніе удерживаетъ свою предѣльную величину и скольженіе возможно.

Когда P дойдетъ до прямой SS', то не пойдетъ по SS', потому что скольженіе существуетъ; но при переходѣ точки P по ту сторону прямой

*) Изъ (1080) видно, что $artg\,\mu = LAR$.

SS' скольженіе мѣняетъ знакъ, вслѣдствіе чего и треніе мѣняетъ свой знакъ: dF станутъ отрицательными, но треніе удерживаетъ свою абсолютную величину. Слѣдовательно P пойдетъ по прямой QB, тоже составляющей острый уголъ $arctg\,\mu$ съ осью AR, какъ и AL уже съ уменьшающимися ординатами F. Итакъ, получился путь AQB точки P.

Случай 3-ій. Прямыя не пересѣкаются въ положительномъ углѣ. Точка P не встрѣчается съ прямою SS' и идетъ по AL. Треніе все время достигаетъ своей предѣльной величины. Получается путь AL точки P (фиг. 162).



Фиг. 162.

Когда P доходитъ до прямой CC', то прекращается сжатіе тѣлъ и начинается періодъ возстановленія формы тѣлъ. Если R_1 есть абсцисса точки, въ которой P встрѣчаетъ прямую CC', то абсцисса R_2 той точки, въ которую P приходитъ въ самомъ концѣ удара равна:

$$R_2 = R_1\,(1 + e)\;.\;.\;.\;.\;.\;(1082)$$

согласно съ (1031).

Изслѣдованіе удара приводится къ слѣдующему:

Точка P идетъ по прямой AL, составляющей съ осью AR уголъ равный, $artg\,\mu$, до тѣхъ поръ, пока встрѣтитъ прямую SS'. Далѣе она идетъ или по SS' или по QB, и именно по той изъ нихъ, которая составляетъ съ осью AR меньшій острый уголъ; при чемъ QB составляетъ съ осью AR уголъ $artg\,\mu$. Точка P движется по этимъ прямымъ въ сторону возрастающихъ R. Полная сила R всего нормальнаго удара получается помноженіемъ на $(1 + e)$ абсциссы R_0 той точки, въ которой P встрѣчаетъ прямую CC'. Ордината точки, имѣющей абсциссу $R_0\,(1 + e)$ есть полная величина F касательнаго удара (удара тренія). Подставивъ эти величины R и F въ уравненія (1059)...(1064), найдемъ движеніе тѣлъ (скорости) послѣ удара.

Остается разсмотрѣть нѣкоторые особенные случаи. Можетъ случиться, что $S_0 = 0$; тогда (1078) принимаетъ видъ:

$$aF + bR = 0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1083)$$

прямая SS' проходитъ чрезъ начало.

Если при этомъ острый уголъ составляемый прямою SS' съ осью AR менѣе чѣмъ $arctg\,\mu$, то есть если

$$\frac{b}{a} < \mu$$

то P идетъ изъ начала A по AS въ сторону возрастающихъ R; треніе все время менѣе предѣльнаго; скольженія нѣтъ.

Если, при $S_0 = 0$,

$$\frac{b}{a} > \mu$$

то P движется по AL составляющей съ осью AR уголъ $LAR = arctg\ \mu$. Тренiе все время достигаетъ предѣльной величины; все время происходитъ скольженiе.

§ 384. Ударъ шара объ стѣну. Шаръ движется, не вращаясь, по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью V и ударяется въ вертикальную стѣну, съ которою V составляетъ уголъ α; коэффицiентъ тренiя шара и стѣны равенъ μ. Опредѣлить движенiе шара послѣ удара о стѣну (фиг. 163).

Обозначая чрезъ r радiусъ шара, пользуясь формулами (1059) — (1066) и замѣчая, что тренiемъ возбудится вращенiе, получимъ:

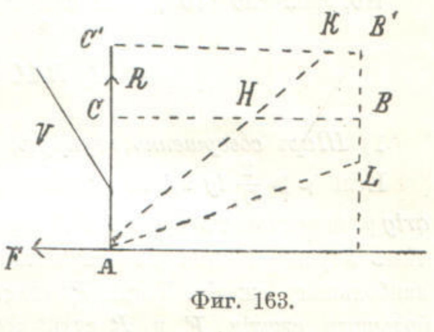
$$M(u - V\sin\alpha) = -F \quad . \quad . \quad (1084)$$

$$M(v + V\cos\alpha) = R \quad . \quad . \quad . \quad (1085)$$

$$Mk^2\omega = Fr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1086)$$

$$S = u - r\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1087)$$

$$C = -v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1088)$$



Фиг. 163.

Исключая u, v, ω изъ этихъ пяти уравненiй получимъ соотвѣтственныя уравненiямъ (1067) и (1068) уравненiя:

$$S = V\sin\alpha - \frac{r^2 + k^2}{k^2} \cdot \frac{F}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1089)$$

$$C = V\cos\alpha - \frac{R}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1090)$$

Видимъ, что въ настоящемъ случаѣ:

$$S_0 = V\sin\alpha; \quad C_0 = V\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1091)$$

$$a = \frac{r^2 + k^2}{k^2 M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1092)$$

$$b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1093)$$

$$a' = \frac{1}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1094)$$

Поэтому уравненiе (1078) принимаетъ видъ:

$$V\sin\alpha - \frac{r^2 + k^2}{k^2 M} \cdot F = 0 \text{ прямая нулеваго скольженiя } S = 0 \ . \ (1095)$$

Уравненiе (1079) принимаетъ видъ:

$$V\cos\alpha - \frac{1}{M} R = 0 \text{ прямая наибольшаго сжатiя } C = 0 \ . \ (1096)$$

Видимъ, что прямая SS' нулеваго сжатiя представляется прямою, проведенною параллельно оси AR на разстоянiи $\frac{k^2}{r^2 + k^2} MV\sin\alpha$.

Прямая CC', опредѣляемая уравненіемъ (1096), представляется прямою, проведенною параллельно оси AT на разстояніи $MV \cos\alpha$ отъ нея (фиг. 163).

Пусть B есть точка пересѣченія этихъ прямыхъ. Не трудно найти:

$$tg\, BAC = \frac{k^2}{r^2 + k^2}\, tg\, \alpha.$$

Но, согласно (403), для сферы $k^2 = \frac{2}{5} r^2$. Слѣдовательно:

$$tg\, BAC = \frac{2}{7}\, tg\, \alpha.$$

1) *Шаръ совершенно неупругъ.*

Если $\mu > \frac{2}{7}\, tg\, \alpha$, то прямая AL наклонная къ AR подъ угломъ $artg\, \mu$ пересѣкаетъ прямую SB нулевого скольженія въ точкѣ L прежде чѣмъ идущая по ней изображающая точка P встрѣтится съ прямою CB наибольшаго сжатія. Тогда P описываетъ путь ALB. Въ моментъ наибольшаго сжатія F и R суть координаты точки B и потому опредѣляются изъ уравненій:

$$F = \frac{2}{7} MV . \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1097)$$

$$R = MV \cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1098)$$

Подставляя эти величины въ (1084), (1085), (1086) найдемъ скорости u, v, ω шара послѣ удара.

Если $\mu < \frac{2}{7}\, tg\, \alpha$, то прямая $F = \mu R$ пересѣкаетъ прямую CB въ какой-нибудь точкѣ H прежде, чѣмъ она достигнетъ прямой SB: треніе не останавливаетъ скольженія. Въ моментъ наибольшаго сжатія F и R суть координаты точки H, и потому опредѣляются уравненіями:

$$F = \mu MV \cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1099)$$

$$R = MV \cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1100)$$

Подставляя эти величины въ (1084), (1085), (1086), найдемъ скорости u, v, ω шара послѣ удара.

2) *Шаръ обладаетъ упругостью, характеризуемою постояннымъ е.* P движется пока достигнетъ абсциссы

$$R = MV \cos\alpha\, (1 + e).$$

Если эта абсцисса равна AC'' (фиг. 163), то проводимъ $C''B'$ параллельно CB; получаемъ

$$tg\, B'AC'' = \frac{2}{7}\, \frac{tg\, \alpha}{(1 + e)}.$$

Если $\mu > \frac{2}{7} \frac{tg\,\alpha}{(1+e)}$, то P описываетъ путь ALB'

$$F = \frac{2}{7} MV \sin\alpha$$

$$R = MV \cos\alpha \quad (1+e).$$

Если $\mu < \frac{2}{7} \frac{tg\,\alpha}{(1+e)}$, то,

$$F = \mu MV \cos\alpha \,.\, (1+e)$$

$$R = MV \,.\, \cos\alpha \,.\, (1+e)$$

Если β есть уголъ, составляемый скоростью центра шара по окончаніи удара со стѣною, такъ что $tg\,\beta = \frac{u}{v}$, то при $\mu > \frac{2}{7} \frac{tg\,\alpha}{(1+e)}$

$$tg\,\beta = \frac{5}{7} \frac{tg\,\alpha}{e};$$

при $\mu < \frac{2}{7} \frac{tg\,\alpha}{(1+e)}$

$$tg\,\beta = \frac{tg\,\alpha - \mu(1+e)}{e}.$$

Если тренія нѣтъ, такъ что $\mu = 0$ и если шаръ совершенно упругъ, такъ что $e = 1$, то

$$tg\,\beta = tg\,\alpha$$

уголъ паденія равенъ углу отраженія. Но это только при $e = 1$; $\mu = 0$.

Этотъ способъ изслѣдованія можно распространить и на движеніе, въ которомъ траекторіи не параллельны одной плоскости. Но мы этого дѣлать не будемъ; желающіе познакомиться съ такимъ обобщеніемъ найдутъ его въ Динамикѣ Раута: Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. *Routh.* 1897 или въ нѣмецкомъ переводѣ: Die Dynamik der Systeme Starrer Körper Routh. 1898 съ предисловіемъ F. Klein'a.

ГЛАВА II.

Общія теоремы о мгновенныхъ силахъ.

§ 385. Общее уравненіе возможныхъ перемѣщеній для мгновенныхъ силъ. Пусть:

x, y, z—координаты точки m системы,
X, Y, Z—проложенія дѣйствующихъ на точку m мгновенныхъ силъ,
u, v, w—проложенія скорости точки m до удара,
u', v', w'—проложенія скорости точки m послѣ удара.

Согласно съ началомъ возможныхъ перемѣщеній имѣемъ:

$$\Sigma m\,[(u'-u)\,\delta x + (v'-v)\,\delta y + (w'-w)\,\delta z] = \Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,. \quad (1101)$$

гдѣ δx, δy, δz суть возможныя перемѣщенія, между которыми могутъ существовать соотношенія, обусловливаемыя связями.

§ 386. Теорема Карно. Примемъ сначала, что разсматриваемыя мгновенныя силы происходятъ только отъ взаимодѣйствія составляющихъ систему тѣлъ (ударъ двухъ тѣлъ, внезапно устанавливающаяся связь двухъ точекъ нитью и проч.). Въ этомъ случаѣ дѣйствія и противодѣйствія уравновѣшиваются, и сумма ихъ возможныхъ работъ равна нулю для всѣхъ перемѣщеній, не измѣняющихъ разстояній между взаимодѣйствующими точками. Если ударяющіяся тѣла абсолютно неупруги, то скорости непосредственно *послѣ* удара, удаляющія тѣла одно отъ другого, равны нулю. Примемъ, поэтому, за возможныя перемѣщенія, перемѣщенія, происходящія въ теченіи безконечно-малаго времени dt слѣдующаго за ударомъ, такъ что:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= u'\,\delta t \\ \delta y &= v'\,\delta t \\ \delta z' &= w'\,\delta t \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1102)$$

Благодаря равенству нулю суммы возможныхъ работъ мгновенныхъ силъ, то есть первой части уравненія (1101) и согласно съ (1102), уравненіе (1101) принимаетъ видъ:

$$\Sigma m\left[(u'-u)\,u'+(v'-v)\,v'+(w-w')\,w'\right]=0 \quad . \; . \; (1103)$$

или

$$\Sigma m\,(u'^2+v'^2+w'^2)=\Sigma m\,(uu'+vv'+\omega w') \quad . \; . \; . \; (1104)$$

или

$$\Sigma m\,(u'^2+v'^2+w'^2)-\Sigma m\,(u^2+v^2+w^2)=$$
$$=-\Sigma m\left[(u'-u)^2+(v'-v)^2+(w-w')^2\right] \quad . \; . \; . \; (1105)$$

Это уравненіе выражаетъ собою теорему Carnot.

Теорема Карно. *При ударѣ абсолютно неупругихъ тѣлъ всегда теряется живая сила, и потерянная живая сила равна живой силѣ потерянныхъ скоростей.* Подъ именемъ потерянныхъ скоростей здѣсь разумѣются $(u'-u)$, $(v'-v)$, $(w'-w)$.

§ 387. 2-я теорема Карно. Положимъ теперь, что мгновенныя силы производятся не ударомъ, а *взрывомъ* системы. Здѣсь взаимодѣйствія уравновѣшиваются непосредственно передъ ударомъ. Поэтому здѣсь вмѣсто (1102) будутъ такія соотношенія

$$\begin{aligned} \delta x &= u\,\delta t \\ \delta y &= v\delta\,t \\ \delta z &= w\delta\,t \end{aligned}$$

относящіяся къ скоростямъ u, v, w *до взрыва*, а не къ скоростямъ u', v', w' *послѣ* удара. Поэтому (1101) приметъ видъ:

$$\Sigma m\left[(u'-u)\,u+(v'-v)\,v+(w'-w)\,w\right]=0$$

или

$$\Sigma m\,(u'^2 + v'^2 + w'^2) - \Sigma m\,(u^2 + v^2 + w^2) =$$

$$= \Sigma m\,[(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2] \quad . \; . \; . \; (1106)$$

Это уравненіе выражаетъ 2-ую теорему Карно.

2-ая теорема Карно. *При взрывѣ всегда пріобрѣтается живая сила, при чемъ пріобрѣтенная живая сила равна живой силѣ пріобрѣтенныхъ скоростей.*

§ 388. 3-я теорема Карно. Если ударъ происходитъ между совершенно упругими тѣлами, то весь процессъ удара раздѣляется на два періода. Въ первомъ періодѣ тѣла сжимаются какъ неупругія, и теряется живая сила по 1-й теоремѣ Карно. Во второмъ періодѣ происходитъ то же, что при взрывѣ, и пріобрѣтается живая сила по 2-й теоремѣ Карно равная той, которая была потеряна въ 1-мъ періодѣ. Въ результатѣ остается та же самая живая сила, которая была бы до удара. Отсюда:

3-я теорема Карно. *При ударѣ абсолютно упругихъ тѣлъ живая сила остается безъ измѣненія.*

ОТДѢЛЪ XI.

Общая теорія уравненій механики.

ГЛАВА I.

Уравненія Лагранжа во 2-ой формѣ.

Теперь мы приступимъ къ изученію общихъ свойствъ уравненій механики, то есть къ изученію предмета, составляющаго существеннѣйшую часть *аналитической* механики.

§ 389. Выраженія декартовыхъ координатъ чрезъ независимыя координаты. Если движущаяся система состоитъ изъ n точекъ, то положеніе каждой точки опредѣляется тремя декартовыми координатами (x, y, z). Для опредѣленія движенія такой системы потребуется слѣдовательно, кромѣ времени t, еще $3n$ декартовыхъ координатъ.

Если при этомъ движеніе точекъ системы стѣснено связями, то всегда можно примѣнить къ дѣлу такія *независимыя* между собою координаты q_1, q_2, q_3 ... q_k, которыхъ было бы меньше чѣмъ $3n$, и чрезъ которыя можетъ быть выражена каждая изъ декартовыхъ координатъ, такъ что уравненіе связей тождественно удовлетворяются при подстановкѣ въ нихъ независимыхъ координатъ вмѣсто декартовыхъ. Напримѣръ: если система состоитъ изъ одной точки, принужденной двигаться по сферѣ

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1107)$$

то положеніе точки можетъ быть вполнѣ опредѣлено двумя только независимыми координатами, именно широтою q_1 и долготою q_2; при чемъ декартовы координаты выражаются чрезъ широту и долготу такъ:

$$x = r \,.\, \cos q_1 \,.\, \cos q_2 .$$
$$y = r \,.\, \cos q_1 \,.\, \sin q_2 .$$
$$z = r \,.\, \sin q_2 .$$

Вставляя вмѣсто x, y, z эти ихъ выраженія чрезъ q_1 и q_2 въ уравненіе связи [сферы (1107)], получимъ тождество.

Итакъ, декартовы координаты выражаются чрезъ независимыя такими k формулами

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(q_1, q_2 \cdots q_k) \\ y_1 = f_2(q_1, q_2 \cdots\cdots) \\ z_1 = f_3(q_1, q_2 \cdots\cdots) \\ x_2 = F(q_1, q_2 \cdots\cdots) \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1108)$$

помощью которыхъ уравненія связей тождественно удовлетворяются. Число k независимыхъ координатъ меньше числа $3n$ декартовыхъ, и еслибы можно было установить дифференціальныя уравненія движенія для независимыхъ координатъ, то затѣмъ можно было бы изслѣдовать движеніе, уже не заботясь о связяхъ. Такія общія уравненія движенія въ независимыхъ координатахъ и были, какъ мы это увидимъ въ § 392, установлены Лагранжемъ. Число k независимыхъ координатъ q_1, $q_2 \ldots$ называется степенью свободы системы.

§ 390. Выраженіе живой силы въ независимыхъ координатахъ. Обозначимъ первыя производныя отъ координатъ по времени значками вверху, такъ что

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1'; \quad \frac{dy_1}{dt} = y_1' \ldots \quad \frac{dq_1}{dt} = q_1', \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2' \ldots$$

Тогда выраженіе живой силы T въ декартовыхъ координатахъ дастъ

$$2T = \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2) \ldots\ldots\ldots (1109)$$

Для общности предположимъ, что нѣкоторыя связи измѣняютъ свой видъ или положеніе съ теченіемъ времени (зависятъ отъ времени). Тогда въ первыя части уравненій (1108) войдетъ также и время, и изъ нихъ получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = \dfrac{\partial x_1}{\partial t} + \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} q_1' + \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} q_2' + \ldots \\ y_1' = \dfrac{\partial y_1}{\partial t} + \dfrac{\partial y_1}{\partial q_1} q_1' + \dfrac{\partial y_1}{\partial q_2} q_2' + \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1110)$$

Подставивъ эти выраженія вмѣсто (x', y', z') въ (1109) и опредѣливъ изъ (1108) вошедшія въ (1110) величины $\frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial y_1}{\partial q_1} \ldots$ чрезъ $q_1, q_2 \cdots$, найдемъ

$$2T = A_{11} q_1'^2 + 2A_{12} q_1' q_2' + \ldots + B_1 q_1' + B_2 q_2' + \ldots + C \quad \ldots (1111)$$

гдѣ коэффиціенты A_{11}, A_{12}, B_1, B_2, C суть функціи перемѣнныхъ t, q_1, $q_2 \cdots$

Чрезвычайно важно замѣтить, что въ правой части уравненія (1111) не будетъ членовъ 1-го порядка и нулевого порядка относительно q_1', q_1'. $q_2' \ldots$, если не будетъ въ правыхъ частяхъ уравненій (1110) первыхъ

членовъ; а эти члены $\frac{\partial x_1}{\partial t}$, $\frac{\partial y_1}{\partial t}$ ... равны нулю въ томъ случаѣ, когда уравненія связей не заключаютъ явно времени. Итакъ, если связи не зависятъ отъ времени, то живая сила выражается такою функціею отъ $q_1, q_2 \dots q_k, q_1', q_2' \dots q_k'$, въ которой перемѣнныя $q_1', q_2', q_3' \dots q_k'$, входятъ только или квадратами или попарными произведеніями.

Другими словами: если *связи не зависятъ отъ времени*, то живая сила выражается *однородною* функціею *второго* порядка относительно перемѣнныхъ $q_1', q_2', q_3' \dots$, представляющихъ собою первыя производныя по времени отъ независимыхъ координатъ.

§ 391. Элементарная работа ускорительныхъ силъ. Элементарная работа ускорительныхъ силъ получится, если въ общее выраженіе элементарной работы $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$, данное въ § 67-мъ, подставимъ вмѣсто X, Y, Z, произведенія массъ на ускоренія и возьмемъ сумму этихъ произведеній для всѣхъ точекъ системы. Получимъ:

$$\Sigma m\,(x''\,\delta x + y''\,\delta y + z\delta z) \quad \dots\dots\dots (1112)$$

гдѣ двойными значками отмѣчены вторыя производныя координатъ по времени, такъ что напримѣръ $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Элементарная работа на пути возможныхъ перемѣщеній, произведенныхъ измѣненіемъ координаты q_1 будетъ:

$$\Sigma m \left(x''\,\frac{\partial x}{\partial q_1} + y''\,\frac{\partial y}{\partial q_1} + z''\,\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\delta q_1 \quad \dots\dots (1113)$$

Не трудно видѣть, что это выраженіе равно:

$$\left[\frac{d}{dt}\,\Sigma m\left(x'\,\frac{\partial x}{\partial q_1} + \dots\right) - \Sigma m\left(x'\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial x}{\partial q_1} + \dots\right)\right]\delta q_1 = \text{элем. раб.} \quad . (1114)$$

Изъ (1109) находимъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = \Sigma m\left(x'\,\frac{\partial x'}{\partial q'_1} + y'\,\frac{\partial y'}{\partial q'_1} + \dots\right) \quad \dots\dots (1115)$$

Взявъ частную производную по q_1' отъ (1110) находимъ $\frac{\partial x'}{\partial q_1'} = \frac{\partial x}{\partial q_1}$. Слѣдовательно изъ (1115) получимъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1}\,\delta q_1 = \Sigma m\left(x'\,\frac{\partial x}{\partial q_1} + y'\,\frac{\partial y'}{\partial q_1} + \dots\right)\delta q_1 \quad \dots (1116)$$

Съ другой стороны, взявъ отъ (1109) частную производную по q_1, найдемъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \Sigma m\left(x'\,\frac{\partial x'}{\partial q_1} + y'\,\frac{\partial y'}{\partial q_1} + \dots\right) \quad \dots\dots (1117)$$

Дифференцируя же (1110) по q_1, получимъ:

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial t\,.\,\partial q_1} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^{\,2}}\,q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1\,.\,\partial q_2}\,q'_2 + \dots = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial x}{\partial q_1} \quad . . (1118)$$

Поэтому
$$\Sigma m\left(x'\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial x}{\partial q_1}+\ldots\right)=\frac{\partial T}{\partial q_1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1119)$$

Изъ (1114), (1116) и (1119) находимъ:

$$\text{элем. работ. ускор. силъ}=\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q_1{}'}-\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)\delta q_1\;.\;.\;(1120)$$

Замѣтимъ, что здѣсь мы брали частныя производныя только по q_1, такъ что опредѣлили ту элементарную работу ускорительныхъ силъ, которую онѣ производятъ на пути только тѣхъ возможныхъ перемѣщеній, которыя происходятъ отъ измѣненія только одной изъ независимыхъ координатъ, именно—отъ измѣненія координаты q_1.

§ 392. Уравненія Лагранжа во 2-ой формѣ. Пусть силовая функція для разсматриваемой системы есть U. Она должна быть функціею координатъ q_1, $q_2 \ldots q_k$ и времени t. Согласно съ § 133 элементарная работа *дѣйствующихъ* силъ, на пути возможныхъ перемѣщеній, произведенныхъ измѣненіемъ координаты q_1, должна быть равна $\frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1$. Эта работа, на основаніи начала Даламбера (§ 74), должна быть равна опредѣленной въ предыдущемъ параграфѣ элементарной работѣ *ускорительныхъ* силъ. Слѣдовательно:
$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q_1{}'}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial U}{\partial q_1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1121)$$

Для каждой изъ независимыхъ координатъ $q_1, q_2 \ldots q_k$ получимъ такое уравненіе. Всего будетъ k уравненій:
$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q_1{}'}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial U}{\partial q_1}\\ \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q_2{}'}-\frac{\partial T}{\partial q_2}=\frac{\partial U}{\partial q_2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q_k{}'}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=\frac{\partial U}{\partial q_k}\end{array}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1122)$$

Эти уравненія и называются лагранжевыми уравненіями во 2-ой формѣ. Они удобны, потому что содержатъ меньшее число координатъ чѣмъ уравненія (284) и кромѣ того избавляютъ отъ дальнѣйшей заботы о связяхъ.

Если положить:
$$U+T=L\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1123)$$

то эти уравненія можно представить въ еще болѣе простой формѣ:
$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial q_1{}'}-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0\\ \ldots\ldots\ldots\\ \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial q_k{}'}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\end{array}\right|\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1424)$$

Функція L называется функціею Лагранжа.

§ 393. Движеніе тяжелой точки по сферѣ. Какъ примѣръ на примѣненіе лагранжевыхъ уравненій во 2-ой формѣ къ частнымъ вопросамъ изслѣдуемъ движеніе тяжелой точки по сферѣ.

Примемъ за независимыя координаты долготу ψ и дополненіе θ до широты, такъ что:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \, . \, sin \, \theta \, . \, cos \, \psi \\ y &= r \, . \, sin \, \theta \, . \, sin \, \psi \\ z &= r \, . \, cos \, \theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1125)$$

Если обозначимъ чрезъ T живую силу и чрезъ $\Theta\delta\theta + \Psi\delta\psi$ работу силы тяжести, то уравненія (1122) дадутъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\theta'} - \frac{\partial T}{\partial\theta} - \Theta = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\psi'} - \frac{\partial T}{\partial\psi} - \Psi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1126)$$

Но

$$T = \frac{r^2 d\,\theta^2 + r^2 \, . \, sin^2 \, \theta \, . \, d\psi^2}{2\,dt^2}$$

или

$$T = \frac{1}{2}\left(r^2\,\theta'^2 + r^2 \, . \, sin^2\,\theta \, . \, \psi'^2\right) \quad \ldots\ldots (1127)$$

Слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dT}{d\theta'} = r^2\,\theta'; \quad \frac{dT}{d\psi'} = r^2 \, . \, sin^2\,\theta \, . \, \psi' \\ &\frac{dT}{d\theta} = r^2\,sin\,\theta \, . \, cos\,\theta \, . \, \psi'^2; \quad \frac{dT}{d\psi} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1128)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Theta\delta\theta + \Psi\delta\psi = g\delta z = -\,rg \, . \, sin\,\theta \, . \, \delta\theta \\ &\Theta = -\,rg \, . \, sin\,\theta \\ &\Psi = 0 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots (1129)$$

Поэтому уравненія (1126) принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} &r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\,sin\,\theta \, . \, cos\,\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + g \, . \, sin\,\theta = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(r^2\,sin^2\,\theta \, . \, \frac{d\psi}{dt}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1130)$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ:

$$r^2\,sin^2\,\theta\,\frac{d\psi}{dt} = c, \quad \ldots\ldots (1131)$$

гдѣ c постоянная интеграціи.

1-ое изъ уравненій (1130) вмѣстѣ съ (1131) даютъ:

$$r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{c^2 \, . \, cos\,\theta}{r^3 \, . \, sin^3\,\theta} + g\,sin\,\theta = 0 \quad \ldots\ldots (1132)$$

Помноживъ это уравненіе на $d\theta$ и интегрируя, получимъ:

$$\frac{1}{2}\, r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{2r^2 \sin^2\theta} - g \cos\theta = a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1133)$$

гдѣ a постоянная интеграціи.

Интегрируя (1133), получимъ:

$$t = \int \frac{-r^2 \sin\theta \, . \, d\theta}{\sqrt{-c^2 + 2gr^3 \sin^2\theta \, . \, \cos\theta + 2r^3 . \, a \, . \, \sin^2\theta}} \quad . \; . \; . \; (1134)$$

Полагая здѣсь $r \cos\theta = z$, получимъ:

$$t = \int \frac{r\, dz}{\sqrt{(r^2 - z^2)(2ar + 2gr) - c^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1135)$$

Корни многочлена, стоящаго подъ радикаломъ этого выраженія, всѣ дѣйствительные, потому что этотъ многочленъ отрицателенъ при $z = \pm r$, но положителенъ при $z = -\infty$; слѣдовательно между $= \infty$ и $- r$ находится одинъ изъ корней; между $+ r$ и $- r$ существуетъ еще корень; слѣдовательно и третій корень дѣйствителенъ (потому что при двухъ дѣйствительныхъ корняхъ кубичнаго уравненія и третій дѣйствителенъ). Поэтому (1135) можетъ быть представлено въ видѣ;

$$t = \int \frac{r\, dz}{\sqrt{2g\,(\alpha - z)\,(\beta - z)\,(\gamma - z)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1136)$$

гдѣ α, β, γ суть упомянутые корни многочлена. Полагая

$$\left.\begin{aligned} z &= \alpha - (\beta - \alpha)\,\xi^2 \\ dz &= -\,2\,(\beta - \alpha)\,\xi\, d\xi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1137)$$

получимъ:

$$t = \int \frac{2r\, d\xi}{\sqrt{2g\,(\alpha - \gamma)\,(1 - \xi^2)\left(1 - \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}\,\xi^2\right)}} \quad . \; . \; (1138)$$

Если $\alpha > \gamma > \beta$, то $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ положительна и < 1. Полагая

$$\left.\begin{aligned} \frac{2r}{\sqrt{2g\,(\alpha - \gamma)}} &= \frac{1}{\mu} \\ \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} &= k^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1139)$$

получимъ:

$$\mu t = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)\,(1 - k^2 \xi^2)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1140)$$

Полагая $\xi = \sin\varphi$, гдѣ φ новое вводимое нами перемѣнное, получимъ:

$$\mu t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1141)$$

Сравнивая съ (629) и припоминая сказанное въ § 277-омъ видимъ, что μt выражается чрезъ φ эллиптическимъ интеграломъ и что

$$\sin \varphi = \sin am\,(\mu t).$$

Слѣдовательно:

$$\xi = \sin \varphi = \sin am\,(\mu t) \quad \ldots\ldots\ldots (1142)$$

Затѣмъ, согласно съ (1137):

$$r\,.\cos \theta = \alpha - (\alpha - \beta)\,[\sin am\,(\mu t)]^2 \quad \ldots\ldots (1143)$$

Изъ (1131) получимъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{c}{r^2 - [\alpha^2 - (\alpha - \beta)\,[\sin am\,(\mu t)]^2]}$$

$$\psi = \int \frac{c\,dt}{r^2 - [\alpha^2 - (\alpha - \beta)^2\,(\sin am\,(\mu t)^2]} \quad \ldots\ldots (1144)$$

Этотъ интегралъ выражается помощью якобіевской тета-функціи.

Если положимъ $dz = 0$, то $\theta = const$:

$$r\,.\cos \theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = g$$

$$\psi = \frac{ct}{r^2\,.\,\sin^2 \theta} + \psi_0$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r\,.\cos \theta}}.$$

ГЛАВА II.

Каноническія уравненія механики.

§ **394. Взаимныя функціи.** Положимъ, что имѣемъ функцію T_1 перемѣнныхъ $q_1', q_2', q_3' \ldots$ Примемъ слѣдующія обозначенія:

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1'} = p_1; \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2; \quad \frac{\partial T}{\partial q_3'} = p_3 \quad \ldots\ldots (1145)$$

Каждая изъ частныхъ производныхъ, стоящихъ въ лѣвыхъ частяхъ этихъ уравненій, представляетъ собою, очевидно, тоже функцію отъ перемѣнныхъ $q_1', q_2', q_3' \ldots$; самихъ же такихъ уравненій имѣется ровно столько же, сколько этихъ перемѣнныхъ. Слѣдовательно эти уравненія даютъ возможность выразить каждое изъ перемѣнныхъ $q_1', q_2', q_3' \ldots$ чечезъ $p_1, p_2, p_3 \ldots$

Положимъ, что имѣется другая функція T_2, опредѣляемая уравненіемъ:

$$T_2 = -T_1 + p_1 q_1' + p_2 q_1' + \quad \ldots\ldots (1146)$$

Опредѣливъ, какъ выше было указано, q_1', q_2' черезъ $p_1, p_2 \ldots$ можемъ исключить изъ T_2 всѣ $q_1', q_2' \ldots$ и выразить T_2 въ видѣ функціи только перемѣнныхъ p_1, p_2, $p_3 \ldots$ Изъ (1146) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial p_1} = q_1'; \quad \frac{\partial T_2}{\partial p_2} = q_2' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1147)$$

Функціи T_1 можетъ содержать еще и другія перемѣнныя, напримѣръ, такія q_1, q_2, q_3. Тогда и T_2 содержитъ эти перемѣнныя. Докажемъ, что въ такомъ случаѣ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial T_1}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial T_2}{\partial q_2} = -\frac{\partial T_1}{\partial q_2} \ldots \ldots \ldots \quad (1148)$$

Возьмемъ для доказательства полный дифференціалъ отъ T_2. Согласно съ (1146) получимъ.

$$dT_2 = -\frac{\partial T_1}{\partial q_1} dq_1 + \left(-\frac{\partial T_1}{\partial q_1'} + p_1\right) dq_1' + q_1' dp_1 + \ldots \quad (1149)$$

Вслѣдствіе (1145) заключенная въ скобки часть въ (1149) равна нулю

Если выразимъ T_2 только въ перемѣнныхъ q_1, p_1, q_2, $p_2 \ldots$ (но не въ перемѣнныхъ $q_1, q_2 \ldots q_1', q_2' \ldots$), то:

$$dT_2 = \frac{\partial T_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T_2}{\partial p_1} dp_1 + \ldots \ldots \quad (1150)$$

Сравнивая (1150) съ (1149), получимъ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial T_1}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial T_2}{\partial q_2} = -\frac{\partial T_1}{\partial q_2} \ldots \ldots \quad (1151)$$

что и требовалось доказать. Изъ (1150) и (1149) видно кромѣ того, что:

$$\frac{\partial T_2}{\partial p_1} = q_1'; \quad \frac{\partial T_2}{\partial p_2} = q_2' \ldots \ldots \ldots \quad (1152)$$

Функціи T_1 и T_2 называются взаимными. Взаимность ихъ видна изъ сопоставленія уравненій (1145) и (1147); T_2 находится по T_1 исключеніемъ, при помощи уравненій (1145) перемѣнныхъ $q_1', q_2' \ldots$ Наоборотъ T_1 находится по T_2 исключеніемъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, p_3 \ldots$ при помощи уравненій (1147). T_1 есть функціи перемѣнныхъ $q_1, q_2 \ldots q_1', q_2' \ldots$ Тогда какъ T_2 есть функція перемѣнныхъ $q_1, q_2, \ldots p_1, p_2 \ldots$

§ 395. Случай, въ которомъ T_1 есть однородная функція второго порядка. Если T_1 есть однородная функція 2-го порядка относительно перемѣнныхъ $q_1', q_2' \ldots$, то, по теоремѣ Эйлера объ однородныхъ функціяхъ, сумма произведеній частныхъ производныхъ однородной функціи на соотвѣтствующія перемѣнныя равна произведенію самой функціи на показатель однородности. Въ данномъ случаѣ слѣдовательно:

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T_1}{\partial q_2} q_2' + \ldots = 2T_1 \ldots \ldots \quad (1153)$$

или, благодаря уравненіямъ (1145):

$$p_1 q_1' + p_2 q_2' + \ldots = 2T_1 \quad \ldots \ldots \quad (1154)$$

Поэтому въ этомъ случаѣ, сообразуясь съ (1146), получимъ:

$$T_2 = T_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1155)$$

Только каждая изъ этихъ функцій выражена въ своихъ перемѣнныхъ, потому что мы всегда разсматриваемъ T_1 какъ функцію, изъ которой исключены p_1, p_2, p_3; тогда какъ разсматриваемъ T_2 какъ функцію, изъ которой исключены q_1', q_2' ... При этомъ T_2 окажется однородною функцеію второго порядка отъ $p_1, p_2, p_3 \ldots$

Примѣръ 1-ый. Положимъ, что T_1 неоднородная функція заданная такъ

$$T_1 = q_1'^2 + q_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1156)$$

Найти функцію T_2 и показать, что на этомъ примѣрѣ выполняются уравненія (1151) и (1152). Изъ (1156) имѣемъ:

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1} = p_1 = 2q_1' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1157)$$

Вычисляя по формулѣ (1146) функцію T_2 получимъ:

$$T_2 = -q_1'^2 - q_1 + p_1 q_1'.$$

Исключая отсюда q_1' помощью найденнаго соотношенія (1157) имѣемъ:

$$T_2 = -\frac{1}{4} p_1^2 - q_1 + \frac{1}{2} p_1^2 = \frac{1}{4} p_1^2 - q_1 \quad \ldots \quad (1158)$$

Отсюда

$$\frac{\partial T_2}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2}$$

или, на основаніи (1157)

$$\frac{\partial T_2}{\partial p_1} = q_1' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1159)$$

Слѣдовательно уравненіе (1152) выполнилось. Изъ (1158) и (1156) имѣемъ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_1} = -1; \quad \frac{\partial T_1}{\partial q_1} = +1.$$

Слѣдовательно и уравненіе (1151) выполняется.

Примѣръ 2-ой. Дана $T_1 = q'^{-2} + q'_1 q'_2$, такъ что T_1 выражается однородною функціею 2-го порядка чрезъ q'_1, q'_2. Найти сопряженную ей функцію T_2 и показать, что она будетъ однородною 2-го порядка относительно p_1, p_2.

По (1146) имѣемъ:

$$T_2 = -q_1'^2 - q'_1 q'_2 + (2q' + q'_2)\, q'_1 + q'_1 q'_2 = q_1'^9 + q_1' q'_2 \,. \quad (1160)$$

Слѣдовательно $T_2 = T_1$ согласно съ (1155).

Изъ выраженія, которымъ задана T_1 имѣемъ:

$$p_1 = \frac{\partial T_1}{\partial q'_1} = 2q'_2 + q' \quad \ldots \ldots \quad (1161)$$

$$p_2 = \frac{\partial T_2}{\partial q'_2} = q'_1 \quad \ldots \ldots \quad (1162)$$

Опредѣляя отсюда q'_1 и q'_2 чрезъ p_1, p_2 и вставивъ въ (1160) получимъ:

$$T_2 = p_2^2 + p_2(p_1 - 2p_2) = p_2 p_1 - p_2^2 \quad \ldots \quad (1163)$$

Итакъ, убѣждаемся, что T_2 выражается однородною функціею 2-го порядка чрезъ p_1, p_2.

§ 396. Каноническія уравненія механики. Если дѣйствующія на систему силы (внутреннія и внѣшнія) имѣютъ потенціалъ U, то, получаются Лагранжевы уравненія (1124) въ видѣ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \ldots \ldots \quad (1164)$$

При этомъ $L = T + U$. Если H есть функція взаимная съ L, то, согласно съ § 394:

$$p = \frac{\partial L}{\partial q'} \quad \ldots \ldots \quad (1165)$$

Но U не содержитъ производныхъ q'. Слѣдовательно:

$$p = \frac{\partial L}{\partial p'} = \frac{\partial T}{\partial q'} \quad \ldots \ldots \quad (1166)$$

На основаніи (1152) имѣемъ $q' = \frac{\partial H}{\partial p}$. На основаніи же (1166) и (1164) имѣемъ:

$$p' = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \ldots \ldots \quad (1167)$$

Затѣмъ, согласно съ (1151), имѣемъ:

$$p' = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \ldots \ldots \quad (1168)$$

Такимъ образомъ для каждой независимой координаты получимъ, вмѣсто Лангранжевыхъ, слѣдующія каноническія уравненія:

$$q' = \frac{\partial H}{\partial p}\,; \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Всего получимъ $2k$ слѣдующихъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial H}{\partial p_1} = q'_1; & -\frac{\partial H}{\partial q_1} = p'_1 \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} = q'_2; & -\frac{\partial H}{\partial q_2} = p'_2 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} = q'_k; & -\frac{\partial H}{\partial q_k} = p'_k \end{array}\right\} \dots\dots\dots (1169)$$

Это $2k$ уравненій и называются каноническими. Они были выведены Гамильтономъ. Функція H называется гамильтоновскою функціею.

Подставляя значенія величинъ p' и q' получимъ каноническія уравненія въ наиболѣе употребительной формѣ:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}; & \frac{\partial q_1}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}; & \frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; & \frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{array}\right\} \dots\dots\dots (1170)$$

Чрезвычайно важно замѣтить, что если связи не зависятъ отъ времени, то согласно съ § 390, T есть однородная функція 2-го порядка отъ $q'_1, q'_2 \dots q'_k$, такъ что по теоремѣ Эйлера

$$p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 + \dots = 2T \dots\dots (1171)$$

Поэтому, на основаніи (1146) получимъ въ этомъ случаѣ:

$$H = T - U \quad \dots\dots\dots (1172)$$

Лагранжъ привелъ всю механику къ теоріи дифференціальныхъ уравненій (1122). Якоби показалъ, что интегрированіе уравненій механики удобнѣе производится, когда они представлены въ канонической формѣ (1170). Со временъ Якоби главнымъ предметомъ *аналитической* механики является теорія интегрированія каноническихъ уравненій, совпадающая какъ показалъ Якоби съ интегрированіемъ уравненій съ частными производными 1-го порядка.

ЗАДАЧИ.

Отдѣлъ I. — Глава I.

1) Написать уравненіе равномѣрно-прямолинейнаго движенія, если точка проходитъ 5 сантиметровъ въ секунду и время считается отъ того момента, когда точка находилась на разстояніи 2 метровъ отъ начала координатъ.

2) Найти скорость въ прямолинейномъ движеніи, опредѣляемомъ уравненіемъ $x = \sin t + \cos t$.

3) Найти скорость въ движеніи, опредѣляемомъ уравненіемъ

$$x = \sin(at) + b.$$

4) Найти скорость въ движеніи, опредѣляемомъ уравненіемъ

$$x = \sqrt{at + b}.$$

5) Найти ускоренія въ движеніяхъ, данныхъ въ задачахъ: 2, 3 и 4.

6) Найти силы, подъ вліяніемъ которыхъ происходятъ движенія, заданныя на задачахъ 2, 3 и 4.

7) Изслѣдовать движеніе, заданное дифференціальнымъ уравненіемъ $X = at + b$.

8) Изслѣдовать движеніе точки, брошенной вверхъ въ воздухѣ, принимая, что сопротивленіе воздуха пропорціонально квадрату скорости.

9) Изслѣдовать прямолинейное движеніе точки, притягиваемой къ началу координатъ съ силою обратно-пропорціональною квадрату разстоянія ея отъ начала.

Отдѣлъ I. — Глава II.

10) Опредѣлимъ траекторію и скорость въ движеніи, заданномъ уравненіями: $x = a_1 t + b_1$; $y = a_2 t + b_2$; $z = a_3 t + b_3$.

11) Опредѣлить скорость v въ движеніи точки, брошенной въ пустотѣ наклонно къ горизонту.

12) Опредѣлить скорость и ея направленіе, ускореніе и его направленіе въ движеніи, опредѣляемомъ уравненіями:

$$x = A\cos(kt) + B\sin(kt)$$
$$y = A'\cos(kt) + B'\sin(kt).$$

13) Опредѣлимъ тангенціальное и нормальное ускоренія въ движеніи, заданномъ въ задачѣ 12-ой.

Отдѣлъ I. — Глава III.

14) Опредѣлить равнодѣйствующую R силъ P_1 и P_2 дѣйствующихъ на свободную точку и составляющихъ между собою уголъ θ.

15) На свободную точку, помѣщенную въ началѣ координатъ, дѣйствуютъ: силы P_1 и P_2, составляющія съ осью иксовъ углы α_1 и α_2. Опредѣлить уголъ φ, составленный съ осью иксовъ равнодѣйствующею R.

16) Силы P и Q дѣйствующія на точку, составляютъ уголъ α, равнодѣйствующая ихъ равна R. Показать, что, при увеличеніи каждой изъ составляющихъ силъ на R, новая равнодѣйствующая составитъ съ прежнею уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{(P-Q)\sin\alpha}{P+Q+R+(P+Q)\cos\alpha}$.

17) Равнодѣйствующая силъ P и Q равна R. Силы заданы такъ, что при удвоеніи Q сила R удвояется, при дѣйствіи Q въ обратномъ направленіи R тоже удвояется. Показать, что при такихъ условіяхъ $P:Q:R = \sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$.

Отдѣлъ II. — Глава II.

18) Дано приведеніе силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло, къ точкѣ O, при чемъ проложенія равнодѣйствующей R суть ΣX, ΣY, ΣZ и проложенія паръ $L = \Sigma(Zy - Yz)$; $M = \Sigma(Xz - Zx)$; $N = \Sigma(Yx - Xy)$. Найти приведеніе къ точкѣ O'', координаты которой суть (ξ, η, ζ).

19) Дано приведеніе: ΣX, ΣY, ΣZ, L, M, N. Найти моментъ Γ динамы равнодѣйствующей этимъ силамъ и парамъ и параметръ p этой динамы.

20) По даннымъ задачи 18-й найти уравненіе оси динамы.

21) Шесть равныхъ между собою силъ дѣйствуютъ по сторонамъ AB, BC, CA, DA, DB; DC правильнаго тетраэдра, показать, что ось равнодѣйствующей динамы расположена по перпендикуляру, опущенному изъ D на ABC.

Отдѣлъ II. — Глава IV.

22) Палитра для красокъ имѣетъ форму диска радіуса a, въ которомъ сдѣлано эксцентричное круглое отверстіе радіуса b. Разстояніе между центрами диска и отверстія равно c. Найти центръ тяжести палитры.

23) Показать, что центръ тяжести площади треугольника совпадаетъ съ центромъ тяжести трехъ равныхъ матеріальныхъ точекъ, помѣщенныхъ въ срединахъ сторонъ.

24) Показать что центръ тяжести периметра треугольника ABC находится въ центрѣ круга вписаннаго въ треулольникъ DEF, гдѣ D, E, F суть средины сторонъ даннаго треугольника.

25) Показать, что центръ тяжести дуги какой-либо кривой опредѣляется координатами:

$$\bar{x} = \frac{\int x ds}{\int ds}; \quad \bar{y} = \frac{\int y ds}{\int ds}.$$

26) Найти координаты центра тяжести дуги цѣпной линіи

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

лежащей между абсциссами $x = 0$ и $x = x$.

27) Обозначивъ чрезъ G центръ тяжести дуги AP лемнискаты $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$, показать что OG дѣлитъ пополамъ уголъ AOP, принимая O за полюсъ полярныхъ координатъ.

28) Показать, что центръ тяжести ортогональной проекціи данной площади совпадаетъ съ проекціею центра тяжести данной площади.

29) Найти координаты центра тяжести кругового квадрата AOB, принимая радіусы OA и OB за оси координатъ.

30) Основываясь на задачахъ 28 и 29, показать, что координаты центра тяжести квадранта эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, суть: $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$; $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$.

31) Показать, что разстояніе центра тяжести половины площади эллипса, находящейся по одну сторону большей оси, отъ центра эллипса равно $\frac{4b}{3\pi}$.

32) Показать, что координаты центра тяжести какой-либо площади равны

$$\bar{x} = \frac{\int x dy x}{\int y dx}; \quad \bar{y} = \frac{\int y^2 dx}{2\int y dx}.$$

33) Основываясь на задачѣ 32, показать, что координаты площади, ограниченной параболою, ея осью ON и ординатою NP суть:

$$\bar{x} = \frac{3}{5}x; \quad \bar{y} = \frac{3}{8}y.$$

34) Основываясь на теоремахъ Гюльдена-Паппуса, опредѣлить поверхность S и объемъ V тѣла, получаемаго отъ вращенія треугольника ABC около AB, если перпендикуляръ, опущенный изъ C на AB равенъ p

$$BC = a; \quad AC = b; \quad AB = c.$$

35) Дуга S какой-либо кривой вращается около оси z, лежащей въ ея плоскости, на уголъ 2α; показать, что координаты центра тяжести описанной дугою поверхности суть:

$$\bar{x} = \frac{\int x^2 ds}{\int x ds} \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right); \quad \bar{z} = \frac{\int xz ds}{\int x ds}.$$

36) Ограниченная замкнутымъ контуромъ площадь σ, плоскость которой проходитъ черезъ ось z, вращается около оси z на уголъ 2α. Показать, что координаты центра тяжести объема, описаннаго площадью σ, суть:

$$\bar{x} = \frac{\int x^2 d\sigma}{\int x d\sigma} \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right); \quad \bar{z} = \frac{\int xz d\sigma}{\int x d\sigma}.$$

Отдѣлъ III. — Глава I.

37) Тонкая, прямая, гладкая трубка вращается въ горизонтальной плоскости съ такою угловою скоростью, что тангенсъ описаннаго трубкою угла пропорціоналенъ времени. Опредѣлить движеніе тяжелой матеріальной точки, помѣщенной въ такой трубкѣ.

38) Основываясь на началѣ сохраненія движенія центра тяжести, показать, что ружье или пушка при выстрѣлѣ «отдаютъ», то-есть получаютъ толчокъ въ сторону противуположную выстрѣлу.

39) Пользуясь началомъ сохраненія движенія центра тяжести и началомъ площадей, изслѣдовать движеніе брошенной тяжелой палки, пренебрегая сопротивленіемъ воздуха.

40) Показать, что въ сферическихъ координатахъ r, φ, λ

$$dU = \Sigma m\,(Rdr + \Phi r d\varphi + Lrd\lambda \sin\varphi),$$

гдѣ $R =$ ускореніе, дѣйствующее въ направленіи r, Φ — ускореніе перпендикулярное къ r и лежащее въ плоскости меридіана, L—ускореніе перпендикулярное къ плоскости меридіана.

41) Опредѣлить разность работы, совершенной въ теченіе 5 минутъ машиною, дѣйствовавшею съ мощностью 100 паровыхъ лошадей и работы, совершенной въ теченіе 80 минутъ машиною, дѣйствовавшею съ мощностью 20 паровыхъ лошадей.

42) Опредѣлить въ тоннахъ сопротивленіе воды, преодолѣваемое пароходомъ, который, работая съ мощностью 8000 паровыхъ лошадей («*эффективныхъ*», то-есть за вычетомъ мощности идущей на преодолѣніе другихъ) сопротивленій), идетъ со скоростью 32 киломотровъ въ часъ.

43) Найти, съ какою мощностью вертится равномѣрно колесо, если уравновѣшиваетъ тормозящую силу, дѣйствующую по касательной равную P килогр., дѣлаетъ n оборотовъ въ минуту, и радіусъ его равенъ r миллиметр.

44) Какой тормазящій моментъ уравновѣшиваетъ колесо, если вращается равномѣрно съ мощностью N паровыхъ лошадей, дѣлая n оборотовъ въ минуту.

45) Велосипедистъ, вѣсящій съ велосипедомъ 90 килогрм., спускается, не дѣйствуя на подножки, по дорогѣ, имѣющей уклонъ въ $\frac{1}{100}$, съ постоянною скоростью 13 километровъ въ часъ, преодолѣвая сопротивленія тренія и воздуха. Съ какою мощностью онъ долженъ работать, чтобы съ тою же постоянною скоростью ѣхать вверхъ по дорогѣ, имѣющей уклонъ въ $\frac{1}{200}$. Уклонъ въ $\frac{1}{a}$ обозначаетъ, что тангенсъ угла наклоненія дороги къ горизонту равенъ $\frac{1}{a}$.

Отдѣлъ IV. — Главы I. II, и III.

Показать справедливость слѣдующихъ формулъ, выражающихъ моменты инерціи.

46) Для прямой AB, относительно оси, проходящей чрезъ A и составляющей уголъ β съ AB, называя l длину прямой $J = \frac{l^2 \sin^2 \beta}{3} M$.

47) Для прямой, имѣющей длину $2a$, относительно перпендикулярной къ ней оси, не лежащей въ ея плоскости, если b есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ средины прямой на ось: $J = \left(\frac{1}{3} a^2 + b^2\right) M$.

48) Для дуги круга, относительно оси перпендикулярной къ ея плоскости и проходящей чрезъ ея центръ тяжести, если r—радіусъ, c—хорда, a — длина дуги, $J = \frac{r^3}{a^2} (a^2 - c^2) M$.

49) Для дуги круга, относительно оси перпендикулярной къ ея плоскости и проходящей чрезъ ея средину, $J = \frac{2r^2}{a} (a - c) M$.

50) Для эллиптической пластинки, ограниченной эллипсомъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно оси $2b$ мы нашли въ 179-мъ параграфѣ $J = \frac{a^2}{4} M$.

51) Для эллиптической пластинки, относительно оси перпендикулярной къ ней и проходящей чрезъ ея центръ; $J = \frac{1}{4} (a^2 + b^2) M$.

52) Для пластинки, имѣющій видъ равносторонняго треугольника относительно высоты, если $2b$ есть сторона $J = \frac{b^2}{6} M$.

53) Для треугольной пластинки, стороны которой суть a, b, c, относительно оси перпендикулярной къ пластинкѣ и проходящей чрезъ вершину противоположную сторонѣ a; $J = \frac{1}{12} (3b^2 + 3c^2 - a^2) M$.

54) Для треугольной пластинки, относительно еси перпендикулярной къ ней и проходящей чрезъ центръ тяжести $J = \frac{1}{36} [a^2 + b^2 + c^2) M$.

55) Для пластинки имѣющій видъ параллелограмма, относительно оси перпендикулярной къ ней и проходящей чрезъ пересѣченія діагоналей, если $2a$ и $2b$ суть стороны, $J = \frac{(a^2 + b^2)}{3} M$.

56) Для пластинки, имѣющій видъ правильнаго многоугольника, относительно оси перпендикулярной къ ней и проходящей чрезъ центръ тяжести, если n—число сторонъ, c—длина стороны,

$$J = \frac{c^2 \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)}{12\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)} M.$$

57) Для сферическаго слоя, заключеннаго между сферическими поверхностями радіусовъ a и b, относительно діаметра: $J = \frac{2(a^5 - b^5)}{5(a^3 - b^3)} M$.

58) Для прямого круглаго цилиндра, относительно оси, $J = \frac{R^2}{2} M$.

59) Для прямого круглаго цилиндра относительно оси перпендикулярной къ оси цилиндра и проходящей чрезъ ея середину, если a—радіусъ, $2b$ — высота, $J = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}\right) M$.

Отдѣлъ IV. — Глава IV.

60) Опредѣлить угловую скорость ω, съ которою равномѣрно вращается тѣло, совершающее n оборотовъ въ минуту.

61) Опредѣлить время колебанія куба около одного изъ реберъ расположеннаго горизонтально. Опредѣлить время колебанія того же куба около расположенной горизонтально діагонали одной изъ его граней. Показать что длина изохраннаго математическаго маятника въ первомъ случаѣ $\frac{4}{3} a \sqrt{2}$, во второмъ $\frac{5}{3}$ a, если ребро куба равно 2a.

62) Круговая дуга качается около перпендикулярной къ ея плоскости оси, проходящей чрезъ ея центръ. Показать, что время полнаго колебанія не зависитъ отъ длины качающейся дуги и что длина изохраннаго математическаго маятника равна двойному радіусу.

63) Опредѣлить ту изъ осей, лежащихъ въ плоскости эллиптической пластинки, около которой пластинка совершаетъ наиболѣе короткія колебанія.

64) Тонкая однородная палка качается около горизонтальной оси, проходящей чрезъ верхній конецъ ея. Палку эту проводятъ въ горизонтальное положенія и оставляютъ затѣмъ двигаться, не сообщая начальной скорости, подъ вліяніемъ тяжести. Показать, что, когда горизонтальное дѣйствіе на ось будетъ наибольшимъ, то вертикальное дѣйствіе на ось относится къ вѣсу палки какъ 11 : 8.

Отдѣлъ IV. — Глава V.

65) Лѣстница AB прислонена верхнимъ концомъ B къ гладкой стѣнѣ, тогда какъ нижній ея конецъ упирается о шероховатую горизонтальную плоскость. По лѣстницѣ перемѣщается грузъ, вѣсъ котораго въ n разъ болѣе вѣса лѣстницы. Показать, что тренія въ A при крайнихъ положеніяхъ груза относятся какъ $(2n + 1) : 1$.

66) Однородная балка проходитъ надъ однимъ и подъ другимъ горизонтальнымъ неподвижнымъ стержнемъ. Показать, что равновѣсіе балки возможно только въ томъ случаѣ, когда длина балки $> b \left[1 + \frac{tg\,\beta}{\mu}\right]$, гдѣ b—разстояніе между стержнями, β—уголъ наклоненія къ горизонту этого разстоянія, μ—коэффиціентъ тренія.

Отдѣлъ VI.

67) Показать, что двѣ равныя массы, сосредоточенныя въ точкахъ отстоящихъ одна отъ другой на разстояніи 1 сантиметра, притягиваютъ одна другою съ силою, равною одному дину, если каждая изъ массъ равна 3928 граммъ.

68) Показать, что два соприкасающихся одинаковыхъ шара, плотность которыхъ равна единицѣ и радіусъ которыхъ равенъ 43,3 сант., притягиваются съ силою, равною одному дину.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

1) $x = 5t + 200$.

2) $v = cos\,t - sin\,t$.

3) $v = a\,.\,cos\,(at)$.

4) $v = \frac{a}{2\sqrt{at+b}}$.

5) $j = -\,sin\,t - cos\,t$; $j = -\,a^2\,.\,sin\,(at)$; $j = -\frac{a^2}{4\,(at+b)^{\frac{3}{2}}}$.

6) $X = -\,m\,(sin\,t + cos\,t)$; $X = -\,a^2m\,.\,sin\,(at)$; $X = -\frac{a^2m}{4\,(at+b)^{\frac{3}{2}}}$.

7) $v = \frac{a}{2m}t^2 + \frac{b}{m}t + c_1$; $x = \frac{a}{6m}t^3 + \frac{b}{2m}t^2 + c_1t + c_2$, гдѣ c_1 и c_2— постоянныя интеграціи.

8) На точку дѣйствуетъ тяжесть и сопротивленіе, которое можно выразить чрезъ mgk^2v^2. Получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,g\,(1 + k^2v^2);\ \frac{dv}{dt} = -\,g\,(1 + k^2v^2);$$

$$kg\,t = artg\,(kv_0) - artg\,(kv) = artg\left(\frac{k\,(v_0 - v)}{1 + k^2v_0v}\right);\quad v = \frac{kv_0 - tg\,(kgt)}{k + k^2v_0\,.\,tg\,(kgt)};$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k}\left[\frac{kv_0\,.\,cos\,(kgt) - sin\,(kgt)}{cos\,(kgt) + kv_0\,.\,sin\,(kgt)}\right];\quad k^2gx = lg\,[cos\,(kgt) + kv_0\,.\,sin\,(kgt)].$$

9) $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^2}$. Помноживъ обѣ части на $2\,\frac{dx}{dt}$ и интегрируя, получимъ

$$mv^2 - mv_0^2 = -\,2\int\frac{kdx}{x^2} = 2k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Здѣсь v_0 скорость на разстояніи x_0 отъ начала. Если точка начинаетъ движеніе, выходя изъ покоя въ то время, когда она находилась на разстояніи a отъ начала, то:

$$x_0 = a;\ v_0 = 0;\ mv^2 = 2k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2k}{a}\,\frac{(a-x)}{x};$$

$$v = \sqrt{\frac{2k}{ma}\,\frac{(a-x)}{x}}\,;\ dt = \sqrt{\frac{ma}{2k}} \cdot \sqrt{\frac{x}{a-x}} \,.\, dx,$$

$$t = t_0 - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{ma}{ka}}\, arc\cos\left(\frac{a-2x}{a}\right) + \sqrt{\frac{ma}{2k}}\sqrt{ax - x^2}.$$

10) $\frac{x-b_1}{a_1} = \frac{z-b_3}{a_3} = \frac{y-b_2}{a_2}$; $v = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$.

11) $v = \sqrt{v_0{}^2 \cos^2\varphi + (v_0 \,.\, \sin\varphi - gt)^2}$.

12) $\frac{dx}{dt} = -kA\sin(kt) + kB \,.\, \cos(kt)$; $\frac{dy}{dt} = -kA'\sin(kt) +$

$$+ kB' \,.\, \cos(kt);$$

$$v = \sqrt{[-kA\sin(kt) + kB\cos(kt)]^2 + [-kA'\sin(kt) + kB' \,.\, \cos(kt)]^2}$$

$$\cos(v,x) = \frac{-A\sin(kt) + B \,.\, \cos(kt)}{\sqrt{[-A\sin(kt) + B \,.\, \cos(kt)]^2 + (-A'\sin(kt) + B' \,.\, \cos(kt))^2}}$$

$$\cos(v,y) = \frac{-A'\sin(kt) + B'\cos(kt)}{\sqrt{[-A\sin(kt) + B \,.\, \cos(kt)]^2 + [-A' \,.\, \sin(kt) + B' \,.\, \cos(kt)]^2}}$$

$$tg\,(v,x) = \frac{B'\cos(kt) - A'\sin(kt)}{B\quad \cos(kt) - A\sin(kt)}$$

$$j = \sqrt{k^4[A\cos(kt) + B\sin(kt)]^2 + k^4[A'\cos(kt) + B'\sin(kt)]^2}$$

$$j = k^2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cos(j,x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;\ \cos(j,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

13) См. задачу (11):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(gt - v_0 \,.\, \sin\varphi)\, g}{\sqrt{v_0{}^2\cos^2\varphi + (v_0\sin\varphi - gt)^2}}.$$

Изъ § 52 знаемъ, что траекторія есть парабола $x_1{}^2 = -2pz_1$, въ которой $2p = \frac{2v_0{}^2\cos^2\varphi}{g}$. Радіусъ кривизны параболы равенъ

$$\rho = \frac{(x^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Нормальное ускореніе равно:

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{[v_0{}^2\cos^2\varphi + (v_0\sin\varphi - gt)^2]p^2}{(x^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

14) Изъ треугольника силъ имѣемъ $R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2P_1P_2\cos\theta}$.

15) $X = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2$; $Y = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2$; $tg\,\varphi = \frac{Y}{X}$;

$$tg\,\varphi = \frac{P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2}{P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2}.$$

18) Равнодѣйствующая останется та же по величинѣ и направленію, но приложена уже въ O'. Проложенія пары получаются другія, а именно:

$$L' = \Sigma\,[(y-\eta)\,Z - (z-\zeta)\,Y] = L - \eta\Sigma Z + \zeta\Sigma Y$$

$$M' = \Sigma\,[(z-\zeta)\,X - (x-\xi)\,Z] = M - \zeta\Sigma X + \xi\Sigma Z$$

$$N' = \Sigma\,[(x-\xi)\,Y - (y-\eta)\,X] = N - \xi\Sigma Y + \eta\Sigma X$$

19) Ось динамы называется также центральною осью. Пусть l, m, n суть косинусы наклоненія центральной оси. Имѣемъ

$$l = \frac{\Sigma X}{R}\,;\; m = \frac{\Sigma Y}{R}\,;\; n = \frac{\Sigma Z}{R}\,,$$

гдѣ R—равнодѣйствующая силъ ΣX; ΣY и ΣZ. Если обозначимъ чрезъ G моментъ, равнодѣйствующій моментовъ L, M, N, чрезъ θ уголъ составляемый моментами Γ и G, то:

$$\Gamma = G\cos\theta = Ll + Mm + Nn\,.$$

Отсюда:

$$\Gamma R = L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z$$

$$p = \frac{\Gamma}{R} = \frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{R^2}.$$

20) $$\frac{L - \eta\Sigma Z + \zeta\Sigma Y}{\Sigma X} = \frac{M - \zeta\Sigma X + \xi\Sigma Z}{\Sigma Y} = \frac{N - \xi\Sigma Y + \eta\Sigma X}{\Sigma Z}\,;$$

гдѣ $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ суть координаты точекъ оси динамы.

22) Пусть O—центръ диска, C—центръ отверстія. Принимая OC за ось иксовъ, получимъ:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{\pi a^2\,.\,o - \pi b^2\,.\,c}{\pi a^2 - \pi b^2} = \frac{-\,b^2 c}{a^2 - b^2}.$$

Здѣсь мы считаемъ массу вынутаго изъ отверстія матеріала отрицательною.

26) $\bar{x} = x - \dfrac{c\,(y-c)}{s}\,;\ \ \bar{y} = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{cx}{s}\right)\cdot$ Можно показать, что $\bar{x}$ равенъ абсциссѣ точки Γ, въ которой пересѣкаются касательныя, проведенныя въ концахъ изслѣдуемой дуги цѣпной линіи, и что $\bar{y}$ равно половинѣ ординаты точки N, въ которой пересѣкаются нормали, проведенныя въ концахъ дуги.

29) $\bar{x} = \dfrac{4r}{3\pi}\,;\ \bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}.$

34) $s = \pi\,(a + b)\,p;\ v = \dfrac{\pi}{3}\,cp^2.$

37) Уравненіе трубки таково:

$$y = kx\,.\,t;\quad X = 0,\quad Y = 0.$$

Въ формулѣ Лагранжа (278) достаточно разсматривать только

$$x \text{ и } y;\quad \delta y = kt\,\delta x.$$

Формула (278) даетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kt\,\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Уравненіе трубки даетъ:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = kt\,\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\,\frac{dx}{dt}.$$

Исключая $\frac{d^2y}{dt^2}$, получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{dx}{dt} = -\,\frac{2k^2t}{1 + k^2t^2}.$$

Интегрируя, получимъ:

$$lg\left(\frac{dx}{dt}\right) + lg\,(1 + k^2t^2) = const.$$

Если обозначимъ чрезъ β начальную скорость точки по трубкѣ, то:

$$dx = \frac{\beta\,dt}{1 + k^2t^2}.$$

Если a есть начальное значеніе координаты x, то:

$$x = a + \frac{\beta}{k}\,artg\,(kt);\ y = akt + \beta t\,artg\,(kt).$$

Если r, φ суть полярныя координаты, полярная ось которыхъ направлена по начальному положенію трубки, то:

$$x = a + \frac{\beta}{k}\varphi;\ y = \left(a + \frac{\beta}{k}\right) tg\,\varphi.$$

Траекторія будетъ

$$r = \frac{ak + \beta\varphi}{k\cos\varphi}.$$

39) Центръ тяжести палки описываетъ параболу. Проведемъ чрезъ центръ тяжести оси координатъ Gx, Gy, Gz постояннаго направленія. Моменты внѣшней силы (тяжести) по отношенію къ каждой изъ этихъ осей равны нулю, потому что всѣ силы тяжести, дѣйствующія на точки палки приводятся къ одной равнодѣйствующей. Поэтому получимъ интегралы площадей (323). Пусть p есть точка палки, помѣщенная на *единицѣ* разстоянія отъ центра тяжести и пусть координаты ея относительно осей Gx, Gy, Fz суть a, b, c. Если r есть разстояніе какой-либо точки палки отъ центра тяжести и если палку принять за прямую линію, то координаты точки m будутъ $x = ra$; $y = rb$; $z = rc$ такъ что

$$\frac{dx}{dt} = r\,\frac{da}{dt};\ \frac{dy}{dt} = r\,\frac{db}{dt};\ \frac{dz}{dt} = r\,\frac{dc}{dt}.$$

Уравненія (323) дадутъ:

$$\left(b\frac{dc}{dt}-c\frac{db}{dt}\right)\Sigma mr^2=c_1;\ \left(c\frac{da}{dt}-a\frac{dc}{dt}\right)\Sigma mr^2=c^2;$$

$$\left(a\frac{db}{dt}-b\frac{da}{dt}\right)\Sigma mr^2=c_3.$$

Помноживъ эти уравненія соотвѣтственно на a, b, c и сложивъ, получимъ $c_1a+c_2b+c_3c=0$. Слѣдовательно точка p находится постоянно въ плоскости неподвижной по отношенію къ подвижнымъ осямъ Gx, Gy, Gz. Вращеніе палки происходитъ въ этой плоскости около G. Такъ какъ законъ площадей остается вѣрнымъ и для этой плоскости, то вращеніе палки равномѣрное. Движеніе палки состоитъ, слѣдовательно, изъ параболическаго движенія центра тяжести и изъ равномѣрнаго вращенія около него палки въ плоскости, проходящей чрезъ него и остающейся параллельною нѣкоторой неподвижной плоскости, направленіе которой зависитъ отъ того, какъ была брошена палка.

40) Такъ какъ $dU=\Sigma\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=$ элементарной работѣ, то вообще для всякихъ координатъ dU равно суммѣ элементарныхъ работъ силъ. Въ сферическихъ координатахъ r, φ, λ точки приложенія силъ mR, $m\Psi$, mL проходятъ по направленію этихъ силъ, соотвѣтственно, пути: dr; $rd\varphi$; $r\sin\varphi\,d\lambda$. Слѣдовательно

$$dU=\Sigma m\,(R\,dr+\Psi\,rd\varphi+Lr\,.\,\sin\varphi\,.\,d\lambda).$$

41) Работа, совершенная первою машиною, равна 2250000 килограмметр. Работа, совершенная второю машиною равна 7200000 к. Искомая разность равна 4950000 килограмметр. Слабая машина сдѣлала больше работы, потому что работала долѣе.

42) Мощность въ килограмметрахъ равна здѣсь произведенію пути, пройденному въ секунду, на силу уравновѣшивающую сопротивленіе воды, то есть $v\,.\,P$, гдѣ v скорость въ секунду, P сопротивленіе въ килограммахъ. Если N мощность въ паровыхъ лошадяхъ, то $P=\frac{N\,.\,75}{v}\cdot$

$$v=\frac{32000}{3600}\left[\frac{\text{метр.}}{\text{секунд.}}\right]$$

$$P=\frac{8000\,.\,75\,.\,3600}{32000}\text{ килогр.}=\frac{8000\,.\,75\,.\,3600}{32000\,.\,1000}\text{ тоннъ}=67{,}5\text{ тоннъ.}$$

43) За одинъ оборотъ точка окружности колеса проходитъ $\frac{2\pi r}{1000}$ метровъ, за n оборотовъ она проходитъ $\frac{2\pi r\,.\,n}{1000}$ метровъ; въ секунду она проходитъ $\frac{2\pi r\,.\,n}{1000\quad 60}$ метровъ. Работа, совершаемая колесомъ въ секунду равна $\frac{2\pi r\,.\,n\,.\,P}{1000\,.\,60}$ килограмметр. Мощность N въ паровыхъ лошадяхъ равна $N=\frac{2\pi r\,.\,n\,.\,P}{1000.60.75}\cdot$

44) Искомый моментъ M равенъ $\frac{P.r}{1000}$, если радіусъ колеса выраженъ въ миллиметрахъ, P выражено въ килограммахъ и за единицу момента принимаемъ моментъ, производимый силою равною вѣсу одного килограмма, дѣйствующею на плечо въ 1 метръ. Поэтому, согласно съ задачею 43, искомый моментъ опредѣлится изъ формулы $N = \frac{2\pi . n . M}{60 . 75}$.

45) Такъ какъ уголъ наклоненія дороги къ горизонту въ обоихъ случаяхъ очень малъ, то можно принять, что уклонъ равенъ его синусу, то есть, что проѣзжая какой либо путь по уклону въ $\frac{1}{100}$ велосипедистъ поднимается въ вертикальномъ направленіи на $\frac{1}{100}$ этого пути. Спускаясь, велосипедистъ не дѣйствуетъ на педали; слѣдовательно для равномѣрнаго движенія должно существовать равенство работы силы тяжести съ работою сопротивленій. Поэтому мощность сопротивл. $= \frac{13000 . 90}{3600 . 100}$ килограмметр. въ секунду. Чтобы подниматься равномѣрнымъ движеніемъ велосипедистъ долженъ производить работу равную суммѣ работъ сопротивленій и тяжести. Поэтому искомая мощность N велосипедиста при поднятіи равна:

$$N = \frac{90 . 13000}{3600 . 200} + \frac{13000 . 90}{3600 . 100} = \frac{39}{8} \text{ килограмметр. въ секунду.}$$

или

$$N = \frac{39}{8 . 75} = 0{,}065 \text{ паровыхъ лошадей.}$$

60) $v = \frac{2\pi r . n}{60} = r\omega$. Отсюда $\omega = \frac{2\pi n}{60}$.

63) Искомая ось параллельна большой оси эллипса и дѣлитъ малую полуось пополамъ.

Н. Делоне.







